

河南省数学教学指导委员会推荐用书

高等数学

王天泽 主编



科学出版社

河南省数学教学指导委员会推荐用书

高等数学

王天泽 主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是河南省数学教学指导委员会推荐用书。本书根据地方院校高等数学课程教学大纲的基本要求,结合作者多年的教学研究和教学经验编写而成,内容包括函数与极限、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、常微分方程、向量代数与解析几何、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、无穷级数和数学实践与数学建模初步。

全书注重体现高等教育大众化背景,顺应教育教学改革新常态,着力构建完备的数学知识体系架构,强调数学思想方法渗透,在基本概念讲解、基本内容处理、典型例题引入、数学能力和素质提升等方面,力求做到结构完整、脉络清晰,便于读者理解和掌握。

本书可作为高等院校非数学专业理工类、经济管理类、医药类、农林类等专业的高等数学课程教材,也可供自学者阅读和有关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王天泽主编.——北京:科学出版社,2015.8

河南省数学教学指导委员会推荐用书

ISBN 978-7-03-045360-0

I. ①高… II. ①王 III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 186470 号

责任编辑:昌盛 胡海霞/责任校对:邹慧卿

责任印制:霍兵/封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

保定市中华美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2015 年 8 月第一次印刷 印张:30 1/2

字数:614 000

定价:56.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《高等数学》编委会

主 编 王天泽

编 委 (按姓名笔画排序)

王玉柱 方建印 刘法贵 李建民 宋长明

张之正 张宏伟 徐少贤 郭晓丽

前 言

高等数学是高等院校的一门重要的基础课程,它对培养学生的数学素养、数学能力和运用数学理论解决实际问题有着重要的作用,也是后续专业课程学习的知识基础、思想基础和方法基础。

以微积分为核心的高等数学是人类伟大的智慧结晶,它包含了处理连续量的许多基本理论和科学思维方法。建立微积分基本概念、基本理论和基本方法,构建完整的微积分理论体系架构,展现微积分思想方法,是高等数学的重要任务之一。

数学科学是为了解决工程技术、经济社会等领域的实际问题。华罗庚曾说:“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,日用之繁,无处不用数学。”学生学习数学,不仅是为了以后的工作需要储备数学知识,也是为了在学习过程中提高自己基本的数学素质和数学能力,学会应用数学解决实际问题,更是为了在今后工作中能够创造出新的知识和方法。因此,提升学生实践能力、创新能力,培养学生准确运用数学知识解决具体问题的基本素质,是高等数学的重要任务之二。

本书围绕两大任务,并顺应大众化教育和现代教育理念的变革,适应素质教育积极稳步推进的形势,集作者多年的教育教学研究和实践经验编著而成。编著所遵循的基本原则:一是适应大众化教育,体现学以致用用的精神;二是保证体系结构完整严密,体现数学逻辑严谨之美;三是适宜于教师教学、学生学习,体现以教助学、以学促教;四是着力提升学生数学思想与方法、数学意识与能力,开阔学生数学视野,体现数学思想方法之美;五是尊重学生全面发展和个性化发展的需要,体现数学启迪智慧之伟大。

在教学内容上,首先保证高等数学的基本教学要求,其次努力吸收近期一些优秀教材教学改革的成功经验,同时也融合不同类型、不同层次高校先进的教学理念、教学经验和教学模式,注重文理渗透,体现知识综合,着力实践创新。

在教学体系上,继承传统教材结构严谨、逻辑清晰、体系完备的特点,做到突出重点、解决难点、围绕主线、抓住关键,同时,作者对体系进行整合、取舍和精简,并保证理论体系之完整、逻辑推理之严密、思想方法之精妙。

在知识深化上,每章都配有思考与拓展为题的内容,给出延伸阅读的一些材料,希望不仅拓展读者数学视野,而且以此展现高等数学与其他知识体系的广泛联系,增强学生不断思考的探索精神与创新意识。

在数学实践上,本书安排“数学实践与数学建模初步”一章,择优选择一些在管理与经济、工程与技术、社会与生活等领域中常见的实践例子,不仅让读者感受

数学、感知数学、感悟数学,也让读者充分理解数学应用之广.

