新课标**高考数学**
第二轮复习用书

2015

洞穿高考
数学辅导丛书

30分钟拿下高考数学 选择题、填空题

理科版

本书系统总结选择题和填空题的6种解题方法与技巧，精编30套限时训练题，帮助考生30分钟拿下高考数学选择题和填空题。

方法篇与实战篇配有视频讲解，在线观看：www.chinamath.net

主编●张永辉

清华大学出版社

洞穿高考

数学辅导丛书

30分钟拿下高考数学选择题、填空题

理科版

主编●张永辉

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

《30分钟拿下高考数学选择题、填空题》是为快速提高考生的高考数学解题水平和技巧而编写的高考第二轮复习用书.本书根据高考数学复习大纲(和考试说明)以及历年高考数学真题和模拟题,归纳、总结出高考数学选择题、填空题的考点,遴选出最能代表该考点的试题,并高度概括该考点的通解通法与特殊技巧.本书不仅可以快速提高考生们分析和解决问题的能力,同时还可以提高考生们洞察试题变化的能力.本书通过方法篇、题组篇与实战篇的训练,帮助考生在考场高效地解答选择题、填空题.

《30分钟拿下高考数学选择题、填空题》分为理科版与文科版两个分册,本书是理科版,适合高中理科考生参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

30分钟拿下高考数学选择题、填空题:理科版/张永辉主编.—北京:清华大学出版社,2015

(洞穿高考数学辅导丛书)

ISBN 978-7-302-38547-9

Ⅰ.①3… Ⅱ.①张… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第273645号

责任编辑:陈仕云
封面设计:刘 超
版式设计:文森时代
责任校对:马军令
责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社
网 址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084
社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:清华大学印刷厂
经 销:全国新华书店
开 本:203mm×280mm 印 张:13.5 字 数:426千字
版 次:2014年1月第1版 印 次:2015年1月第1次印刷
印 数:1~4000
定 价:29.80元

产品编号:061468-01

本书编委会

主　编　张永辉

副主编　余　臣　张宏卫　王晓明　张喜金　董家兴

张作卿　李拴柱　颜亚冰　彭剑平　高艳山

孙光磊　孟令修　梁雅眉　董安林　安　英

白立星

编　委　肖贵钧　徐贵冬　徐宣庆　李　鹏　陈　杰

吉海波　佟宝忠　熊建军　臧敦亮　张胜利

陈汉邦　陈治海　李小华　樊德国

做最好的高考数学书

——“洞穿高考数学辅导丛书”总序

我一直认为，数学是高考中最难的一科．高考成功一定要经过努力，但努力不一定能成功，选择永远比努力更重要．从最新数学高考的命题特点来看，试题明显从过去单纯地强调简单的观察能力和特殊技巧，转变为现在深刻地强调要把握数学问题的原理及解题的通法通性．于是，打造最好的高考数学书成为时代赋予我们的使命．

笔者出版了多本高考数学专著，历经八载，与国内权威出版社合作，联合打造了中国数学教辅研发品牌——“洞穿高考数学辅导丛书”．本丛书摒弃了目前教辅图书的编写模式，每一个例题、变式题、巩固训练题都经过编者的精心研究，从备战高考的三个复习阶段入手，从不同角度给所有学生全程、全方位的辅导．笔者多年致力于高考数学教学与研究，通过对优秀考生的调查统计，发现大多数考生在复习中经历了一个“发现自我，改造自我，突破自我”的过程，即不知道自己做什么（全面复习）——知道自己做什么（重点突破）——知道自己不知道什么（冲刺高考）——全知道（决胜高考），而我们寻求的正是这种应对考试的复习之道．

第一轮复习的重点是“三基”训练，目标是全面、扎实、系统、灵活，即夯实基础，全面复习．学生应该重点建构自己的知识体系，弄懂高考考什么，怎么考？**与第一轮复习配套的用书为《新课标高考数学题型全归纳》**，采用“题型＋模型”的编写模式．全书以题型（理科 202 个、文科 173 个）为主线，总结了高考所有重要考点和题型的解题思路及科学有效的套路方法．对于重要的题型，我们给出“分析”，引导学生自己找到解题的突破口，还给出“评注”来升华解题方法，从而达到归纳解题方法的目的．有些评注写得入木三分，直接揭示了高考题母题的来源．书中的“模型”部分，更是将许多相关问题一网打尽，使考生能以不变应万变，达到“无招胜有招”的境界．

第二轮复习的重点是专题强化训练，目标在于提高学生解决高考解答题的能力，重点突破．考生要集中练习高考的核心考点，不求面面俱到，但是一定要把重要考点各个击破，真正做到触类旁通、闻一知十．**与第二轮复习配套的用书为《30 分钟拿下高考数学选择题、填空题》、《洞穿高考数学解答题核心考点》**．这两本辅导书从高考数学选择题、填空题与解答题的实战角度进行编写，对于选择题、填空题，我们的目标是 30 分钟轻取 70 分．《30 分钟拿下高考数学选择题、填空题》一书通过方法篇、题组篇与实战篇的训练，帮助考生在考场上高效地解答选择题、填空题；《洞穿高考数学解答题核心考点》一书帮助考生快速掌握“秒杀”高考解答题的方法与技巧．为了提高考生解决解答题的能力，我们从历年高考真题和众多模拟题中筛选核心考点，归纳总结出各种解题方法和技巧，以求达到口述解答题的从容境界．

经过两轮复习后，很多考生仍然感觉做题时心中没谱，那么，这就需要第三轮复习：模拟、强化．这是第一、二轮复习的提升，不仅要检验对各考点的掌握情况，更重要的是对知识的融会贯通、查漏补缺、答题技巧的训练乃至对学生智能、情感和意志等进行调节．因此，我们悉心研发了**第三轮复习用书——《高考数学临门一脚》**．本书整合了全国各地权威数学名家的研究

成果，研发出密押三套卷，将最前沿的考试方向与命题趋势以密押题的形式呈现给大家，密押卷的考点相互补充，形成整体，是一份临考前不可或缺的重要材料，希望同学们在使用时一定要做到“卷做三遍，题后三思”.

总之，这三轮复习用书功能各异，但合起来又构成一个有机整体. 这就是我们倾心为考生打造的成功计划的三部曲，按照我们的计划，一步一个脚印，结果定在掌控中！希望中国千万名高考考生通过使用这四本书，考进自己理想的大学，这是我们最开心、最幸福的事情. 希望大家能从中得到启发，并肯定我们的成果。当然，我们也会继续努力前进，“做最好的高考数学书”是我们不变的信念，永恒的追求.

