# Apollonius
# *Conics*
# Books V to VII

# 圆锥曲线论

（卷Ⅴ–Ⅶ）

［古希腊］ 阿波罗尼奥斯 著
［美］G.J.图默 编辑、英译及注释
朱恩宽 冯汉桥 郝克琦 译

陕西出版传媒集团
陕西科学技术出版社

# Apollonius
# *Conics*
# Books Ⅴ to Ⅶ

# 圆锥曲线论

## （卷Ⅴ—Ⅶ）

［古希腊］阿波罗尼奥斯 著
［美］G. J. 图默　编辑、英译及注释
朱恩宽　冯汉桥　郝克琦　译

陕西出版传媒集团
陕西科学技术出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

圆锥曲线论（卷Ⅴ－Ⅶ）/（古希腊）阿波罗尼奥斯 著；朱恩宽 冯汉桥 郝克琦 译. —西安：陕西科学技术出版社，2014.6

ISBN 978-7-5369-5281-2

Ⅰ. ①圆… Ⅱ. ①阿… ②朱… ③冯… ④郝… Ⅲ. ①圆锥曲线 Ⅳ. ①O123.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 031359 号



**圆锥曲线论（卷Ⅴ－Ⅶ）**

| | |
|---|---|
| **出版者** | 陕西出版传媒集团 陕西科学技术出版社 |
| | 西安北大街 131 号 邮编 710003 |
| | 电话（029）87211894 传真（029）87218236 |
| | http://www.snstp.com |
| **发行者** | 陕西出版传媒集团 陕西科学技术出版社 |
| | 电话（029）87212206 87260001 |
| **印 刷** | 陕西宝石兰印务有限责任公司 |
| **规 格** | 787mm×1092mm 16 开本 |
| **印 张** | 24 |
| **字 数** | 511 千字 |
| **版 次** | 2014 年 6 月第 1 版 |
| | 2014 年 6 月第 1 次印刷 |
| **书 号** | ISBN 978-7-5369-5281-2 |
| **定 价** | 68.00 元 |

'Απολλω΄νιοζ

阿波罗尼奥斯
(约262B.C.-约190B.C.)

画像选自《文明之光—图说数学史》李文林主编
山东教育出版社 2005

# Apollonius

## *Conics*

## Books V to VII

The Arabic Translation of the
Lost Greek Original
in the Version of the Banū Mūsā

Volume I: Introduction, Text, and Translation

Edited
with Translation and Commentary by
G. J. Toomer

In Two Volumes
With 288 Figures

Springer-Verlag
New York Berlin Heidelberg
London Paris Tokyo Hong Kong

# Apollonius

## *Conics*

## Books V to VII

The Arabic Translation of the
Lost Greek Original
in the Version of the Banū Mūsā

Volume II: Commentary, Figures, and Indexes

Edited
with Translation and Commentary by

G. J. Toomer

In Two Volumes
With 288 Figures

Springer-Verlag
New York Berlin Heidelberg
London Paris Tokyo Hong Kong

《Apollonius Conics Books Ⅴ to Ⅶ》（施普林格出版社 1990）第二册扉页

# بسم الله الرحمن الرحيم
# المقالة الخامسة من كتاب ابلونيوس
# فى المخروطات
## نقل ثابت بن قرّة واصلاح بنى موسى

من ابلونيوس الى أطالوس سلام عليك إنّى قد وضعتُ فى هذه المقالة الخامسة اشكالاً فى الخطوط الكبار والصغار وينبغى ان تعلم انّ مَن تقدّمنا ومَن فى عصرنا هذا إنّما شاموا النظر فى الصغار منها مشامةً يسيرةً وبذلك بيّنوا اىّ الخطوط المستقيمة تماسّ القطوع وعكس ذلك ايضاً اعنى اىّ شىء يعرض للخطوط التى تماسّ القطوع فاذا عرض كانت الخطوط مماسّة ∴ فاما نحن فقد بيّنّا هذه الاشياء فى المقالة الاولى من غير ان نستعمل فى تبيين ذلك امر الخطوط الصغار ورمنا ان نجعل مرتبتها قريباً من موضع ذكرنا لحدوث القطوع الثلثة لنبيّن بذلك انّه قد يكون منها فى كلّ واحد من القطوع ما لا نهاية لعدده لما يعرض ويلزم فيها كما عرض فى الاقطار الأول واما الاشكال التى تكلّمنا فيها فى الخطوط الصغار فإنّا افردناها وعزلناها على حدة من بعد فحص كثير وضمّنّا القول فيها الى القول فى الخطوط الكبار التى ذكرنا آنفاً