在信息技术融合上,本书第 9 章安排一节内容列举了 Matlab 语言在数学中应用的一些例子,以体现计算机语言在处理数学问题上的强大功能.同时也告诉我们,数学中一些复杂的计算、复杂函数图形的描绘等问题已经不再是教师教学和学生学习的难点.正基于此,本书没有在诸如无理函数定积分这些复杂计算方面占用过多的篇幅.

在能力提升上,本书不仅照顾到学生实践能力和创新能力的提升,也照顾到了学生自主学习能力的提升.例如,在例题编排上,一部分例题仅提供了解题的基本思路和方法,而没有对详细的解题过程进行过多的阐释.读者通过完善、补充这些例题中省略的解题过程,以期提升学生自主学习的能力.

在习题编排上,每节后的习题一般是用于巩固基本知识,检验学生学习和掌握基本理论、基本概念和基本方法等情况,每一章后的复习题(这类题目应在学完相关章节内容后再予以考虑)用于深化基本知识,有巩固数学基础知识和体现数学知识点拓展综合的考虑.

本书由刘法贵初步取材.第 1 章至第 9 章分别由李建民、张之正、宋长明、王玉柱、徐少贤、方建印、郭晓丽、张宏伟、刘法贵执笔.全书统稿由王天泽完成,定稿由刘法贵完成.

华北水利水电大学数学与信息科学学院张愿章、李亦芳、程鹏、彭高辉、赵中建和岳红伟等同志审阅了本书的部分习题答案或提示,公共数学教研室的同志们对本书的编排和内容组织,提出了很好的意见和建议,作者在此表示真挚的感谢.

科学出版社昌盛编辑和胡海霞编辑为本书的出版付出了很多心血,也提出了很好且有价值的修改意见,作者在此表示衷心的感谢.

本书参考了国内外出版的一些教材和参考书,在此,对文献作者表示真诚的感谢.

限于作者水平,加之时间仓促,不当之处在所难免,恳请批评指正.

作 者

2015 年 5 月

目 录

前言

第 1 章 函数与极限	1
1.1 函数	1
1.1.1 变量的变化范围	1
1.1.2 函数的定义	2
1.1.3 几类特殊的函数	4
1.2 函数的极限	12
1.2.1 数列的极限	12
1.2.2 函数的极限	20
1.2.3 函数极限的性质及其运算法则	23
1.3 无穷大量与无穷小量	31
1.3.1 无穷大量与无穷小量的定义	31
1.3.2 无穷小量之间的比较	32
1.4 连续函数	35
1.4.1 连续函数的定义	35
1.4.2 连续函数的性质	36
1.4.3 函数间断点的分类	38
1.5 思考与拓展	41
复习题 1	46
第 2 章 一元函数微分学及其应用	49
2.1 函数的导数	49
2.1.1 实例	49
2.1.2 导数的定义	50
2.1.3 基本初等函数的导数	53
2.1.4 高阶导数	55
2.2 求导的基本方法	57
2.2.1 导数的四则运算法则	57
2.2.2 四类特殊函数的求导法则	59
2.2.3 对数求导法与指数求导法	64
2.3 函数的微分	66