为了满足理科和文科考生的学习需要，上述每一个阶段的复习用书均分为理科版和文科版两个分册，欢迎广大考生订购. 同时，第一阶段复习用书《新课标高考数学题型全归纳》还有配套电子课件免费赠送，为教学提供了便利，让老师备课变得轻松而高效！

高考长路，拼搏依旧，温柔依旧——因为有我们相伴！

温家宝同志曾以诗明志，今天，我们把这句诗转赠给紧张备考的高三学子，也送给辛勤教学、默默无闻、无私奉献的高中毕业班园丁们.

“华山再高，顶有过路.”

张永辉

2014 年 10 月

前　言

高考数学选择题、填空题在全国卷和各省市自主命题的试卷中所占分数的比重是比较大的(46.7%)，因此在短时间(30～45 分钟)内准确无误地解答这两类题是数学考高分的关键.

为了帮助同学们赢得时间，取得考试成功，我们编写了《30 分钟拿下高考数学选择题、填空题》，相信本书对开拓思路、启迪思维、提高应试技巧等诸方面将起到良师益友的作用.

本书特点：

(1)介绍了编者团队在长期教学、高考辅导中归纳、总结出的解答选择题、填空题的六种方法和技巧.

(2)根据高考数学复习大纲(和考试说明)以及历年高考数学真题和模拟题，归纳总结出高考数学选择题、填空题的常考题型，并高度概括该题型的通解通法与特殊技巧. 在例题的选取上经过反复琢磨，从题库中遴选出最能代表该题型的试题. 例题的解答有四部分：分析，解析，评注，变式. 目的在于：不仅提高同学们分析和解决问题的能力，同时还使他们初步学会洞察题型变化的能力. 变式试题，不是简单地修改题目的已知条件，而是从本质上探究试题的内在联系，达到举一反三、触类旁通的效果.

(3)在本书实战篇中，我们精心研发了 30 套选择题、填空题的限时训练，能够帮助考生最大限度地训练并提高解答选择题、填空题的能力.

书中的不足之处在所难免，敬请数学同仁及广大考生指正.

张永辉

2014 年 10 月

目　录

总　述

著名物理学家阿基米德曾说过:"给我一个支点,我能撬动地球".无独有偶,在中国武学中也有"四两拨千斤"的说法,这里运用的都是技巧、巧劲.同样,高考题的解法也有一定的技巧.今天,我们就一起来探索高考选择题和填空题的解题技巧,体验数学研究的魅力.通过系统的学习和训练,彻底解决高考数学选择题、填空题之痛!我们的口号是:无需忍痛,分必得!

一、选择题的题型特点

1.选择题在高考试卷中的地位

选择题通常作为数学试卷的第一道大题,基本上有12道小题(全国卷的选择题题量主要以8道、10道或12道三种形式为主),分值60分,约占总分的40%,也就是说,选择题占据了试卷的"半壁江山",其分量是绝不容忽视的.解选择题的快慢和成功率的高低对于能否进入做题的最佳状态及整个考试的成败起着举足轻重的作用.如果选择题做得比较顺手,会使考生自信心增强,有利于后续试题的解答.

2.选择题的题型特点

数学选择题属于客观性试题,是单项选择题,选项中只有一个结论是正确的,而且以"四选一"为其主要形式.它与填空题、解答题的不同主要体现在以下三个方面:

(1)立意新颖、构思精巧、迷惑性强,内容相关相近,真伪难分.

(2)技巧性高、灵活性大、概念性强,题材含蓄多变.

(3)知识面广、切入点多、综合性强,内容跨度较大.

由于解选择题不要求表述得出结论的过程,只要求用各种方法迅速、准确地作出判断,因而选择题的解法有其独特的规律和技巧.因此,我们应熟练掌握选择题的解法,以"准确,迅速,多快好省"为宗旨,坚决反对"小题大做".

3.选择题的解答策略与原则

"选择"是一个心智范畴的概念,据有关专家测试,选择题的正常解答时间应在3分钟左右,每人按自己的定位高低、解题情况和得分重点适当调整完成.正是由于选择题与其他题型的特点不同,其解答方法也有很大区别.总体来讲,解数学选择题的基本思路有两个:一是直接法;二是间接法.

选择题解法的基本思想包括以下两点:

(1)充分利用题干和选择支提供的信息,快速、准确地作出判断,是解选择题的基本策略.

(2)既要看到通常各类常规题的解题思想,原则上都可以指导选择题的解答;更应看到,根据选择题的特殊性,必定存在若干常规题的特殊解法.

选择题的基本做法有以下四类:

(1)仔细审题,吃透题意.第一,关键是将相关概念、公式、定理等基础知识集中整理.凡在题目中出现的概念、公式、性质等内容都是平时理解、记忆、运用的重点,也是我们在解选择题时首先需要回忆的对象.第二,发现题材中的"机关",即题目中的一些隐含条件,往往是该题价值之所在,也是我们失分的"隐患".

(2)反复析题,去伪存真.析题的过程就是根据题意,联系知识,形成解题思路的过程.由于选择题各选项具有相近、相关的特点.对于一些似是而非的选项,可以结合题目,将选项逐一比较,用一些"虚拟式"的"如果"加以分析与验证,从而提高解题的正确率.

(3)抓住关键,全面分析.通过审题、析题找到题目的关键所在是十分重要的,从关键处入手,找突破口,联系知识进行全面的分析形成正确的解题思路,就可以化难为易,化繁为简,从而解出正确的答案.

(4)反复检查,认真核对.在审题、析题的过程中,由于思考问题不全面,往往会出现偏差.因而,再认真核对一次,也是解选择题必不可少的步骤.

另外,从近几年高考试题的特点来看,选择题以认识型和思维型的题目为主,减少了繁琐的运算,注重考查考生的逻辑思维与直觉思维能力,以及观察、分析、比较、选择简捷运算方法的能力,且许多题目既可用通性通法直接求解,也可用特殊方法求解.所以做选择题时最忌讳以下两点:

(1)见到题就埋头运算,按解答题的思路去求解,得到结果再去和选项对照,这样不仅花费时间较长,有时还可能得不到正确答案.

(2)随意"蒙"一个答案,准确率只有25%!但经过筛选、淘汰,正确率就可以大幅度提高.

总之,解选择题的基本策略是"不择手段".

二、填空题的题型特点

1.填空题在高考试卷中的地位

数学填空题是一种只要求写出结果,不要求写出解答过程的客观性试题.填空题的类型一般可分为:完形填空题、多选填空题、条件与结论开放的填空题.这说明了填空题是高考数学命题改革的试验田,创新型的填空题将会不断出现.近几年各省、市高考填空题的数量和分值都有增加的趋势,分值最低到16分,最高到70分,就分值来看是不可轻视的.

