精睿

世纪精睿

高职高专全息化经济管理类系列教材

经济数学

主编 刘志林
主审 翟向阳

JINGJI
SHUXUE

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

经济数学

主　编　刘志林
主　审　翟向阳
副主编　章朝庆　端木南珂　潘　敏
　　　　廖为鲲　李晓瑾
　　　　沐雨芳　崔　靖

上海交通大學出版社

内 容 提 要

本书的主要内容包括：一元函数的极限与连续、一元函数微分、导数的应用、一元函数积分、行列式、矩阵与线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计基础、数学建模初步和数学软件应用等。

本书以应用为目的，重视学生数学概念的建立、数学基本方法的掌握和数学应用能力的培养；以学生受益为宗旨，内容阐述清晰，简捷直观，通俗易懂，不仅强调数学学习方法的引导，而且特别注重融入数学的思想和应用；以能力训练为基础，每节配有习题，每章配有自测题，并附有参考答案。为了便于教学和自学，附录四配有 Mathematica 软件应用。

本书可作为高职高专院校、成人高校和独立学院经济数学专业教材，也可供相关科技人员和经济数学爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/刘志林主编. —上海：上海交通大学出版社，2013

全息化经济管理类系列教材

ISBN 978-7-313-10382-6

Ⅰ. 经… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 经济数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 218159 号

经 济 数 学

刘志林 **主编**

上海交通大学出版社出版发行

（上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030）

电话：64071208 出版人：韩建民

同济大学印刷厂 印刷 全国新华书店经销

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：17.75 字数：457 千字

2013 年 9 月第 1 版 2013 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-313-10382-6/F 定价：40.00 元

Preface

前　言

高职教育的人才培养目标是培养具有一定理论知识和较强实践能力的高端技能型专门人才。经济数学作为一门公共基础理论课程，应以应用为目的，以必需、够用为度。本教材结合高职院校经济数学的教学特点和当前高职经济数学课程改革，以强化数学应用为导向，以培养学生创新能力为目标，本着“必需够用”的基本原则，淡化严格的数学论证，注重培养学生严谨的思维习惯，提升职业素质。通过教学实践，我们所编内容能更好地适应当前高职经济数学教育教学的改革要求，同时能有效解决学时少与专业需求多样的问题。

本书介绍了一元函数的极限与连续、一元函数微分、导数的应用、一元函数积分、行列式、矩阵与线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计基础、数学建模初步和数学软件应用等内容。

本书由刘志林担任主编，章朝庆、端木南珂、潘敏、廖为鲲、李晓瑾、沐雨芳、崔靖担任副主编，翟向阳担任主审。

本书的编写得到了泰州职业技术学院领导的大力支持，在此深表感谢。

限于编者水平，加之时间比较仓促，书中存在的不妥之处，敬请广大读者批评和指正。

编　者

2013年7月

Contents

目　录

第一章　一元函数的极限与连续 …… 1
第一节　函数的概念和性质 …… 1
第二节　函数的极限 …… 8
第三节　两个重要的极限 …… 15
第四节　无穷小与无穷大 …… 18
第五节　函数的连续性 …… 22
第六节　应用举例 …… 29

第二章　一元函数微分 …… 33
第一节　导数概念 …… 33
第二节　导数的计算 …… 38
第三节　函数的微分 …… 43
第四节　应用举例 …… 49

第三章　导数的应用 …… 53
第一节　中值定理 …… 53
第二节　函数的单调性与曲线的凹凸性 …… 55
第三节　函数图形的描绘 …… 63
第四节　函数的最大值和最小值 …… 65
第五节　洛必达法则 …… 67
第六节　应用举例 …… 70

第四章　一元函数积分 …… 74
第一节　不定积分的概念与性质 …… 74
第二节　不定积分的计算方法 …… 78
第三节　定积分的概念与性质 …… 86

第四节 牛顿-莱布尼兹公式 …… 91
第五节 定积分的计算方法 …… 94
第六节 广义积分 …… 96
第七节 定积分在几何上的应用 …… 99
第八节 应用举例 …… 105

第五章 行列式 …… 109
第一节 行列式的概念及性质 …… 109
第二节 克莱姆法则 …… 117
第三节 应用举例 …… 119

第六章 矩阵与线性方程组 …… 123
第一节 矩阵的概念及运算 …… 123
第二节 逆矩阵与初等变换 …… 130
第三节 线性方程组 …… 141
第四节 应用举例 …… 151