2.3.1	微分的定义	66
2.3.2	线性近似	69
2.4	微分中值定理	70
2.4.1	Rolle 中值定理	70
2.4.2	Lagrange 中值定理	72
2.4.3	Cauchy 中值定理	75
2.4.4	Taylor 公式	76
2.5	未定式极限	82
2.5.1	$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型	82
2.5.2	其他未定式极限	84
2.6	函数性态的研究	87
2.6.1	函数的单调性	87
2.6.2	函数的极值	90
2.6.3	函数的凸性与渐近线	93
2.6.4	弧微分与曲线的曲率	96
2.7	思考与拓展	100
	复习题 2	109
第 3 章	一元函数积分学及其应用	112
3.1	定积分的概念及性质	112
3.1.1	实例	112
3.1.2	定积分的定义	113
3.1.3	定积分的性质	116
3.2	不定积分与微积分基本定理	120
3.2.1	原函数与不定积分	120
3.2.2	微积分基本定理	123
3.3	不定积分的积分方法	127
3.3.1	换元积分法	127
3.3.2	分部积分法	129
3.3.3	四类特殊函数的不定积分	131
3.3.4	定积分的计算	137
3.4	广义积分	142
3.4.1	无限区间上的广义积分	142
3.4.2	有限区间上无界函数的广义积分	143
*3.4.3	广义积分的敛散判定法	146
*3.4.4	Γ 函数	147

3.5 定积分的应用	149
3.5.1 微元法	149
3.5.2 几何上的应用	150
3.5.3 物理上的应用	155
3.5.4 积分不等式	158
3.6 思考与拓展	167
复习题 3	172
第 4 章 常微分方程	175
4.1 常微分方程的基本概念	175
4.1.1 实例	175
4.1.2 基本概念	176
4.2 一阶常微分方程	178
4.2.1 可分离变量方程	178
4.2.2 齐次方程	179
4.2.3 一阶线性微分方程	182
4.2.4 Bernoulli 方程	184
4.3 高阶微分方程	186
4.3.1 可降阶的高阶常微分方程	186
4.3.2 n 阶线性常微分方程	188
4.3.3 Euler 方程	190
4.4 二阶常系数非齐次常微分方程	192
4.4.1 二阶齐次常系数微分方程	192
4.4.2 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型	193
4.4.3 $f(x) = e^{\lambda x}(P_s(x)\cos\omega x + Q_t(x)\sin\omega x)$ 型	194
4.5 微分方程应用	196
4.5.1 几何上的应用	197
4.5.2 物理上的应用	198
4.6 思考与拓展	201
复习题 4	203
第 5 章 向量代数与解析几何	206
5.1 向量代数	206
5.1.1 向量的概念	206
5.1.2 向量的线性运算	207
5.1.3 向量线性运算的坐标表示	208
5.1.4 向量的方向余弦与向量的投影	209

5.2 向量的数量积、向量积与混合积	211
5.2.1 向量的数量积	211
5.2.2 向量的向量积	212
*5.2.3 向量的混合积	213
5.3 空间曲面及其方程	214
5.3.1 曲面方程	214
5.3.2 二次曲面	217
5.4 空间曲线和向量函数	219
5.4.1 空间曲线及其方程	219
5.4.2 空间曲线在坐标面上的投影	220
5.4.3 向量函数	221
5.5 平面与直线	223
5.5.1 平面及其方程	223
5.5.2 空间直线及其方程	226
5.5.3 直线与平面的位置关系	227
5.6 思考与拓展	230
复习题 5	235
第 6 章 多元函数微分学及其应用	237
6.1 多元函数	237
6.1.1 区域	237
6.1.2 n 元函数及二元函数的极限	238
6.1.3 二元函数的连续性	242
6.2 偏导数与全微分	244
6.2.1 n 元函数的偏导数	244
6.2.2 二元函数偏导数与一元函数导数的差异	246
6.2.3 高阶偏导数	247
6.2.4 n 元函数的全微分	249
6.3 复合函数与隐函数求导法	254
6.3.1 复合函数求导法	254
6.3.2 隐函数的微分法	259
6.4 方向导数与梯度	262
6.4.1 方向导数	262
6.4.2 梯度	265
6.5 偏导数的应用	267
6.5.1 Taylor 公式	267