1 الرحيم: وما توفيقى إلاّ بالله add. O    4 نقل...موسى om. H، اصلاح بنى موسى واخراج هلال T    5 من...وضعت: قال ابلونيوس انّى وضعت يا يوقراطيس T؛ سلام: سلم H    5-6 إنّى...اشكالاً: قد وجّهت اليك بالمقالة ة من كتاب المخروطات مع رسالتى هذه وفى هذه المقالة اشكال H, O mg.    6 الخامسة om. T؛ مَن: مَن قد T    7 فى الصغار: بالصغار T    9 للخطوط: للخطوط المستقيمة H    10 الاولى: آ HT    12 لحدوث: الحدوث T    13 لما: اما T    14 فيها: فيه T    16 وضمّنّا: وضممنا H

《Apollonius Conics Books V to VII》（施普林格出版社 1990）中阿拉伯文卷V第1页

# 陕西科学技术出版社前言

阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》卷Ⅰ—Ⅳ汉译本是根据［美］绿狮出版社（Green Lion Press）2000年出版的《Apollonius of Perga Conics Books Ⅰ—Ⅲ》英译本（R. Caresby Taliafro 译）（修订本）和2002年出版的该书卷Ⅳ的英译本（Michael N. Fried 译）为底本合译而成（朱恩宽　张毓新　张新民　冯汉桥译，陕西科学技术出版社2007年12月出版）.

阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》共有八卷，其中第八卷已失传.

希腊文的卷Ⅴ－Ⅶ已经不复存在，但是阿拉伯的译文却保留了下来.

阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》卷Ⅴ－Ⅶ的汉译本是根据施普林格出版社（Springer-verlag）1990年出版的《Apollonius Conics Books Ⅴ to Ⅶ》的英文和阿拉伯文对照本（G. J. Toomer 译）为底本进行翻译的（朱恩宽　冯汉桥　郝克琦译）. 2012年6月18日我出版社与施普林格出版社签订了版权转让合同. 复旦大学数学科学学院图书馆提供了该底本的复印本，陕西师范大学数学与信息科学学院和陕西师范大学图书馆对该汉译本的出版都给予了大力的支持和帮助.

在此我们向以上单位，以及英译者、汉译者、校对者、制图者和参与该书出版的工作人员表示感谢.

陕西科学技术出版社

*APOLLONII Conica legat. Videbit, esse quasdam materias, quae nulla ingenii felicitate ita tradi possint, ut cursoria lectione comprehendantur. Meditatione opus est, et creberrima ruminatione dictorum.*

Kepler, Astronomia Nova, p. 376

请阅读阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》，人们会看到其中有些东西不是很巧妙的，但是成功的. 虽然人们可以粗略地理解它，但是人们应当深思，并且反复地思考书中所说的内容.