第七章 随机事件及其概率 …… 157
第一节 预备知识 …… 157
第二节 随机事件 …… 160
第三节 随机事件的概率 …… 164
第四节 概率的加法公式与乘法公式 …… 166
第五节 贝努利概型 …… 170
第六节 应用举例 …… 173

第八章 随机变量及其分布 …… 177
第一节 随机变量的概念 …… 177
第二节 离散型随机变量的概率分布 …… 178
第三节 连续型随机变量的概率密度 …… 181
第四节 随机变量的分布函数 …… 185
第五节 正态分布 …… 190
第六节 应用举例 …… 195

第九章 随机变量的数字特征 …… 199
第一节 数学期望 …… 199

第二节　随机变量函数的数学期望及数学期望的性质 …… 201
第三节　方差 …… 203
第四节　应用举例 …… 207

第十章　数理统计基础 …… 211
第一节　简单随机样本 …… 211
第二节　参数估计 …… 215
第三节　应用举例 …… 220

附录一　初等数学常用公式 …… 223
附录二　积分表 …… 226
附录三　数学建模初步 …… 234
附录四　Mathematica 软件应用 …… 243
附录五　分布表 …… 257
参考答案 …… 264
参考文献 …… 275

第一章

一元函数的极限与连续

在研究和解决实际问题时，通常需要首先找出问题中变量之间的关系，即列出函数关系式，然后再进行分析和计算。在建立变量之间的函数关系基础上，利用函数极限解决变量的增量之间变化关系。例如，在医学上利用函数极限可以得到 X 射线的吸收规律。

第一节　函数的概念和性质

函数是微积分研究的主要对象，本节将在复习函数概念和性质的基础上，进一步介绍复合函数、初等函数和几种特殊函数等内容。

一、函数的基本概念

1. 邻域

定义 1　设 x_0，δ 为两个任意实数，其中 $\delta>0$，把开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\ \delta)$ 或 $U(x_0)$，其中 x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径。

$(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的空心 δ 邻域（或点 x_0 的去心 δ 邻域），记作 $\mathring{U}(x_0,\ \delta)$ 或 $\mathring{U}(x_0)$，即 $\mathring{U}(x_0)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$。

$(x_0-\delta,\ x_0)$ 和 $(x_0,\ x_0+\delta)$ 分别称为点 x_0 的左邻域和右邻域。

2. 函数的定义

定义 2　设有一非空数集 D，如果存在对应法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称对应法则 f 是定义在 D 上的一个函数，记作 $y=f(x)$。其中 x 为自变量，y 为因变量，习惯上称 y 是 x 的函数，D 称为函数的定义域。

当自变量 x 取定义域 D 内的某一定值 x_0 时，按对应法则 f 所得的对应值 y_0，称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $f(x_0)$，即 $y_0=f(x_0)$。当自变量取遍 D 中的数，所有对应的函数值 y 构成的集合称为函数的值域，记作 M，即

$$M=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}。$$

例 1　已知 $f(x)=x^2-x-1$，求 $f(1)$，$f(-x)$。

解　$f(1)=1^2-1-1=-1$；$f(-x)=(-x)^2-(-x)-1=x^2+x-1$。

例 2　求下列函数的定义域。

(1) $y=\dfrac{4}{x^2-1}$;　　　(2) $y=\sqrt{6+x-x^2}+\ln(x+1)$。

解　(1) $x^2-1\neq 0$, $x\neq\pm 1$,所以定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(2) $\begin{cases}6+x-x^2\geqslant 0\\ x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 3\\ x>-1\end{cases}$,所以定义域为$(-1,3]$。

由函数定义知,定义域与对应法则一旦确定,则函数随之唯一确定。**如果两个函数的定义域、对应法则均相同,那么认为这两个函数是相同的;反之,如果两个函数的定义域、对应法则有一个不同,则认为这两个函数就不同。**

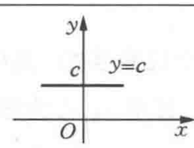
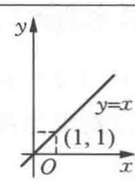
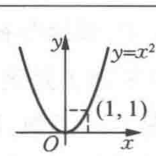
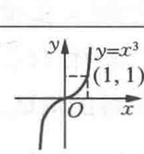
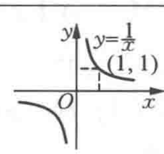
例如,$f(x)=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $g(x)=x$,因为 $f(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$,即这两个函数的对应法则相同,而且定义域均为 $\mathbf{R}$,所以它们是相同的函数。