6.5.2 几何上的应用	269
6.5.3 二元函数的极值和最值	272
6.5.4 条件极值的 Lagrange 乘数法	274
6.6 思考与拓展	278
复习题 6	280
第 7 章 多元函数积分学及其应用	283
7.1 n 重积分	283
7.1.1 n 重积分的定义	283
7.1.2 n 重积分的性质	284
7.1.3 二重积分与三重积分	285
7.2 重积分的计算	289
7.2.1 二重积分的计算	289
7.2.2 三重积分的计算	296
7.2.3 二重积分和三重积分的应用	300
7.3 曲线积分	305
7.3.1 对弧长的曲线积分	305
7.3.2 对坐标的曲线积分	309
7.4 Green 公式及其应用	315
7.4.1 Green 公式	315
7.4.2 曲线积分与积分路径无关的充分必要条件	319
7.5 曲面积分	325
7.5.1 对面积的曲面积分	325
7.5.2 对坐标的曲面积分	327
7.5.3 Gauss 公式	331
7.5.4 Stokes 公式	333
*7.5.5 场论初步	335
*7.5.6 Hamilton 算子	337
7.6 思考与拓展	340
复习题 7	346
第 8 章 无穷级数	349
8.1 无穷级数的收敛性及其基本性质	349
8.1.1 问题的提出	349
8.1.2 无穷级数的基本概念	351
8.1.3 无穷级数的性质	354
8.2 级数收敛判别法	356

8.2.1 正项级数收敛判别法	356
8.2.2 一般项级数收敛判别法	362
8.3 幂级数	366
8.3.1 函数项级数	366
8.3.2 幂级数及其收敛性	369
8.3.3 幂级数的运算	374
8.4 函数展开为幂级数	380
8.4.1 Taylor 级数	380
8.4.2 函数展开为幂级数的应用	385
8.4.3 微分方程的幂级数解法	387
8.5 Fourier 级数	390
8.5.1 三角函数系的正交性	390
8.5.2 函数展开成 Fourier 级数	391
8.5.3 正弦级数与余弦级数	394
8.5.4 一般周期函数的 Fourier 级数	395
8.6 思考与拓展	399
复习题 8	404
第 9 章 数学实践与数学建模初步	407
9.1 数学实践	407
9.1.1 函数与极限的应用实例	407
9.1.2 一元函数微积分的应用实例	412
9.1.3 n 元函数微积分的应用实例	419
9.1.4 无穷级数的应用举例	422
9.2 Matlab 在高等数学中的应用	425
9.3 数学建模初步	429
9.3.1 基本知识	429
9.3.2 建模实例	431
9.4 简单的经济数学模型	436
9.4.1 边际成本与边际效益	436
9.4.2 效用函数	438
9.4.3 商品替代率	438
9.4.4 效用分析	439
参考文献	440
部分习题参考答案或提示	442
数学浅谈	470

第1章 函数与极限

微积分学中的基本概念,如连续、导数和积分等,都是以极限理论为基础的.极限思想方法是高等数学中的一个重要思想方法,极限理论推动了数学理论的发展,促使许多实际问题得以解决.在近代数学许多分支中,一些重要的概念与理论都是极限和连续函数概念的推广、延拓和深化.因此,理解和掌握极限思想和方法是学好微积分的关键.

1.1 函 数

1.1.1 变量的变化范围

我们知道,在实际问题中有变量与常量之分.所谓变量,是指一个可以被赋予任何值的量.如果它的值是固定的,称为常量(也称为常数).这里需要将任意常数和绝对常数区分开来.在具体问题研究中,任意常数可以保持任何给定的值,而绝对常数则在所给定的问题中都保持相同的值.例如,半径为 r 的圆周长为 $2\pi r$,这里 r 为任意常数,而 2 和 π 为绝对常数.

对于任何变量都有一定的变化范围,例如,电子产品的使用寿命、天气的温度等.变量的变化范围也就是变量的取值范围,通常用区间或邻域表示,它们是实数集合 $\mathbb{R}$ 的一个子集.区间是最熟悉的常见的实数轴上的点集,它是以下几种点集的总称.设 $a, b \in \mathbb{R}$, 定义以下的区间集合.