开普勒（Johannes Kepler 1571—1630）

《新天文学》p. 376

# 目　录

# 汉译者序

**一、阿波罗尼奥斯及其著作**

阿波罗尼奥斯（Apollonius 约公元前 262—前 190）① 出生于小亚细亚南部的一个小城市佩尔格（Perga）．他年轻时去亚历山大向欧几里得的后继者学习数学，嗣后他居住该地和当地的大数学家合作研究．他的巨著《圆锥曲线论》（Conics）是在门奈赫莫斯（Menaechmus，公元前 4 世纪）、阿里斯泰奥斯（Aristaeus，约公元前 340）、欧几里得（Euclid，约公元前 330—前 275）和阿基米德（Archimedes，公元前 287—前 212）等前人研究的基础上，加上他自己所独创的成果，以全新的方式，并以欧几里得《几何原本》为基础写出，他把综合几何发展到最高水平．这一著作将圆锥曲线的性质网罗殆尽，几乎使将近 20 个世纪的后人在这方面也未增添多少新内容．直到 17 世纪笛卡儿（Descartes，1596—1650）、费马（Fermat，1601—1665）创立坐标几何，用代数方法重现了圆锥曲线（二次曲线）的理论；德扎格（Desargues，1591—1661）、帕斯卡（Pascal，1623—1662）创立射影几何，研究了圆锥曲线的仿射性质和射影性质，才使圆锥曲线理论有所突破，发展到一个新的阶段．然而这两大领域的基本思想也可从阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》中找到它们的萌芽．

阿波罗尼奥斯在天文方面研究也很有名，他的其他著作还有：

1.《截取线段成定比》（On the Cutting-off of a Ratio）；

2.《截取面积等于已知面积》（On the Cutting-off of an Area）；

3.《论接触》（On Contacts 或 Tangencies）；

4.《平面轨迹》（Plane Loci）；

5.《倾斜》（Vergings 或 Inclinations）；

6.《内接于同一球的十二面体与二十面体对比》（A work comparing the dodecahedron and icosahedron inscribed in the sphere）．

此外还有《无序无理量》（Unordered Irrationals）、圆周率计算以及天文学方面的著述等．

《圆锥曲线论》共有八卷，前四卷是基础部分，后四卷是拓广的内容，卷Ⅷ已失传．前四卷（卷Ⅰ－Ⅳ）有希腊文、拉丁文、阿拉伯文、法文和英文等多种文本，后三卷(卷Ⅴ－Ⅶ）有拉丁文、阿拉伯文、英文、法文和德文等多种文本．我们的汉译本是采用近期美国的三部英文译本作为底本进行翻译的，它们分别是：

C. 托利弗（Catesby Taliaferro）的英译本《Apollonius of Perga Conics Books Ⅰ－Ⅲ》2000 年 Green Lion Press（绿狮出版社）出版；

---

① 数学家传略辞典，主编梁宗巨，山东教育出版社，1989，p. 3.

M. N. 夫莱德（Michael N. Fried）的英译本《Apollonius Conics Book Ⅳ》2002 年 Green Lion Press（绿狮出版社）出版；

G. J. 图默（G. J. Toomer）的《Apollonius of Perga Conics Books Ⅴ－Ⅶ》英文和阿拉伯文对照本. 1990 年 Springer-Verlag（施普林格出版社）出版.

［美］绿狮出版社 2000 年出版的《Apollonius of Perga Conics Books Ⅰ－Ⅲ》是 1952 年不列颠百科全书出版社出版的托利弗所译《Apollonius of Perga Conics Books Ⅰ－Ⅲ》的修订版，这本书采用了一些数学符号和缩写式，并在第Ⅰ卷前一页有"对本书所用的缩写式和符号的说明"，在修订本中将此内容略去了，我们为了使读者阅读方便，还是把它添加在卷Ⅰ的前一页. 另外，我们没有采用原英文译本中图形翻页再出现的方式，而是采用图形在命题中只出现一次.

［美］绿狮出版社 2002 年出版的由 M. N. 夫莱德所译的第Ⅳ卷，命题的证明是用文字叙述的，我们为了与前三卷统一，方便读者阅读，将该卷也依前三卷的方式（使用了数学符号和缩写式）进行了改写.

［德］施普林格 1990 年出版的卷Ⅴ－Ⅶ是英文和阿拉伯文对照的译本，它也引进了数学符号和缩写式，汉译本只依据英译的内容进行翻译.

汉译本阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》分两册出版，前四卷合为一册，后三卷合为一册.