又如,$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$,虽然 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1\ (x\neq 1)$,但由于这两个函数的定义域不同,所以这两个函数不同。

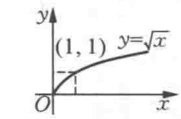
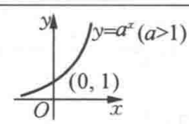
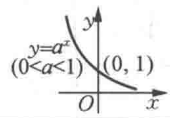
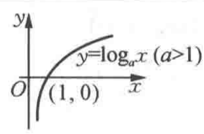
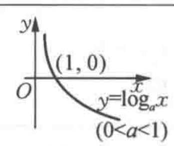
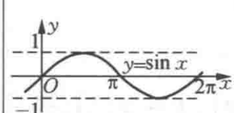
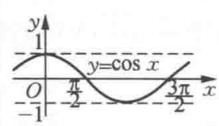
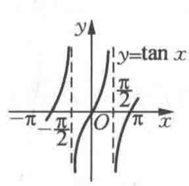
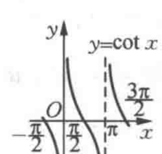
二、基本初等函数

在中学数学中,我们都已学过基本初等函数,现仅简要地将基本初等函数的图像和性质列入表 1-1。

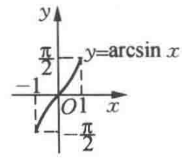
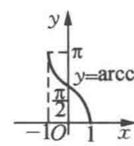
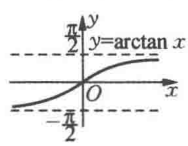
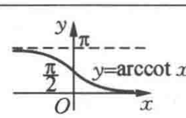
表 1-1

种类	函　数	定义域与值域	图　像	特　性
常数函数	$y=c$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{y\mid y=c\}$		偶函数 有界
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调减少

（续表）

种类	函　数	定义域与值域	图　像	特　性
幂函数	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$

（续表）

种类	函　数	定义域与值域	图　像	特　性
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,\ 1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$		奇函数,单调增加,有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,\ 1]$ $y\in[0,\ \pi]$		单调减少,有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,单调增加,有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$ $y\in(0,\ \pi)$		单调减少,有界

三、复合函数

1. 函数的复合

定义 3　**如果 $y=f(u)$, $u=g(x)$,并且函数 g 的值域包含在函数 f 的定义域中,则 $y=f(g(x))$ 称为 f 和 g 这两个函数的复合函数,u 称为中间变量。**

例 3　设 $y=\ln u$, $u=2+\cos x$,因为 $u=2+\cos x$ 的值域$[1,\ 3]$包含在 $y=\ln u$ 的定义域$(0,\ +\infty)$中,则 $y=\ln(2+\cos x)$ 可看作 $y=\ln u$, $u=2+\cos x$ 的复合函数。

例 4　设 $y=f(u)=\arcsin u$, $u=g(x)=x^2+2$,因为 $g(x)$ 的值域$[2,\ +\infty)$, $f(u)$ 的定义域$[-1,\ 1]$,则 $f(u)$ 与 $u=g(x)$ 不能构成复合函数。

例 5　设 $f(x)=3^x$, $g(x)=x-1$,则 $f(g(x))=f(x-1)=3^{x-1}$, $g(f(x))=g(3^x)=3^x-1$。

注意　一般来说,$f(g(x))\neq g(f(x))$。

2. 复合函数的分解

复合函数可分解成若干个简单函数。

例 6　$y=e^{x^2}$ 可分解为 $y=e^u$, $u=x^2$;

$y=(\arctan\sqrt{x})^2$ 可分解为 $y=u^2$, $u=\arctan v$, $v=\sqrt{x}$;

$y=\ln\tan^2(1+x^2)$ 可分解为 $y=\ln u$, $u=v^2$, $v=\tan w$, $w=1+x^2$。

必须指出,熟练掌握复合函数的分解对后续内容的学习相当重要,有助于以后熟练掌握微积分的方法和技巧。

四、初等函数

定义 4　**由基本初等函数经过有限次四则运算和复合过程构成，并且能用一个数学式子表示的函数称为初等函数。**例如，$y=A\sin(\omega x+\phi)$，$y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 等都是初等函数；而 $y=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$，$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$都不是初等函数。

