河南省数学教学指导委员会推荐用书

高等数学

王天泽　主编

科学出版社

河南省数学教学指导委员会推荐用书

高等数学

王天泽　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是河南省数学教学指导委员会推荐用书. 本书根据地方院校高等数学课程教学大纲的基本要求, 结合作者多年的教学研究和教学经验编写而成, 内容包括函数与极限、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、常微分方程、向量代数与解析几何、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、无穷级数和数学实践与数学建模初步.

全书注重体现高等教育大众化背景, 顺应教育教学改革新常态, 着力构建完备的数学知识体系架构, 强调数学思想方法渗透, 在基本概念讲解、基本内容处理、典型例题引入、数学能力和素质提升等方面,力求做到结构完整、脉络清晰, 便于读者理解和掌握.

本书可作为高等院校非数学专业理工类、经济管理类、医药类、农林类等专业的高等数学课程教材, 也可供自学者阅读和有关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王天泽主编. —北京: 科学出版社, 2015. 8
河南省数学教学指导委员会推荐用书
ISBN 978-7-03-045360-0

I. ①高… II. ①王 III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 186470 号

责任编辑: 昌 盛 胡海霞 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 霍 兵 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2015 年 8 月第一次印刷 印张: 30 1/2
字数: 614 000

定价: 56.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《高等数学》编委会

主　编　王天泽

编　委　（按姓名笔画排序）

王玉柱　方建印　刘法贵　李建民　宋长明

张之正　张宏伟　徐少贤　郭晓丽

前　　言

高等数学是高等院校的一门重要的基础课程, 它对培养学生的数学素养、数学能力和运用数学理论解决实际问题有着重要的作用, 也是后续专业课程学习的知识基础、思想基础和方法基础.

以微积分为核心的高等数学是人类伟大的智慧结晶, 它包含了处理连续量的许多基本理论和科学思维方法. 建立微积分基本概念、基本理论和基本方法, 构建完整的微积分理论体系架构, 展现微积分思想方法, 是高等数学的重要任务之一.

数学科学是为了解决工程技术、经济社会等领域的实际问题. 华罗庚曾说: "宇宙之大, 粒子之微, 火箭之速, 化工之巧, 地球之变, 日用之繁, 无处不用数学." 学生学习数学, 不仅是为了以后的工作需要储备数学知识, 也是为了在学习过程中提高自己基本的数学素质和数学能力, 学会应用数学解决实际问题, 更是为了在今后工作中能够创造出新的知识和方法. 因此, 提升学生实践能力、创新能力, 培养学生准确运用数学知识解决具体问题的基本素质, 是高等数学的重要任务之二.

本书围绕两大任务, 并顺应大众化教育和现代教育理念的变革, 适应素质教育积极稳步推进的形势, 集作者多年的教育教学研究和实践经验编著而成. 编著所遵循的基本原则: 一是适应大众化教育, 体现学以致用的精神; 二是保证体系结构完整严密, 体现数学逻辑严谨之美; 三是适宜于教师教学、学生学习, 体现以教助学、以学促教; 四是着力提升学生数学思想与方法、数学意识与能力, 开阔学生数学视野, 体现数学思想方法之美; 五是尊重学生全面发展和个性化发展的需要, 体现数学启迪智慧之伟大.

在教学内容上, 首先保证高等数学的基本教学要求, 其次努力吸收近期一些优秀教材教学改革的成功经验, 同时也融合不同类型、不同层次高校先进的教学理念、教学经验和教学模式, 注重文理渗透, 体现知识综合, 着力实践创新.

在教学体系上, 继承传统教材结构严谨、逻辑清晰、体系完备的特点, 做到突出重点、解决难点、围绕主线、抓住关键, 同时, 作者对体系进行整合、取舍和精简, 并保证理论体系之完整、逻辑推理之严密、思想方法之精妙.

在知识深化上, 每章都配有思考与拓展为题的内容, 给出延伸阅读的一些材料, 希望不仅拓展读者数学视野, 而且以此展现高等数学与其他知识体系的广泛联系, 增强学生不断思考的探索精神与创新意识.

在数学实践上, 本书安排 "数学实践与数学建模初步" 一章, 择优选择一些在管理与经济、工程与技术、社会与生活等领域中常见的实践例子, 不仅让读者感受

数学、感知数学、感悟数学, 也让读者充分理解数学应用之广.