### 二、阿波罗尼奥斯写作的时代背景

在阿波罗尼奥斯之前，圆锥曲线的研究已有一百多年的历史，它与三大几何作图问题之一——"倍立方"有关. 希波克拉底（Hippocrates of Chios，公元前 460 年前后）指出倍立方问题可以归结为求线段 $a$ 与 $2a$ 之间的两个等比中项. 这是因为，若设其中比例中项为 $x$、$y$，则有

$$a:x=x:y=y:2a,$$

可得

$$x^2=ay,\ y^2=2ax,$$

于是有

$$xy=2a^2,\ 以及\ x^4=a^2y^2=2a^3x\ 或\ x^3=2a^3.$$

如果 $a$ 是已知立方体的边长，那么 $x$ 便是所求立方体的边长.

为此，有人利用两个直角三角形或木工用的直角拐尺去实现它（图 1）.

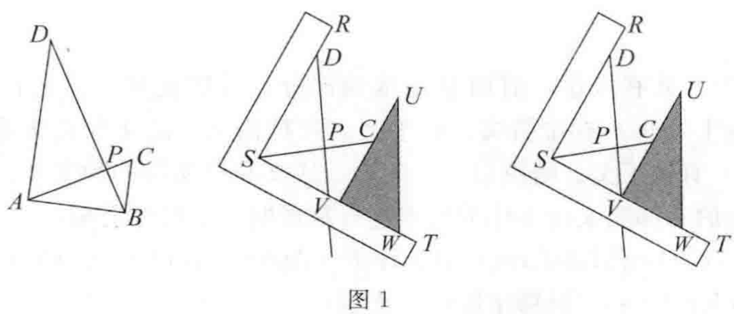


图 1

对于两个直角三角形 $ABC$ 和 $ABD$，$\angle ABC$ 和 $\angle DAB$ 都是直角，且 $AC$ 与 $BD$ 垂直相交于 $P$，从$\triangle CPB$、$\triangle BPA$ 和$\triangle APD$ 彼此相似，得知

$$PC : PB = PB : PA = PA : PD.$$

因此，$PB$ 和 $PA$ 是 $PC$ 和 $PD$ 的两个比例中项. 从而，如果能从一个图形，使 $PD=2PC$，问题就解决了. 可以考虑作两条交于 $P$ 的垂线，使 $PC=a$，$PD=2a$，然后在图形上放上木工用的直角拐尺，其内边为 $RST$，使得 $SR$ 过点 $D$，并且直角顶 $S$ 处于 $CP$ 的延长线上. 让直角三角形 $UVW$ 的直角边 $VW$ 在 $ST$ 上滑动，而直角边 $VU$ 过 $C$ 点. 最后调整两工具的位置，使 $V$ 落在 $DP$ 的延长线上①，$PV$ 就是所求的 $x$.

这种"机械的作图"没有遵从欧几里得尺规的限制，我们知道它最终证明不可能只用圆规、直尺求解. ②

根据欧托基奥斯（约公元 480）的记载，门奈赫莫斯（约公元前 4 世纪中叶）曾用两种方法：(i) 找出曲线 $x^2=ay$ 和 $y^2=2ax$ 的交点；(ii) 找出曲线 $y^2=2ax$ 和 $xy=2a^2$ 的交点. 找出其两个线段之间的两个等比中项，他发现了圆锥曲线，解决了"倍立方"问题.

门奈赫莫斯如何通过圆锥的截线而得到圆锥截线的性质，以及它们的作图，这是数学史家们关心的问题. 但是他的方法已失传，所以后人就只能根据一些史料来进行分析.

根据盖米诺斯（Geminus，约公元前 70）的记载，古代数学家是用旋转直角三角形（围绕着一条直角边）来产生圆锥面的，不动的直角边叫做轴，斜边叫做母线. 通过轴的平面与圆锥相交所成的三角形叫做轴三角形. 以轴三角形的顶角为锐角、直角或钝角，分别称圆锥为"锐角圆锥"、"直角圆锥"或"钝角圆锥". 门奈赫莫斯用垂直于一条母线的平面去截这三种锥面，得到三种不同的截线："锐角圆锥截线"（椭圆）、"直角圆锥截线"（抛物线）和"钝角圆锥截线"（双曲线）③（图 2）.