2.填空题的题型特点

填空题和选择题同属客观性试题,它们有许多共同特点:形态短小精悍,考查目标集中,答案简短、明确、具体,不必填写解答过程,评分客观、公正、准确等.

其主要特点有以下几类:

(1)填空题没有备选选项.因此,解答时既有不受诱误

干扰的好处,但也缺乏提示帮助的不足,对考生的独立思考和求解能力要求更高.长期以来,填空题的正确率一直低于选择题,这就是一个重要的原因.

(2)填空题的考查方法灵活.填空题的结构,往往是在一个正确的命题或断言中抽去其中的一些内容(既可以是条件,也可以是结论),留下空位,让考生独立填上.

(3)填空题的考点少,目标集中.否则,试题的区分度差,其考试的信度和效度都难以得到保证.这是因为:若填空题的考点多,解答过程长,影响结论的因素多,那么对于答错的考生便难以知道其出错的真正原因,不易判断考生的真正水平.

3.填空题的解答策略与原则

填空题绝大多数是计算型(尤其是推理型)和概念(性质)判断型的试题,应答时必须按规则进行切实的计算或者合乎逻辑的推理和判断,几乎没有间接的方法可言,更是无从猜答,所以在解填空题时,一般要有合理的分析和判断,要求推理、运算的每一步骤都正确无误,并且还要将答案表达得准确、完整.合情推理、优化思路、少算多思是快速、准确地解答填空题的基本要求,简而言之,解填空题的基本原则是"小题不能大做",基本策略就是"准"、"巧"、"快".其基本方法一般有:直接求解法、特殊数列法、图形特殊位置法(特殊点法、特殊方程法、特殊模型法)和等价转化法等.另外,在解答填空题时还应注意以下几点:

(1)结果要书写规范,如分式的分母不含根式,特殊角的函数要写出函数值,近似计算要达到准确度等要求.

(2)结果要完整,如函数的解析式要写出定义域,应用题不要忘记写单位,求轨迹要排除不满足条件的点等.

(3)结果要符合教材要求,如求不等式的解要写成集合或区间的形式,不能只用一个不等式表示.

(4)做完题后要仔细检查,看有没有遗漏的,可用不同的方法再做一遍,验证答案.

总之,解填空题的基本原则是"直扑结果".

第一部分　方法篇

方法一　推演法

方法概述

有些选择题、填空题是由计算题、应用题、证明题、判断题改编而成的．这类题目可直接从题设的条件出发，利用已知条件、相关公式、公理、定理、法则、特殊结论等，通过准确的运算、严谨的推理、合理的验证得出正确的结论．

推演法就是将选择题、填空题作为解答题来解决的一种常见的基本方法，低档选择题、填空题可用此法迅速求解．通过阅读条件主动地反映性质，再将得到的性质结合相关结论进行直截了当的推理与计算，然后将推理和计算的结果作为答案．这一方法要求对于数学的概念、定义、定理和公式成立的充分条件和必要条件的理解要尽可能地全面、透彻、深入；对于数学公式的推导、应用、计算要尽可能地熟练、迅速、准确．

典例精讲

典例一　推演法在不等式中的应用举例

例 1.1　设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2$，若对任意的 $x\in[t,t+2]$，不等式 $f(x+t)\geqslant 2f(x)$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是（　　）．

A. $[2,+\infty)$　　B. $[-\sqrt{2},-1]\cup[0,\sqrt{2}]$

C. $[\sqrt{2},+\infty)$　　D. $(0,\sqrt{2}]$

【分析】根据函数奇偶性求解函数解析式，且奇函数有恒等式 $f(-x)=-f(x)$．

【解析】设 $x<0$，则 $-x>0$，$f(-x)=(-x)^2=x^2$，又 $f(x)$ 为奇函数，$f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)=-f(-x)=-x^2$ $(x<0)$．因此 $f(x)=x|x|$，$x\in\mathbf{R}$．易知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增．由 $f(x+t)\geqslant 2f(x)=f(\sqrt{2}x)\Rightarrow x+t\geqslant\sqrt{2}x$，即 $t\geqslant(\sqrt{2}-1)x$，对 $x\in[t,t+2]$ 恒成立 $\Rightarrow t\geqslant(\sqrt{2}-1)(t+2)$ $\Rightarrow t\geqslant\sqrt{2}$．故选 C．

【评注】不等式恒成立条件下求参数的取值范围问题，利用等价转化思想转化为函数的单调性和最值问题．

变式 1　已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增．若实数 a 满足 $f(\log_2 a)+f(\log_{\frac{1}{2}}a)\leqslant 2f(1)$，则实数 a 的取值范围是（　　）．

A. $[1,2]$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

C. $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$　　D. $(0,2]$

变式 2　若定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数 $y=f(x)$ 对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，不等式 $f(x^2-2x)\leqslant -f(2y-y^2)$ 恒成立，且 $y=f(x-1)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称，则当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$\dfrac{y}{x}$ 的取值范围是________．

变式 3　已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，当 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(\cos 2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>f(0)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是________．

例 1.2　若对任意正数 x,y，都有 $a\leqslant\dfrac{x+y}{x+2\sqrt{2xy}}$，则实数 a 的最大值是________．

【分析】本题采用推演法求解，将 $a\leqslant\dfrac{x+y}{x+2\sqrt{2xy}}$ 对 $x,y\in(0,+\infty)$ 恒成立转化为 $a\leqslant\left(\dfrac{x+y}{x+2\sqrt{2xy}}\right)_{\min}$．

【解析】因为 $\dfrac{x+y}{x+2\sqrt{2xy}}\geqslant\dfrac{x+y}{x+(x+2y)}=\dfrac{1}{2}$，当且仅当 $x=2y$ 时取等号，所以 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$，则实数 a 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$．

【评注】本题利用基本不等式，巧妙地求出 $\dfrac{x+y}{x+2\sqrt{2xy}}$ $(x,y\in(0,+\infty))$ 的最小值．

变式 1　设 $a+b=2$，$b>0$，则当 $a=$________时，$\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{|a|}{b}$ 取得最小值．

例 1.3　若 $x,y\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，$a\in\mathbf{R}$，且满足方程：$x^3+\sin x-2a=0$ 和 $4y^3+\sin y\cos y+a=0$，则 $\cos(x+2y)=$________．

【解析】由 $x^3+\sin x-2a=0$，$4y^3+\sin y\cos y+a=0$，得 $x^3+\sin x=2a$，$(2y)^3+\sin 2y=-2a$，设函数 $f(x)=x^3+\sin x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，则 $f'(x)=3x^2+\cos x>0$，故函数 $f(x)$ 为单调递增的奇函数．由 $f(x)=-f(2y)=f(-2y)$ 可知 $x=-2y$，即 $x+2y=0$，故 $\cos(x+2y)=1$．

变式 1　已知 $x,y\in(0,+\infty)$，$a\in\mathbf{R}$，若 $x^3+\ln x+2a=0$，$4y^3+\ln\sqrt{y}+\ln\sqrt{2}+a=0$，则 $\dfrac{y}{x}=$（　　）．

A. 2　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

典例二　推演法在三角函数中的应用举例

例 1.4　若 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1}{3}$，

$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=(\quad)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{9}$

【分析】建立未知角与已知角的联系，$\alpha+\frac{\beta}{2}=\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$，利用推演法求解.