五、几种特殊的函数

1. 分段函数

在定义域的不同部分用不同表达式表示的函数称为分段函数。例如，$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，和符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 都是分段函数，它们的图像如图 1-1、1-2 所示。

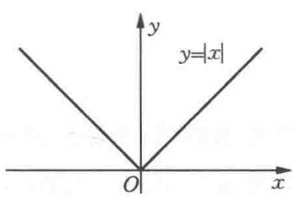


图 1-1

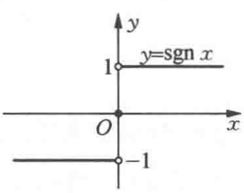


图 1-2

2. 显函数和隐函数

前面所讨论的函数，其自变量 x 与因变量 y 之间的关系可以表示成 $y=f(x)$，如 $y=\sin(x+2)$，$y=\ln x+\sqrt{1-x^2}$。**把形如 $y=f(x)$ 这种方式表达的函数称为显函数。**有些函数的表达式不是这样，例如方程 $y+x-e^{xy}=0$，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任给一个值 x，可相应地确定一个 y 值，因此，根据函数的定义，该方程在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内也确定了一个 y 关于 x 的函数，由于 y 没有明显地用 x 的算式表示出来，故称这样的函数为隐函数。**把由 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y(x)$ 或 $x(y)$ 称为隐函数。**

注意　有些隐函数可以转化为显函数，有些隐函数不能转化为显函数。

例如，方程 $2x-y^3+1=0$ 确定的隐函数 $y(x)$ 可以转化为显函数 $y=\sqrt[3]{2x+1}$；

而方程 $\dfrac{x}{y}=\ln(xy)$ 确定的隐函数 $y(x)$ 就不可以转化为显函数。

3. 幂指函数

形如 $y=[u(x)]^{v(x)}$ $(u(x)>0,\ v(x)\neq 1)$ 的函数称为幂指函数。例如，$y=x^{\sin x}$，$y=x^x$ 等都是幂指函数，其实，幂指函数也可以化为初等函数，因为 $y=[u(x)]^{v(x)}=e^{v(x)\ln(u(x))}$。

4. 参数方程所确定的函数

在解析几何中，我们学过参数方程，它的一般形式为

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)。$$

一般地，y 通过参数 t 与 x 也能建立函数关系 $y=y(x)$，称之为参数方程所确定的函数。例如，由参数方程 $\begin{cases} x=\cos t-\sin t \\ y=3\sin 2t \end{cases}$，可以确定的一个 y 关于 x 的函数 $y=3-3x^2$。

六、函数的性质

1. 有界性

定义 5 **设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上有定义，如果存在正数 M，对于任意 $x\in(a, b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 上是有界的，若不存在这样的正数 M，则称 $y=f(x)$ 在 (a, b) 上是无界的。**

从几何上看，有界函数的图形被限制在两条平行于 x 轴的直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 所确定的带形区域内。如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的，$|\sin x|\leqslant 1$。

$y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是无界的，因为找不到这样的正数 M，使得对任意 $x\in R$，$|x^3|\leqslant M$ 恒成立，而 $y=x^3$ 在 $(-10, 1)$ 上是有界的，$|x^3|<10^3$。

注意 M 不唯一。

2. 奇偶性

定义 6 **设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $y=f(x)$ 是奇函数；如果对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $y=f(x)$ 是偶函数，否则，称 $y=f(x)$ 是非奇非偶函数。**

在直角坐标系中，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称。

例 7 判断下列函数的奇偶性。

(1) $y=x\sin x$； (2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$； (3) $y=x+\cos x$。

解 (1) 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有 $f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$，所以 $y=x\sin x$ 是偶函数。

(2) 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]=\ln(\sqrt{x^2+1}-x) \\ &= \ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= -\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x), \end{aligned}$$

所以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数。

(3) 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有 $f(-x)=-x+\cos(-x)=-x+\cos x$，所以 $y=x+\cos x$ 是非奇非偶函数。

3. 单调性

定义 7 **设函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内有定义，对任意的 $x_1, x_2\in(a, b)$，若 $x_1<x_2$ 时，**