在信息技术融合上, 本书第 9 章安排一节内容列举了 Matlab 语言在数学中应用的一些例子, 以体现计算机语言在处理数学问题上的强大功能. 同时也告诉我们, 数学中一些复杂的计算、复杂函数图形的描绘等问题已经不再是教师教学和学生学习的难点. 正基于此, 本书没有在诸如无理函数定积分这些复杂计算方面占用过多的篇幅.

在能力提升上, 本书不仅照顾到学生实践能力和创新能力的提升, 也照顾到了学生自主学习能力的提升. 例如, 在例题编排上, 一部分例题仅提供了解题的基本思路和方法, 而没有对详细的解题过程进行过多的阐释. 读者通过完善、补充这些例题中省略的解题过程, 以期提升学生自主学习的能力.

在习题编排上, 每节后的习题一般是用于巩固基本知识, 检验学生学习和掌握基本理论、基本概念和基本方法等情况, 每一章后的复习题 (这类题目应在学完相关章节内容后再予以考虑) 用于深化基本知识, 有巩固数学基础知识和体现数学知识点拓展综合的考虑.

本书由刘法贵初步取材. 第 1 章至第 9 章分别由李建民、张之正、宋长明、王玉柱、徐少贤、方建印、郭晓丽、张宏伟、刘法贵执笔. 全书统稿由王天泽完成, 定稿由刘法贵完成.

华北水利水电大学数学与信息科学学院张愿章、李亦芳、程鹏、彭高辉、赵中建和岳红伟等同志审阅了本书的部分习题答案或提示, 公共数学教研室的同志们对本书的编排和内容组织, 提出了很好的意见和建议, 作者在此表示真挚的感谢.

科学出版社昌盛编辑和胡海霞编辑为本书的出版付出了很多心血, 也提出了很好且有价值的修改意见, 作者在此表示衷心的感谢.

本书参考了国内外出版的一些教材和参考书, 在此, 对文献作者表示真诚的感谢.

限于作者水平, 加之时间仓促, 不当之处在所难免, 恳请批评指正.

作　者

2015 年 5 月

目　录

第 1 章　函数与极限

微积分学中的基本概念, 如连续、导数和积分等, 都是以极限理论为基础的. 极限思想方法是高等数学中的一个重要思想方法, 极限理论推动了数学理论的发展, 促使许多实际问题得以解决. 在近代数学许多分支中, 一些重要的概念与理论都是极限和连续函数概念的推广、延拓和深化. 因此, 理解和掌握极限思想和方法是学好微积分的关键.

1.1　函　　数

1.1.1　变量的变化范围

我们知道, 在实际问题中有变量与常量之分. 所谓变量, 是指一个可以被赋予任何值的量. 如果它的值是固定的, 称为**常量**(也称为常数). 这里需要将任意常数和绝对常数区分开来. 在具体问题研究中, 任意常数可以保持任何给定的值, 而绝对常数则在所给定的问题中都保持相同的值. 例如, 半径为 r 的圆周长为 $2\pi r$, 这里 r 为任意常数, 而 2 和 π 为绝对常数.

对于任何变量都有一定的变化范围, 例如, 电子产品的使用寿命、天气的温度等. 变量的变化范围也就是变量的取值范围, 通常用区间或邻域表示, 它们是实数集合 $\mathbb{R}$ 的一个子集. 区间是最熟悉的常见的实数轴上的点集, 它是以下几种点集的总称. 设 $a,b\in\mathbb{R}$, 定义以下的区间集合.

(1) 闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$, 一个点 a 组成的集合 $\{a\}=[a,a]$ 也是闭区间.

(2) 开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$.

(3) 半开半闭区间 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$(左开右闭), $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$(左闭右开).

(4) 对 $\delta\in\mathbb{R}$, 且 $\delta>0$, 称区间

$$(a-\delta,a+\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$$

为点 a 的 δ **邻域**, 记为 $U(a,\delta)$. 如果不强调 δ, 可记为 $U(a)$. 称

$$(a-\delta,a+\delta)-\{a\}=\{x|0<|x-a|<\delta\}$$

为点 a 的**去心邻域**, 记为 $\hat{U}(a,\delta)$(也记为 $\hat{U}(a)$).

以上区间称为**有限区间**, 类似可定义以下**无限区间**.

(5) $(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\},(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$.

(6) $[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\},(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}$.