【解析】因为 $\alpha+\frac{\beta}{2}=\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$，

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$.

又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，

则 $\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，

因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

故 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$. 故选 C.

【评注】本题是求解角的三角函数值问题，将未知角与已知角建立联系，利用三角恒等变换公式转化为已知角的三角函数值求解.

典例三　推演法在解析几何中的应用举例

例 1.5　已知抛物线 $C:y^2=8x$ 与点 $M(-2,2)$，过抛物线 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则 $k=(\quad)$.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【分析】将直线方程与抛物线方程联立，利用“设而不求”的方法求解.

【解析】解法一：由抛物线的焦点 $F(2,0)$，

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)(k\neq0)$.

联立 $\begin{cases}y=k(x-2)\\y^2=8x\end{cases}$，消去 x，得 $y^2-\frac{8}{k}y-16=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{8}{k}$，$y_1y_2=-16$，

又 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+2,y_1-2)\cdot(x_2+2,y_2-2)=$

$\left(\frac{y_1}{k}+4,y_1-2\right)\cdot\left(\frac{y_2}{k}+4,y_2-2\right)=\frac{k^2+1}{k^2}y_1y_2+\frac{4-2k}{k}(y_1+y_2)+20=\frac{4k^2-16k+16}{k^2}=0$，得 $k=2$.

故选 D.

解法二：设 $l_{AB}:y=k(x-2)$，由题意知 $k\neq0$，则 $x=\frac{1}{k}y+2$，令 $t=\frac{1}{k}$，则 $x=ty+2$，联立直线 AB 与抛物线 C 的方程得 $\begin{cases}x=ty+2\\y^2=8x\end{cases}$，消 x 得关于 y 的一元二次方程 $y^2+8ty-16=0$，显然 $\Delta=64t^2+64>0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=8t$，$y_1y_2=-16$，又 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+2,y_1-2)\cdot(x_2+2,y_2-2)=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=\frac{y_1^2y_2^2}{64}+2\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{8}\right)+4+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4$

$=\frac{(y_1y_2)^2}{64}+\frac{(y_1+y_2)^2}{4}+\frac{y_1y_2}{2}-2(y_1+y_2)+8=16t^2-16t+4=0$，解得 $t=\frac{1}{2}$，故 $k=2$. 故选 D.

【评注】“设而不求”在直线与圆锥曲线位置关系问题中经常考查，需重点掌握. 另外，选择适当的直线方程与圆锥曲线方程联立，可有效减少计算量，以提高解题效率. 对于本题，建议使用解法二中的直线方程与抛物线方程进行联立.

变式 1　椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，点 P 在 C 上，且直线 PA_2 的斜率的取值范围是 $[-2,-1]$，那么直线 PA_1 的斜率取值范围是(　　).

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{3}{8},\frac{3}{4}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2},1\right]$　　D. $\left[\frac{3}{4},1\right]$

强化训练 1

1. 若 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的单位向量，且 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\quad)$.

A. 1　　B. -4　　C. $-\frac{7}{2}$　　D. $\frac{7}{2}$

2. 若 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边 a，b，c 满足 $(a+b)^2-c^2=4$，且 $C=60^\circ$，则 $ab=(\quad)$.

A. $\frac{4}{3}$　　B. $8-4\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{3}$

3. 已知函数 $f(x)=ax^3+b\sin x+4\ (a,b\in\mathbf{R})$，$f(\lg(\log_2 10))=5$，则 $f(\lg(\lg 2))=(\quad)$.

A. -5　　B. -1

C. 3　　D. 4

4. 阅读如图 1-1 所示的程序框图，若输出的 S 值等于 16，那么判断框内应填写的条件是(　　).

A. $i>5$?　　B. $i>6$?

C. $i>7$?　　D. $i>8$?

5. 如图 1-2 所示，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=1$. 若二面角 $C-AB-C_1$ 的大小为 60°，则点 C 到平面 C_1AB 的距离为(　　).

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

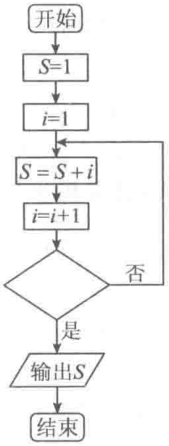


图 1-1

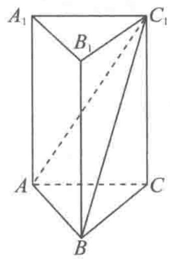


图 1-2

6. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 且倾斜角为 $60°$ 的直线 l 与抛物线在第一、四象限分别交于 A,B 两点，则 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的值=(　　).

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

7. 设 a 为函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x(x\in\mathbf{R})$ 的最大值，则二项式 $\left(a\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中含 x^2 项的系数是(　　).

A. 192　　B. 182　　C. -192　　D. -182

8. 已知集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 0\}$，$B=\{x|ax+b\cdot 2^x-1<0$，$0\leqslant a\leqslant 2,1\leqslant b\leqslant 3\}$，$a,b\in\mathbf{R}$，则 $A\cap B=\varnothing$ 的概率为(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{16}$　　D. $\frac{15}{16}$

9. 已知集合 $A=\{(x,y)|x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)|x=m,y=3m^2+12,m\in\mathbf{Z}\}$. 若存在实数 a,b 使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 成立，称点 (a,b) 为"Γ 点"，则"Γ 点"在平面区域 $C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 108\}$ 内的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 无数个

10. 已知集合 $M=\{1,2,3\}$，$N=\{1,2,3,4\}$，定义函数 $f:M\to N$. 若点 $A(1,f(1))$，$B(2,f(2))$，$C(3,f(3))$，$\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 D，且 $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{DB}(\lambda\in\mathbf{R})$，则满足条件的函数 $f(x)$ 有(　　).