$f(x_1)<f(x_2)$ 恒成立,则称函数 $y=f(x)$ 在区间(a,b) 内是单调增加的;若 $x_1<x_2$ 时,$f(x_1)>f(x_2)$ 恒成立,则称函数 $y=f(x)$ 在区间(a,b) 内是单调减少的。

4. 周期性

定义 8　**设函数 $y=f(x)$ 在区间(a,b) 内有定义,若存在非零常数 T,对任意 $x\in(a,b)$ 与 $x+T\in(a,b)$,都有 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称 $y=f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,满足这个等式的最小正数 T 称为函数的最小正周期,简称周期。**

$y=\sin x$,$y=\cos x$ 的周期是 2π,$y=\tan x$,$y=\cot x$ 的周期是 π。

$y=A\sin(\omega x+\varphi)+y_0$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$,$y=A\tan(\omega x+\varphi)+y_0$ 的周期 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$。

例 8　求 $y=\sin^2 x$ 的周期。

解　因为 $y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos 2x}{2}$,所以函数的周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$。

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$;　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5) $y=\sin\sqrt{x}$;　(6) $y=\tan(x+1)$;

(7) $y=\arcsin(x-3)$;　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$。

2. 下列各题中,函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同?

(1) $f(x)=\lg x^2$,$g(x)=2\lg x$;　(2) $f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$,$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;(4) $f(x)=1$,$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$。

3. 已知函数 $f(x)=x^2+3x+1$,求 $f(-x)$,$f(x+1)$。

4. 将下列复合函数分解成简单函数:

(1) $y=(3x-7)^{12}$;　(2) $y=\sin^2 2x$;

(3) $y=(\arccos\sqrt{x})^2$;　(4) $y=e^{-\sqrt[3]{x^2-1}}$;

(5) $y=\sqrt{1+\sin(x+1)^2}$;　(6) $y=\ln\tan^2(1+x^2)$。

5. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$;　(2) $y=3x^2-x^3$;

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　(4) $y=x(x-1)(x+1)$;

(5) $y=\sin x-\cos x+1$;　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$。

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间上的,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

7. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

(1) $y=\cos(x-2)$; (2) $y=\cos 4x$;

(3) $y=1+\sin \pi x$; (4) $y=x\cos x$;

(5) $y=\cos^2 x$。

第二节 函数的极限

极限是微积分中最基本、最重要的概念之一,极限的思想与理论是整个高等数学的基础,连续、微分、积分等重要概念都归结于极限。因此掌握极限的思想是学好高等数学的前提,本节将在上一节函数的基础上,介绍极限概念。

一、当 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

1. 当 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 1 **设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有定义,若当 $x\to+\infty$ 时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限。记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,或当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to A$。**

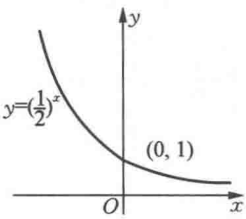


图 1-3

例 1 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$。

解 由函数图像(见图 1-3)可以观察到,当 x 无限增大时,对应的函数值 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 无限接近于 0,因此,根据定义 1,得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$。

一般地,$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0\ (0<a<1)$。

数列 $\{x_n\}$ 是定义在自然数集上的函数,可以设 $x_n=f(n)$, $n\in N$, $n\to+\infty$ 其实是 $x\to+\infty$ 的一种特殊情形,即 x 按照正整数点无限增大,因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ 就是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的一种特殊情况。

对于数列 $\{x_n\}$,当 $n\to+\infty$ 时,通项 x_n 无限接近于某一常数 A,则称 A 为当 $n\to+\infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 的极限,记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=A$,或当 $n\to+\infty$ 时,$x_n\to A$。

例 2 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}$。

解 通过列表,观察当 n 无限增加时,数列 $\frac{1}{n^2}$ 和 $\frac{n}{n+1}$ 的变化趋势(见表 1-2)。

表 1-2

n	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{n}{n+1}$
1	1	$\frac{1}{2}=0.5$

（续表）

n	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{n}{n+1}$
2	$\frac{1}{4}=0.25$	$\frac{2}{3}\approx0.667$
3	$\frac{1}{9}\approx0.111$	$\frac{3}{4}=0.75$
4	$\frac{1}{16}=0.0625$	$\frac{4}{5}=0.8$
10	$\frac{1}{100}=0.01$	$\frac{10}{11}\approx0.909$
100	$\frac{1}{10\,000}=0.0001$	$\frac{100}{101}\approx0.990$
⋮	⋮	⋮