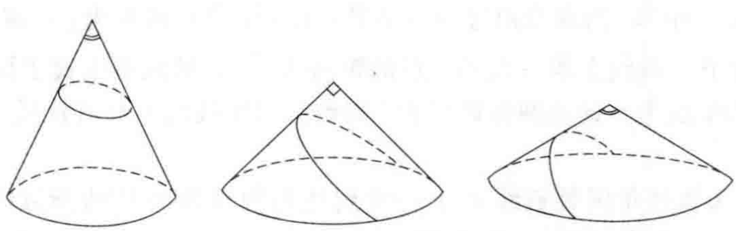

图 2

对于这三种圆锥截线的性质，可用几何证明而得到.

现证明直角圆锥截线的性质.

设直角圆锥的轴三角形 $VBC$ 是等腰直角三角形（图 3），顶角 $V$ 是直角，过母线 $VB$ 上一点 $A$ 用垂直于 $VB$ 的平面截锥面，其交线 $QAR$ 为直角圆锥截线.

过交线 $QAR$ 上任一点 $P$ 作平面垂直于轴 $VO$，它与轴截面 $VBC$ 交于 $DE$，与圆锥

① 数学史概论（修订本）.［美］H. 伊夫斯著，欧阳绛译. 山西经济出版社，1993，p. 985.

② 1837 年旺策尔（P. L. Wantzel，1814—1848）首先证明了倍立方和三等分任意角不可能只用尺规作图.

③ 世界数学通史（上册）. 梁宗巨著. 辽宁教育出版社，2001，p. 283－284.

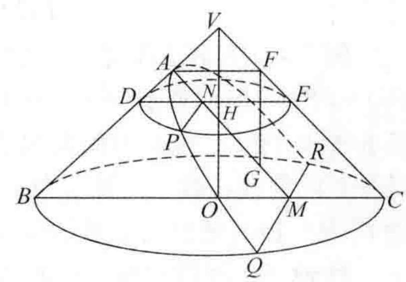

图 3

交于以 $DE$ 为直径的圆 $DPE$，由于平面 $DPE$ 和 $AQR$ 均垂直于平面 $BVC$，故交线 $PN\perp DE$. 于是

$$NP^2=DN\cdot NE.$$

作 $AF/\!/DE$，$FG\perp DE$，如图.

因为 $\triangle AFG\backsim\triangle NAD$，

于是 $FA\cdot ND=AG\cdot AN$，

又 $NE=AF$，

于是 $NP^2=DN\cdot NE=DN\cdot AF=AG\cdot AN.$

记 $AN=x$，$NP=y$，$AG$ 是与点 $A$ 位置有关的定线段记为 $b$. 于是上式可写为

$$y^2=bx.$$

用解析几何的说法便是：曲线上任意一点的纵坐标的平方等于相应的横坐标乘上一个正数（正焦弦），这正是抛物线的性质.

若设 $VA=a$，那么 $AG=\sqrt{2}AF=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}VA=2a$. 这样就得到

$$y^2=2ax,$$

这也正是解决“倍立方”问题所需的曲线之一.

若取 $VA=\frac{1}{2}a$，类似地，可得出直角圆锥截线是具有性质 $x^2=ay$ 的曲线.

若设有横、竖交于点 $O$ 的直线，从点 $O$ 向横、竖直线分别作截线具有性质 $y^2=2ax$ 和 $x^2=ay$ 的图形. 设交点为 $P$，则线段 $OP$ 在横、竖直线上的垂直射影 $OX$ 和 $OY$ 就是所求的 $a$ 与 $2a$ 之间的两个比例中项，$OX$ 就是所求立方体的边长，这样依（i）就解决了“倍立方”问题.

若作以线段 $a$ 和 $\sqrt{2}a$ 为两直角边的三角形，设 $\sqrt{2}a$ 所对的角为 $\varphi$，取一个钝角为 $2\varphi$ 的钝角圆锥，在其一母线上取一点到顶点的距离为 $\sqrt{2}a$，过该点垂直于该母线的平面与该钝角圆锥面的交线为一钝角圆锥截线 $\Gamma$，则钝角圆锥截线 $\Gamma$ 具有性质：

$$xy=2a^2.$$

其中 $x$、$y$ 为该钝角圆锥截线 $\Gamma$ 上一点到钝角圆锥截线 $\Gamma$ 的渐近线的距离①. 这样，也可以由（ii）解决“倍立方”问题.