A. 6 个　　B. 10 个

C. 12 个　　D. 16 个

11. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2ax+4>0$ 恒成立；命题 q：$f(x)=(3-2a)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，则实数 a 的取值范围是________.

12. 已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$，若 $f(1)=-5$，则 $f(f(5))=$________.

13. 已知 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$，则 $\frac{\tan x}{\tan 2x}$ 的值为________.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$B=45°$，$b=\sqrt{2}$，$a=1$，则 $A=$________.

15. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1+a_2=4$，$a_9+a_{10}=36$，则 $S_{10}=$________.

16. 已知 $x,y,z\in(0,+\infty)$，$x-2y+3z=0$，则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为________.

17. 设函数 $f(x)=x^2-1$ 对一切 $x\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$，有 $f\left(\frac{x}{m}\right)-4m^2f(x)\leqslant f(x-1)+4f(m)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是________.

18. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$M,N$ 是椭圆的左、右顶点，P 是椭圆上任意一点，且直线 PM,PN 的斜率分别为 $k_1,k_2(k_1k_2\neq 0)$，若 $|k_1|+|k_2|$ 的最小值为 1，则椭圆的离心率为________.

19. 已知直线 $y=a$ 交抛物线 $y=x^2$ 于 A,B 两点. 若该抛物线上存在点 C，使得 $\angle ACB$ 为直角，则实数 a 的取值范围为________.

20. 已知以 $y=\pm\sqrt{3}x$ 为渐近线的双曲线 D：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，若 P 为双曲线 D 右支上任意一点，则 $\frac{|PF_1|-|PF_2|}{|PF_1|+|PF_2|}$ 的取值范围是________.

21. 将 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数随机排成一列，得到的一列数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列. 定义 $\tau(a_1,a_2,\cdots,a_n)=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|$ 为排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的波动程度. 当 $n=2012$ 时，则 $\tau(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的最小值为________；当 $n=2k(k\geqslant 2,k\in\mathbf{N}^*)$ 时，则 $\tau(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的最大值为________.

22. 若一个三位数的十位数字比个位数字和百位数字都大，则称这个数为"组合数"，现从 1,2,3,4,5,6 这 6 个数中任取 3 个数，组成无重复数字的三位数，其中"组合数"有________个.

23. 在平面直角坐标系中，定义横坐标及纵坐标为整数的点为格点，如果直线 $y=kx+b$ 与圆 $x^2+y^2=5$ 的公共点均为格点，那么这样的直线有________条.

24. 设 r,s,t 为整数，集合 $\{x|x=2^r+2^s+2^t,0\leqslant t<s<r\}$ 中的数由小到大组成的数列 $\{a_n\}$ 为 $7,11,13,14,\cdots$，则 a_{36} 的值是________.

方法二　图像法

方法概述

图像法也叫图示法，它体现了数形结合的思想. 图像法是利用函数图像或数学结果的几何意义，将数的问题，如解方程的根(位置或个数)、解不等式、求最值、求取值范围等，与相应图形结合起来，利用几何图形的直观性，再辅以简单计算，确定正确答案的方法.

每年高考试题中均有选择题、填空题是以应用此法求解为落脚点考查学生对数形结合思想的应用意识. 采用本方法解题往往既简捷又迅速，如：①借助集合中的韦恩图明

确集合的交、并、补的关系；②借助三角函数线和三角函数图像，解决有关三角的问题；③借助直线和曲线的位置关系，解决某些方程、不等式的问题．合理应用数形结合思想往往可以起到事半功倍的效果．

典例精讲

典例一　图像法在方程根的问题中的应用举例

例 2.1　方程 $2^{|x|}=2\cos x$ 的解的个数是（　　）．

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 无穷多个

【解析】在同一直角坐标系中作出函数 $y_1=2^{|x|}$，$y_2=2\cos x$ 的图像，如图 1-3 所示，即得交点个数为 2．所以方程 $2^{|x|}=2\cos x$ 的解的个数是 2．故选 C．

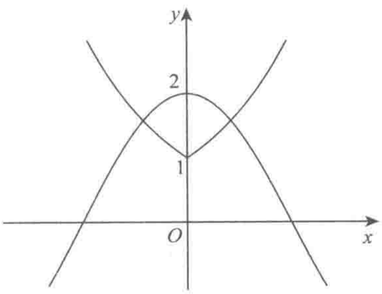


图 1-3

【评注】此方程为超越方程，不易求出其解，采用一般方法很可能无功而返．而根据函数具体模型画出函数图像，利用数形结合的思想很容易求出解的个数，简便、易解、易懂．

变式 1　方程 $\lg x+x=3$ 的解所在的区间为（　　）．

A. (0,1)　　B. (1,2)　　C. (2,3)　　D. $(3,+\infty)$

变式 2　已知函数 $f(x)=a^x+x-b$ 的零点 $x_0\in(n,n+1)$ $(n\in\mathbf{Z})$，其中常数 a,b 满足 $2^a=3$，$3^b=2$，则 n 的值是（　　）．

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

例 2.2　直线 $y=kx$ 与曲线 $y=e^{|\ln x|}-|x-2|$ 有 3 个公共点时，则实数 k 的取值范围是________．

【解析】由函数 $y=e^{|\ln x|}-|x-2|$ 得，

当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$，$x-2<0$，$y=e^{-\ln x}+x-2=\dfrac{1}{x}+x-2$；

当 $1\leqslant x<2$ 时，$\ln x\geqslant0$，$x-2<0$，$y=e^{\ln x}+x-2=2x-2$；

当 $x\geqslant2$ 时，$\ln x>0$，$x-2\geqslant0$，$y=e^{\ln x}-(x-2)=2$．

则函数 $y=f(x)$ 的图像如图 1-4 所示．当直线 $y=kx$ 与曲线 $y=e^{|\ln x|}-|x-2|$ 有三个交点时，$k\in(0,1)$．

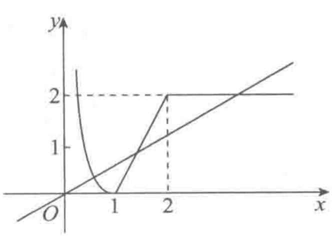


图 1-4

变式 1　定义 $a\otimes b=\sqrt{ab-1}-ka-2$，则方程 $x\otimes x=0$ 有唯一解时，实数 k 的取值范围是（　　）．

A. $[-2,-1]\cup[1,2]$　　B. $\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$

C. $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$　　D. $[-\sqrt{5},-1]\cup[1,\sqrt{5}]$

典例二　图像法在不等式问题中的应用举例

例 2.3　当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，不等式 $\sin\dfrac{\pi x}{2}\geqslant kx$ 成立，则实数 k 的取值范围是________．