由表 1-2 可见，当 n 无限增加时，$\frac{1}{n^2}$ 逐步减小，且无限接近于 0，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$；当 n 无限增加时，$\frac{n}{n+1}$ 逐步增大，且无限接近于 1，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$。

2. 当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 2　**设 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 内有定义，若当 $x\to-\infty$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的极限。记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，或当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to A$。**

例 3　求 $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$。

解　由函数图像（见图 1-4）可以观察到，当 $x\to\infty$ 时，对应的函数值 2^x 无限接近于 0，因此根据定义 2，得 $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$。

一般地，$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0\ (a>1)$。

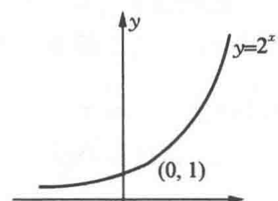


图 1-4

3. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 3　**设 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)\cup(a,+\infty)$ 内有定义，若当 $x\to\infty$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都无限接近于某一常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限。记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，或当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to A$。**

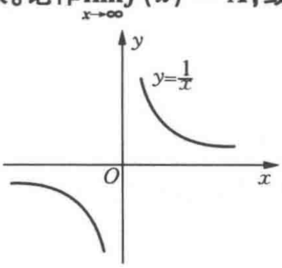


图 1-5

例 4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$。

解　由函数图像（见图 1-5）可以观察到，当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，对应的函数值 $\frac{1}{x}$ 都无限接近于 0，因此，根据定义 3，得 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$。

例 5　讨论 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在。

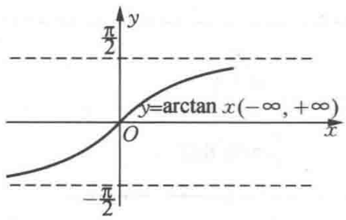


图 1-6

解　由函数图像(见图 1-6)可以观察到,当 $x\to-\infty$时,对应的函数值 arctan x 无限接近于 $-\frac{\pi}{2}$,即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$;当$x\to+\infty$时,对应的函数值 arctan x 无限接近于$\frac{\pi}{2}$,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$;因此根据定义 3,$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。

同理可得$\lim\limits_{x\to\infty}\text{arccot}\, x$ 也不存在。

由定义 3、例 4 和例 5,得到下面定理:

定理 1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ **的充要条件是** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

常用的函数极限:$\lim\limits_{x\to\infty}C=C$,$\lim\limits_{x\to+\infty}C=C$,$\lim\limits_{x\to-\infty}C=C$

二、当 $x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$,$x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$的极限

$x\to x_0^+$ 表示 x 从 x_0 的右侧无限接近于 x_0;

$x\to x_0^-$ 表示 x 从 x_0 的左侧无限接近于 x_0;

$x\to x_0$ 表示 x 从 x_0 的左、右两侧无限接近于 x_0。

1. 当 $x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$ 时,函数 $f(x)$的极限

定义 4　**设 $y=f(x)$ 在$\mathring{U}(x_0)$ 内有定义,若当 x 从x_0 的右侧无限接近于 x_0 时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的右极限。记作$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)\to A$。**

定义 5　**设 $y=f(x)$ 在$\mathring{U}(x_0)$ 内有定义,若当 x 从x_0 的左侧无限接近于 x_0 时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的左极限。记作$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,或当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)\to A$。**

左、右极限统称为单侧极限。

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$,求$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$。

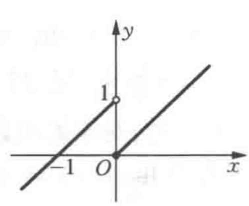


图 1-7

解　由函数图像(见图 1-7)可以观察到,当 x 从右侧无限接近于 0 时,对应的函数值 $f(x)$无限接近于 0,所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$;当 x 从左侧无限接近于 0 时,对应的函数值 $f(x)$无限接近于 1,所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$。

2. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$的极限

定义 6　**设 $y=f(x)$ 在$\mathring{U}(x_0)$ 内有定义,若当 x 从x_0 的左、右两侧无限接近于 x_0 时,对应的函数值 $f(x)$ 都无限接近于某一常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限。记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,或当$x\to x_0$ 时,$f(x)\to A$。**