(7) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$, 此即全体实数集合 $\mathbb{R}$. 一般地, 把全体实数集 $\mathbb{R}$ 与 $-\infty,+\infty$ 组成的集合称为**扩充实数集** $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

对以上区间 (2), (5) 和 (7), 它们有一共性, 即其中任意一点 x_0, 存在邻域 $U(x_0)$, 使得 $U(x_0)$ 完全属于该区间. 一般地, 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的一个子集, 如果对任意 $x_0\in E$, 存在邻域 $U(x_0)\subset E$, 则称集合 E 为**开集**. 特别地, $U(x_0)$ 是一开集. 如果 F 是 $\mathbb{R}$ 的子集, 存在开集 E, 使 $F=\mathbb{R}-E$, 则称 F 为**闭集**. 显然, 开集的余集为闭集, 闭集的余集为开集; 开区间为开集, 闭区间为闭集. 开集、闭集的概念超出本书范围, 请读者自行查阅相应参考书.

在本书中, 符号 $\mathbb{Q},\mathbb{N},\mathbb{C}$ 分别表示有理数集合、正整数集合和复数集合.

1.1.2　函数的定义

定义 1.1　设有两个非空实数集合 A 与 B, 如果有这样一个对应法则 f, 使得按照该法则, 对于 A 中的每一个数 x, 在 B 中都有唯一的数 y 与之对应, 那么称 f 是定义在 A 上且取值于 B 的**函数**. 其中 A 称为函数 f 的**定义域**, 记为 $D(f)$; 与 x 对应的 y 记为 $y=f(x)$; 集合 $\{y|y=f(x),x\in D(f)\}$ 称为函数 f 的**值域**, 记为 $R(f)$. 显然 $R(f)\subseteq B$. 若视 x,y 为变量, 则 x 为**自变量**, y 为**因变量**.

函数关系的实质是变量之间的一种确定的对应关系 (图 1.1), 其含义是指对定义域内每一个 x, 按对应法则 f 总有唯一确定的 y 与之对应. 因此, 单值性是函数的一个重要特征. 此外, 函数的定义与自变量及因变量用什么字母表示无关. 例如, 函数 $y=f(x)$ 同样可以用 $s=f(t)$ 表示.

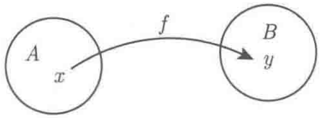

图 1.1

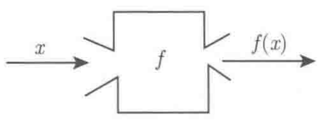

图 1.2

定义域与对应法则是确定函数的两个因素, 这是函数最本质的特征 (图 1.2). 因此, 对两个函数来说, 当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时, 表示同一个函数. 例如, 函数 $f(x)=|x|$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是同一个函数, 而函数 $f(x)=1$ 与函数 $g(x)=\dfrac{x}{x}$ 就不是同一个函数, 因为后者要求 $x\neq 0$.

从几何上看, 在平面直角坐标系中, 点集 $\{(x,y)|y=f(x),x\in A\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图像, 它通常构成一条曲线, $y=f(x)$ 称为这条曲线的方程.

函数的表示法包括公式法、图像法、表格法和描述法, 但在理论研究和后续学

习中, 公式法是比较常用的一种表示法, 图像法是一种比较直观的几何表示法, 表格法和描述法是比较少用的特殊表示方法. 需要注意的是, 函数用公式法表示, 但没有明确其定义域, 此时我们约定该函数的定义域就是使该公式有意义的一切实数. 例如, $y=\sqrt{x}$ 意味着 $x \geqslant 0$.

公式法表示函数, 有时未必能用一个式子表示. 例如, **符号函数**

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

再如, Dirichlet[①](狄利克雷) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}\quad (\mathbb{Q}\text{ 为有理数集合}).$$

称这种形式的函数为**分段函数**. 分段函数是一个函数, 在其定义域的不同部分用不同的式子表示其对应规律. 但要注意“伪”分段函数. 例如,

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

不是分段函数. 因为 $f(x)=1-|1-x|=1-\sqrt{(x-1)^2}$ $(x\in[0,2])$.

另外, Dirichlet 函数说明了一个重要的问题: 函数的图像并不是都可以在直角坐标系中刻画出来的, 也就是说图像法不能表达所有的函数.

例 1.1　解答下列问题:

(1) 在区间 $(-\infty,0)$ 内, 函数 $g(x)=-\sqrt{1-x}$ 与 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x^3}}{x}$ 是否为同一个函数?