【分析】利用图像法求解本题．不等式 $\sin\dfrac{\pi x}{2}\geqslant kx$ 等价于函数 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 的图像在直线 $y=kx$ 上方（可有公共点）．

【解析】如图 1-5 所示，作函数 $y_1=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 和 $y_2=x$ 的图像，两个图像的交点恰好为 (0,0) 和 (1,1)．当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，要使 $\sin\dfrac{\pi x}{2}\geqslant kx$，需使 $k\leqslant1$，故 k 的取值范围为 $(-\infty,1]$．

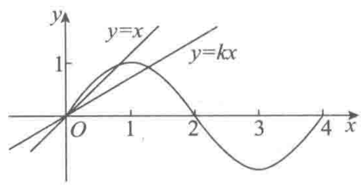


图 1-5

【评注】本题可归结为不等式恒成立条件下求参数的取值范围问题，利用数形结合思想求解这类问题特别奏效．

变式 1　如果对任意实数 x，不等式 $|x+1|\geqslant kx$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是________．

变式 2　函数 $y=f(x)$ 的图像如图 1-6 所示，在区间 $[a,b]$ 上可找到 $n(n\geqslant2)$ 个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$，则 n 的取值范围是（　　）．

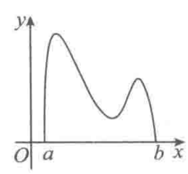


图 1-6

A. $\{2,3\}$　　B. $\{2,3,4\}$

C. $\{3,4\}$　　D. $\{3,4,5\}$

典例三　图像法在平面向量问题中的应用举例

例 2.4　已知向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{e}$，$|\boldsymbol{e}|=1$，若对任意 $t\in\mathbf{R}$，恒有 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$ 成立，则（　　）．

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{e}$　　B. $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

C. $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$　　D. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

【分析】显然对 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$ 进行平方处理会比较麻烦，我们联想到向量的几何表示，即用图像法解本题．

【解析】如图 1-7 所示，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}$，则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}$，因为对任意的 $t\in\mathbf{R}$，有 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$，所以当 $t_1>1$ 时，设 $\overrightarrow{OB_1}=t_1\boldsymbol{e}$，则 $\boldsymbol{a}-t_1\boldsymbol{e}=\overrightarrow{B_1A}$，即 $|\overrightarrow{B_1A}|\geqslant|\overrightarrow{BA}|$；当 $t_2<1$

时，设$\overrightarrow{OB_2}=t_2\boldsymbol{e}$，则 $\boldsymbol{a}-t_2\boldsymbol{e}=\overrightarrow{B_2A}$，则$|\overrightarrow{B_2A}|\geqslant|\overrightarrow{BA}|$。综上，$|\overrightarrow{BA}|$是点 A 到直线 OB 的最短距离，即 $BA\perp OB$，所以 $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$. 故选 C.

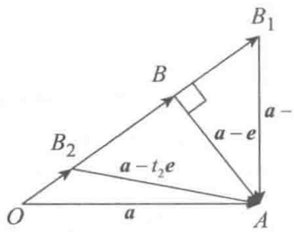


图 1-7

【评注】利用向量运算的几何表示，结合三角形法则、平行四边形法则，可将代数运算转化为几何运算求解.

变式 1 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq 0,\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b})$满足$|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 的夹角为 120°，则$|\boldsymbol{a}|$的取值范围是________.

典例四 图像法在解析几何问题中的应用举例

例 2.5 点 P 在直线 $l:y=x-1$ 上，若存在过点 P 的直线交抛物线 $y=x^2$ 于 A,B 两点，且$|PA|=|AB|$，则称点 P 为"τ 点"，那么下列结论中正确的是( ).

A. 直线 l 上的所有点都是"τ 点"

B. 直线 l 上仅有有限个点是"τ 点"

C. 直线 l 上的所有点都不是"τ 点"

D. 直线 l 上有无穷多个点(点不是所有的点)是"τ 点"

【解析】解法一(极限法)：如图 1-8 所示，在直线 l 上任取一点 P，作 $y=x^2$ 的切线 PT 及交线 PAB，当直线 PAB 绕点 P 旋转时，易知$|AB|$的长度变化区间为$(0,+\infty)$，故一定存在一条直线，使得$|PA|=|AB|$，故直线 l 上的所有点都是"τ 点". 故选 A.

解法二(推演法)：设 $A(m,n)$，$P(x,x-1)$，则 $B(2m-x,2n-x+1)$，因为 A,B 在 $y=x^2$ 上，所以$\begin{cases}n=m^2\\2n-x+1=(2m-x)^2\end{cases}$(＊). 消去 n，整理得关于 x 的方程 $x^2-(4m-1)x+2m^2-1=0$，因为 $\Delta=(4m-1)^2-4(2m^2-1)=8m^2-8m+5>0$ 恒成立，所以方程(＊)恒有实数根. 故选 A.

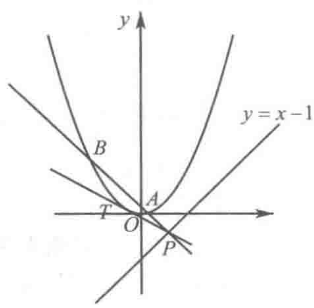


图 1-8

变式 1 已知圆 $M:(x-1)^2+(y-3)^2=4$，过 x 轴上一点 $P(a,0)$存在一直线与圆 M 相交，交点分别为 A,B，且满足$|PA|=|AB|$，则点 P 的横坐标 a 的取值范围为________.

典例五 图像法在线性规划问题中的应用举例

例 2.6 设二元一次不等式组$\begin{cases}x+2y-19\geqslant 0\\x-y+8\geqslant 0\\2x+y-14\leqslant 0\end{cases}$所表示的平面区域为 M，使函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$的图像经过区域 M 的 a 的取值范围是( ).

A. $[1,3]$ B. $[2,\sqrt{10}]$ C. $[2,9]$ D. $[\sqrt{10},9]$

【分析】这是目标函数中参数的取值范围问题，先画出平面区域，确定最优解，从而求出 a 的范围.

【解析】作出不等式组的平面区域 M，如图 1-9 所示，

由$\begin{cases}x+2y-19=0\\2x+y-14=0\end{cases}$，得 $A(3,8)$.

由$\begin{cases}x+2y-19=0\\x-y+8=0\end{cases}$，得$B(1,9)$. 由图可知，若 $y=a^x$ 的图像过区域 M，则当 $y=a^x$ 的图像过点 $A(3,8)$，即 $a^3=8$，$a=2$时，a 最小；当 $y=a^x$ 的图像过点 $B(1,9)$，即 $a=9$ 时，a 最大. 所以 $2\leqslant a\leqslant 9$. 故选 C.