到公元前 4 世纪末，已有两本涉及圆锥曲线的论著，它们分别是阿里斯泰奥斯的五卷本《立体轨迹》(Solid Loci) 和欧几里得的四卷本《圆锥曲线论》，这两本著作已失传，而阿基米德有关圆锥截线的研究却保留了下来. ②

阿基米德在他的《劈锥曲面体与旋转椭圆体》中证明任一椭圆都可看作一个圆锥的截线，该圆锥不一定是直圆锥，其顶点的选择有很大的任意性. 阿基米德还知道，与斜圆锥的所有母线都相交的平面可在其上截出椭圆. 但是，阿波罗尼奥斯是第一个

① 见阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》(卷Ⅰ－Ⅳ) 的“汉译者附录”. 陕西科学技术出版社，2007，12.

② 见《阿基米德全集》(修订版). T. L. 希思编，朱恩宽，常心怡等译，叶彦润，冯汉桥等校. 陕西科学技术出版社，2010，12.

根据同一个（直的或斜的）圆锥被各种位置的截面所截来研究圆锥截线系统理论的人. 他在前人的基础上把圆锥截线研究得既全面又深入，他的《圆锥曲线论》是古希腊继《几何原本》、《阿基米德的著作》之后又一部经典的著作，他被称为“伟大的几何学家”.

欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯合称为亚历山大前期的三大数学家.

阿波罗尼奥斯从一个一般圆锥面（斜的或直的）上用平面截得三种曲线，他称其为齐曲线、超曲线和亏曲线①，同时在对顶的两个圆锥面上截得两个曲线（两个超曲线）称为相对截线，它们分别就是抛物线、双曲线、椭圆和相对截线. 在汉文译本阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》（卷Ⅰ－Ⅳ）正文中，圆锥截线的名称采用了阿波罗尼奥斯的命名.

**三、《圆锥曲线论》的内容概述**

卷Ⅰ有两组共 11 个定义和 60 个命题②. 它包含了三种截线和相对截线的生成以及它们的主要性质.

在定义 1 中给出了圆锥曲面的定义：如果从一点到一个与它不在同一平面内的圆的圆周连一直线，这直线向两个方向延长，又若这个点保持固定，而这直线沿着这个圆的圆周旋转，直到它回到开始的位置，于是形成一个由两个对顶的锥面组成的曲面. 这两个锥面的每一支随着生成直线的无限延长都将无限地延展扩大，我们称这一曲面为圆锥曲面，这个固定点称为顶点，从顶点到这个圆的圆心连成的直线称为轴，该圆称为圆锥的底.

在首批 8 个定义后，有 10 个预备命题. 其中命题 8 证明了圆锥截线平行弦中点的连线在一直线上，该直线叫做圆锥截线的直径. 命题 11－14 给出了一个平面的圆锥曲面一支上截得的三种截线，即抛物线、双曲线、椭圆以及一个平面同时在圆锥曲面对顶二支上截得的相对截线，并给出了它们的基本性质.

阿波罗尼奥斯把截线为圆的图形，看作是不同于前三种截线的另一种截线，显然平行于圆锥底的平面在圆锥面上截得一个圆（Ⅰ.4）；另外，若一平面垂直于过圆锥轴且垂直于底面的平面，而且该平面在轴三角形上截出一个与其反相似的三角形，则该平面在圆锥面上也截得一个圆（Ⅰ.5），该平面叫做底平面的反位面，仅此而已（Ⅰ.9）.

现在我们从命题 13（即Ⅰ.13）来了解阿波罗尼奥斯证明该命题的思路.