(2) 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域;

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 求 $f(x-a)+f(x+a)$ $(a>0)$ 的定义域.

解　(1) 由于

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2(1-x)}}{x}=\frac{|x|\sqrt{1-x}}{x}.$$

注意到 $x<0$, 知 $f(x)=-\sqrt{1-x}$. 所以, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在给定的定义域内是同一个函数.

(2) 要使函数有意义, x 需满足

$$4-x^2\geqslant 0,\quad x-1>0.$$

① Dirichlet (1805—1859), 德国数学家.

解之, 得 $1 < x \leqslant 2$. 于是, 函数的定义域为 $\{x|x \in (1,2]\}$.

(3) 根据题意, 有 $0 \leqslant x-a \leqslant 1, 0 \leqslant x+a \leqslant 1$, 解之, 得

$$a \leqslant x \leqslant 1+a, \quad -a \leqslant x \leqslant 1-a.$$

因为 $a > 0$, 所以当 $1-a \geqslant a \left(0 < a \leqslant \dfrac{1}{2}\right)$ 时, $a \leqslant x \leqslant 1-a$. 当 $1-a < a$ 时, 无解. 于是, 所求定义域为

$$[a, 1-a], \quad 0 < a \leqslant \frac{1}{2}; \quad \varnothing, \quad a > \frac{1}{2}.$$

例 1.2 设 $x \in \mathbb{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[\pi] = 3, [-2.1] = -3, [4] = 4$. 记

$$y = [x], \quad x \in \mathbb{R}$$

所表示的函数为**取整函数**. 显然, 取整函数满足不等式

$$x - 1 < [x] \leqslant x.$$

对于函数 $f(x)$, 如果其定义域为正整数集合 $\mathbb{N}$, 可简记为 $a_n = f(n)\ (n = 1, 2, \cdots)$, 称为**数列**

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

用 $\{a_n\}$ 表示 (为简单起见, 以后仍记为 a_n). 其中 a_n 表示数列的通项, n 表示数列的项数.

1.1.3 几类特殊的函数

1. *有界函数*

设 I 为函数 $f(x)$ 的定义区间①, 如果存在常数 M_1, M_2, 使得对任意的 $x \in I$,

$$M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2,$$

则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**有界函数**. 其中 M_1 和 M_2 分别称为函数 $f(x)$ 的**下界**和**上界**. 如果这样的 M_1 和 M_2 至少有一个不存在, 则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**无界函数**. 换句话说, 对任意给定的数 M, 总有一点 $x_0 \in I$, 使得

$$f(x_0) < M \quad 或 \quad f(x_0) > M.$$

例如, 函数 $y = \sin x$ 在其定义域 $\mathbb{R}$ 内有界, 因为对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $|\sin x| \leqslant 1$. 从几何上看, 有界函数的图像介于直线 $y = M_1$ 和 $y = M_2$ 之间.

① 定义区间是函数的定义域内除孤立点之外的区间, 它是定义域的一部分.

综上, 注意两点:①函数 $f(x)$ 的有界性与给定的区间有关, 函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上有界, 但在区间 $(-1,1)$ 上无界; ②函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界, 也有下界.

例 1.3　判定函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上的有界性.

解　取 $x_0=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (n\in\mathbb{N})$, 经计算, 得 $f(x_0)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$. 因此, 对任意的 $M>0$, 只要 $n>M$, 都有 $f(x_0)>M$. 因此函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无界.

2. 单调函数

设 I 为函数 $f(x)$ 的定义区间, 如果对任意的 $x_1,x_2\in I$, 当 $x_1<x_2$ 时, 总有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是区间 I 上的**单调增加函数**, 简称**单增函数**; 当 $x_1<x_2$ 时, 总有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是区间 I 上的**单调减少函数**, 简称**单减函数**. 单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**.

如果对任意的 $x_1,x_2\in I$, 当 $x_1<x_2$ 时, 总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 f 是区间 I 上的**单调不减函数**(**单调不增函数**).

例如, 函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加, 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调减少, 但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数; 函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调函数.

对数列 $a_n=f(n)$ 而言, 相应地, 可以给出有界数列、无界数列、单调数列的概念.

3. 奇函数和偶函数

若函数 $f(x)$ 在定义域内满足

$$f(x)=-f(-x),$$

则称函数 $f(x)$ 是**奇函数**; 若满足

$$f(x)=f(-x),$$

则称函数 $f(x)$ 是**偶函数**.