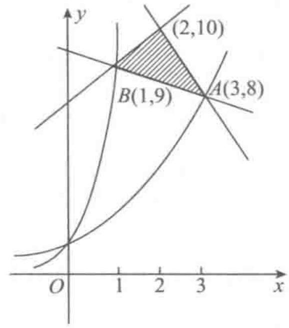


图 1-9

变式 1 设 O 为坐标原点，点 $M(2,1)$，点 $N(x,y)$满足$\begin{cases}x\leqslant 3\\x-y+6\geqslant 0\\x+y\geqslant 0\end{cases}$，则$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$的取值范围是________.

例 2.7 已知 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant 0\\\log_2 x,x>0\end{cases}$，则函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点个数是( ).

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【分析】对于复合函数的零点问题，可利用换元法与图像法综合求解.

【解析】令 $t=f(x)\in\mathbf{R}_f$，则 $y=f(t)+1$. 由图 1-10(1)知，$f(t)=-1$，得 $t=-2$ 或$\frac{1}{2}$；对应图 1-10(2)知，$x_1=-3$，$x_2=\frac{1}{4}$，$x_3=-\frac{1}{2}$，$x_4=\sqrt{2}$. 因此函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点个数是 4. 故选 A.

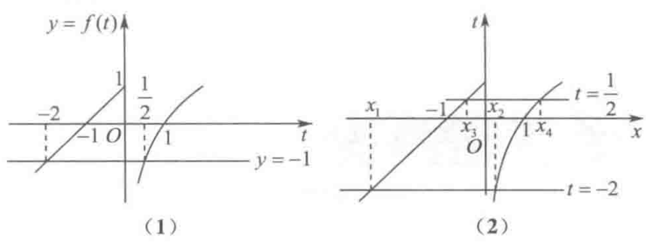


图 1-10

【评注】本题通过换元后，得到函数 $f(x)=t$ 与 $y=f(t)+1$，同时作出 $t=f(x)$ 与 $y=f(t)$ 的图像. 由 $f(t)=-1$ 得 t 的值（或范围），再由 $t=f(x)$ 确定 x 的值（或范围），这是复合函数求解零点个数问题的通法，应该掌握.

变式 1 若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有极值点 x_1,x_2，且 $f(x_1)=x_1$，则关于 x 的方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 的不同实根个数是（　　）.

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

例 2.8 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-2(a\neq 0)$ 有且仅有两个不同的零点 x_1,x_2，则（　　）.

A. $a<0$ 时，$x_1+x_2<0$，$x_1\cdot x_2>0$

B. $a<0$ 时，$x_1+x_2>0$，$x_1\cdot x_2<0$

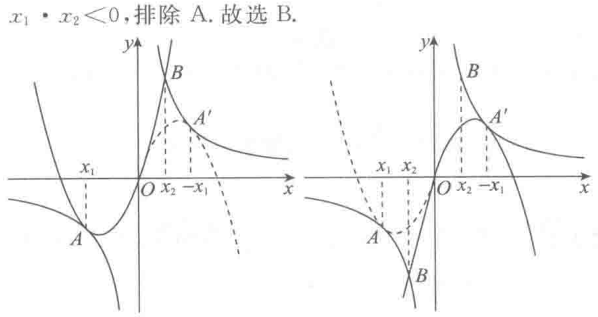
C. $a>0$ 时，$x_1+x_2<0$，$x_1\cdot x_2>0$

D. $a>0$ 时，$x_1+x_2>0$，$x_1\cdot x_2<0$

【解析】因为 $f(0)=-2$，故 0 不是函数 $f(x)$ 的零点，则方程 $ax^3+bx^2-2=0$ 有两个不等实根等价于方程 $ax^2+bx=\frac{2}{x}$ 有两个不等实根，令 $g(x)=ax^2+bx$，$h(x)=\frac{2}{x}$.

①当 $a>0$ 时，如图 1-11(1) 所示，抛物线 $y=g(x)$ 过点 $O(0,0)$，且对称轴 $x=-\frac{b}{2a}<0$，设抛物线 $y=g(x)$ 与双曲线切点为 A，交点为 B. 因为 $y=\frac{2}{x}$ 是奇函数，将 $y=g(x)$ 的图像作关于 O 点的中心对称变换，易知 $A'(-x_1,-y_1)$. 即 $x_1+x_2<0$，$x_1\cdot x_2<0$，排除 C，D；

②当 $a<0$ 时，如图 1-11(2) 所示，因为抛物线 $y=g(x)$ 过 $O(0,0)$ 点，且对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>0$，同理知，$x_1+x_2>0$，$x_1\cdot x_2<0$，排除 A. 故选 B.



(1)　　(2)

图 1-11

变式 1 设函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=ax^2+bx(a,b\in\mathbf{R},a\neq 0)$，若 $y=f(x)$ 的图像与 $y=g(x)$ 的图像有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则下列判断中正确的是（　　）

A. $a<0$ 时，$x_1+x_2<0$，$y_1+y_2>0$

B. $a<0$ 时，$x_1+x_2>0$，$y_1+y_2<0$

C. $a>0$ 时，$x_1+x_2<0$，$y_1+y_2<0$

D. $a>0$ 时，$x_1+x_2>0$，$y_1+y_2>0$

强化训练 2

1. 函数 $f(x)=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是（　　）.

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,0)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,2)$

2. 下列区间中，函数 $f(x)=|\ln(2-x)|$ 在其上为增函数的区间是（　　）.

A. $(-\infty,1]$　　B. $\left[-1,\frac{3}{4}\right]$

C. $\left[0,\frac{3}{2}\right)$　　D. $[1,2)$

3. 在直角坐标系 xOy 中，如果两点 $A(a,b)$，$B(-a,-b)$ 在函数 $y=f(x)$ 的图像上，那么称 $[A,B]$ 为函数 $f(x)$ 的一组关于原点的中心对称点（$[A,B]$ 与 $[B,A]$ 看作一组）. 函数 $g(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x & (x\leqslant 0)\\ \log_4(x+1) & (x>0)\end{cases}$ 关于原点的中心对称点的组数为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，两定点 A,B 满足 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则点集 $\{P\mid\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\lambda|+|\mu|\leqslant 1,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\}$ 所表示的区域的面积是（　　）.

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{3}$

5. 已知函数 $f(x)=x^2+1$ 的定义域为 $[a,b](a<b)$，值域为 $[1,5]$，则在平面直角坐标系内，点 (a,b) 的运动轨迹与直角坐标轴围成的图形的面积为（　　）.