设有以 $A$ 为顶点，以 $S$ 为圆心的圆为底的斜圆锥（图 4），任作一个不过圆锥顶点、不平行于圆锥底面，也不是底面的反位面且与圆锥所有母线都相交的平面. 它与圆锥交出一个封闭的图形，设它与圆锥底交于直线 $TF$. 过圆心 $S$ 作直线垂直于 $TF$，交圆于 $B$、$C$，交 $TF$ 于 $G$. 设轴三角形 $ABC$ 与截线交于 $E$、$D$. 且 $ED$ 为该截线的直径（Ⅰ.6）.

① 见［美］莫利斯·克莱因著《古今数学思想》中译本（第二版）. 张理京，张锦炎译. 上海科学技术出版社，2002，p. 104.

② 卷Ⅰ－Ⅳ的定义和命题选自阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》（卷Ⅰ－Ⅳ）. 陕西科学技术出版社，2007，12.

在圆锥截线上任取一点 $L$，作 $ML /\!/ GF$，交 $ED$ 于 $M$，过 $M$ 作 $PR /\!/ BC$，则 $PR$ 与 $ML$ 所确定的平面与底平面平行（Eucl. Ⅺ. 15），因此它与圆锥面的交线是一圆（图中未画出）. $P$、$L$ 和 $R$ 是该圆上的点，且 $PR$ 是直径，而 $ML \perp PR$.

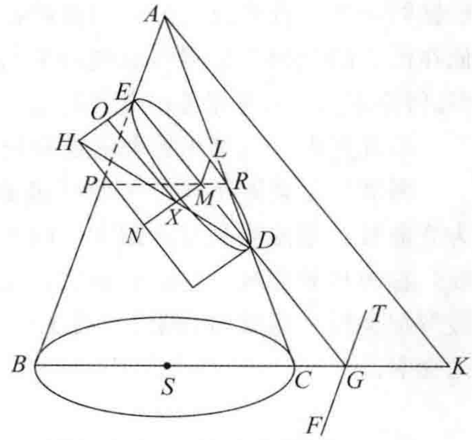

图 4

于是 $$LM^2 = PM \cdot MR. \tag{1}$$

在轴三角形平面内作 $AK /\!/ EG$，交 $BC$ 的延长线于 $K$.

因为 $$\triangle EPM \backsim \triangle ABK,$$

故有 $$\frac{PM}{EM} = \frac{BK}{AK}, \tag{2}$$

又 $$\triangle MRD \backsim \triangle ACK,$$

所以 $$\frac{MR}{MD} = \frac{CK}{AK}, \tag{3}$$

(2)、(3) 两式相乘，得

$$\frac{PM \cdot MR}{EM \cdot MD} = \frac{BK \cdot KC}{AK^2}. \tag{4}$$

于是圆锥及截平面给定后，$ED$ 即已被确定，且（4）的右端也是常数，记 $ED = 2a$，设 $p$ 满足 $\frac{BK \cdot KC}{AK^2} = \frac{p}{2a}$，则 $p$ 也是常数，

设 $EM = x$，$ML = y$，由（1）、（4）式可写成

$$y^2 = \frac{p}{2a} \cdot x\,(2a - x). \tag{5}$$

过 $E$ 作 $EH \perp EG$，使 $EH = p$，连接 $DH$，作 $MN \,\underline{/\!/}\, EH$，交 $HD$ 于 $X$，作 $XO \perp EH$，于是在 $\triangle EHD$ 中有

$$\frac{EO}{EH} = \frac{MX}{EH} = \frac{MD}{ED} = \frac{2a - x}{2a},$$

即 $$EO = \frac{p}{2a}\,(2a - x),$$

代入（5）， $$y^2 = EO \cdot x \tag{6}$$

又因为 $$\triangle HOX \backsim \triangle HED,$$

于是 $$\frac{OH}{OX} = \frac{EH}{ED} = \frac{p}{2a} \tag{7}$$

将（6）、（7）代入（5），就有

$$y^2 = EO \cdot x = px - \frac{p}{2a} \cdot x \cdot x = px - \frac{OH}{OX} \cdot x \cdot x,$$

或 $$y^2 = EO \cdot x = p \cdot x - OH \cdot x. \tag{8}$$

直径 $ED$ 上的线段 $EM$（$x$）与对应的半弦 $ML$（$y$）分别叫做横标（abscissa）和