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2

6. 已知函数 $f(x)=x^2-2(a+2)x+a^2$，$g(x)=-x^2+2(a-2)x-a^2+8$. 设 $H_1(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，$H_2(x)=\min\{f(x),g(x)\}$（$\max\{p,q\}$ 表示 p,q 中的较大值，$\min\{p,q\}$ 表示 p,q 中的较小值）. 记 $H_1(x)$ 的最小值为 A，$H_2(x)$ 的最大值为 B，则 $A-B=$（　　）.

A. $a^2-2a-16$　　B. $a^2+2a-16$

C. -16　　D. 16

7. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$，$g(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{4x},x>0\\ -x^2-6x-8,x\leqslant 0\end{cases}$，则方程 $g[f(x)]-a=0(a\in\mathbf{R}^+)$ 的解的个数不可能为（　　）.

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

8. 设 A,B 是两个集合，定义集合运算 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$，若 $M=\{x\mid|x+1|\leqslant 2\}$，$N=\{y\mid y=\sin x,x\in\mathbf{R}\}$，则 $M-N=$________.

9. 设集合 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{m}{2}\leqslant(x-2)^2+y^2\leqslant m^2,x,y\in\mathbf{R}\right\}$，$B=\{(x,y)\mid 2m\leqslant x+y\leqslant 2m+1,x,y\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 m 的取值范围是________.

10. 若不等式 $\sqrt{4x-x^2}>(a-1)x$ 的解集为 A，且 $A\subseteq\{x\mid 0<x<1\}$，则实数 a 的取值范围为________.

11. 已知变量 x,y 满足 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant 0\\ x\leqslant 2\\ x+y-2\geqslant 0\end{cases}$，则 $\frac{x+y+3}{x+2}$ 的取值范围是________.

12. 已知点 M 是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 上一点，F 为抛物线的焦点，A 在圆 $C:(x-1)^2+(y-4)^2=1$ 上，则 $|MA|+|MF|$

的最小值为________.

13. 抛物线 $y^2=2x$ 上的动点 A,B 满足 $|AB|=3$，则 AB 的中点横坐标的最小值为________.

14. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在非零实数 l 使得对任意 $x\in M(M\subseteq D)$，有 $x+l\in D$，且 $f(x+l)\geqslant f(x)$，则称 $f(x)$ 为 M 上的 l 高调函数. 如果定义域为 $[-1,+\infty)$ 的函数 $f(x)=x^2$ 为 $[-1,+\infty)$ 上的 m 高调函数，那么实数 m 的取值范围是________；

如果定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=|x-a^2|-a^2$，且 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 4 高调函数，那么实数 a 的取值范围是________.

方法三　构造法

方法概述

在解决某些数学问题时，常会采用这样的方法：通过对条件和结论充分细致地分析，抓住问题的本质特征，联想熟知的数学模型，然后变换命题，恰当地构造辅助元素，它可以是一个图形，一个函数，一个方程，一个等价命题等，以此架起一座连接条件和结论的桥梁，从而使问题得以解决. 这种解题的数学方法，我们称之为构造法.

典例精讲

典例一　构造法在平面向量问题中的应用举例

例 3.1　在△ABC 中，M 是 BC 的中点，$AM=3$，$BC=10$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

【分析】用已知向量来表示所求向量.

【解析】因为点 M 是 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.　①

又 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.　②

由①^2－②^2 得 $4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4|\overrightarrow{AM}|^2-|\overrightarrow{CB}|^2=-64$，

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-16$.

【评注】本题作为填空题，可利用中线向量的结论：如图 1-12 所示，在△ABC 中，点 M 为线段 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{MB}^2=\overrightarrow{AM}^2-\frac{\overrightarrow{CB}^2}{4}$.

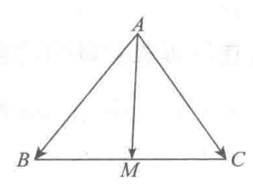


图 1-12

变式 1　在△ABC 中，P_0 是边 AB 上一定点，满足 $P_0B=\frac{1}{4}AB$，且对于边 AB 上任一点 P，恒有 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，则(　　).

A. $\angle ABC=90°$　　B. $\angle BAC=90°$

C. $AB=AC$　　D. $AC=BC$

变式 2　点 P 是棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}$ 的取值范围是(　　).

A. $\left[-1,-\frac{1}{4}\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right]$

C. $[-1,0]$　　D. $\left[-\frac{1}{2},0\right]$

典例二　构造法在线性规划问题中的应用举例

例 3.2　已知 α,β 是三次函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+2bx$ 的两个极值点，且 $\alpha\in(0,1)$，$\beta\in(1,2)$，则 $\frac{b-2}{a-1}$ 的取值范围是(　　).

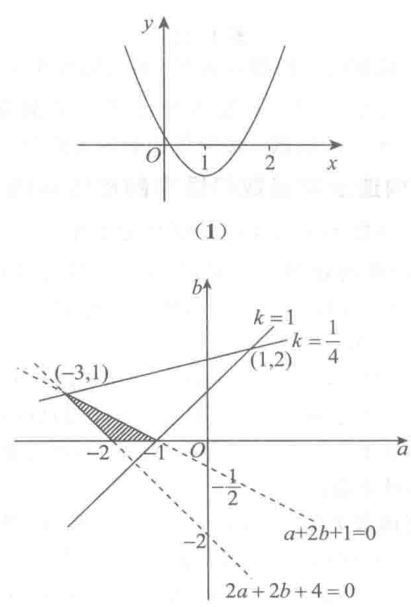
A. $\left(\frac{1}{4},1\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

【分析】目标函数 $\frac{b-2}{a-1}$ 的几何意义为动点 (a,b) 与定点 $(1,2)$ 所在直线的斜率.

【解析】依题意，由 α,β 是三次函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+2bx$ 的两个极值点，故方程 $f'(x)=0$ 的两根为 α,β，即方程 $x^2+ax+2b=0$ 的两根为 α,β，且 $\alpha\in(0,1)$，$\beta\in(1,2)$，则函数 $f'(x)=x^2+ax+2b$ 的图像如图 1-13(1) 所示，因此有不等式组 $\begin{cases}f(0)=2b>0\\f(1)=1+a+2b<0\\f(2)=4+2a+2b>0\end{cases}$，其所表示的平面区域如图 1-13(2) 所示，$\frac{b-2}{a-1}$ 表示动点 $P(a,b)$ 与定点 $(1,2)$ 所在直线的斜率，因此其取值范围为 $\left(\frac{1}{4},1\right)$.

故选 A.



(1)

(2)

图 1-13