(1) 闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$, 一个点 a 组成的集合 $\{a\} = [a, a]$ 也是闭区间.

(2) 开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$.

(3) 半开半闭区间 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ (左开右闭), $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ (左闭右开).

(4) 对 $\delta \in \mathbb{R}$, 且 $\delta > 0$, 称区间

$$(a - \delta, a + \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}$$

为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$. 如果不强调 δ , 可记为 $U(a)$. 称

$$(a - \delta, a + \delta) - \{a\} = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}$$

为点 a 的去心邻域, 记为 $\hat{U}(a, \delta)$ (也记为 $\hat{U}(a)$).

以上区间称为有限区间, 类似可定义以下无限区间.

$$(5) (a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty\}, (-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\}.$$

$$(6) [a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\}, (-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\}.$$

(7) $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$, 此即全体实数集 $\mathbb{R}$. 一般地, 把全体实数集 $\mathbb{R}$ 与 $-\infty, +\infty$ 组成的集合称为扩充实数集 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

对以上区间 (2), (5) 和 (7), 它们有一共性, 即其中任意一点 x_0 , 存在邻域 $U(x_0)$, 使得 $U(x_0)$ 完全属于该区间. 一般地, 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的一个子集, 如果对任意 $x_0 \in E$, 存在邻域 $U(x_0) \subset E$, 则称集合 E 为开集. 特别地, $U(x_0)$ 是一开集. 如果 F 是 $\mathbb{R}$ 的子集, 存在开集 E , 使 $F = \mathbb{R} - E$, 则称 F 为闭集. 显然, 开集的余集为闭集, 闭集的余集为开集; 开区间为开集, 闭区间为闭集. 开集、闭集的概念超出本书范围, 请读者自行查阅相应参考书.

在本书中, 符号 $\mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{C}$ 分别表示有理数集合、正整数集合和复数集合.

1.1.2 函数的定义

定义 1.1 设有两个非空实数集合 A 与 B , 如果有这样一个对应法则 f , 使得按照该法则, 对于 A 中的每一个数 x , 在 B 中都有唯一的数 y 与之对应, 那么称 f 是定义在 A 上且取值于 B 的函数. 其中 A 称为函数 f 的定义域, 记为 $D(f)$; 与 x 对应的 y 记为 $y = f(x)$; 集合 $\{y | y = f(x), x \in D(f)\}$ 称为函数 f 的值域, 记为 $R(f)$. 显然 $R(f) \subseteq B$. 若视 x, y 为变量, 则 x 为自变量, y 为因变量.

函数关系的实质是变量之间的一种确定的对应关系 (图 1.1), 其含义是指对定义域内每一个 x , 按对应法则 f 总有唯一确定的 y 与之对应. 因此, 单值性是函数的一个重要特征. 此外, 函数的定义与自变量及因变量用什么字母表示无关. 例如, 函数 $y = f(x)$ 同样可以用 $s = f(t)$ 表示.

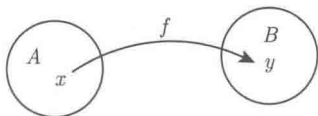


图 1.1

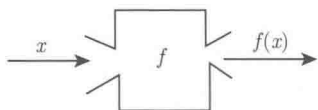


图 1.2

定义域与对应法则是确定函数的两个因素, 这是函数最本质的特征 (图 1.2). 因此, 对两个函数来说, 当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时, 表示同一个函数. 例如, 函数 $f(x) = |x|$ 与函数 $g(x) = \sqrt{x^2}$ 是同一个函数, 而函数 $f(x) = 1$ 与函数 $g(x) = \frac{x}{x}$ 就不是同一个函数, 因为后者要求 $x \neq 0$.

从几何上看, 在平面直角坐标系中, 点集 $\{(x, y) | y = f(x), x \in A\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图像, 它通常构成一条曲线, $y = f(x)$ 称为这条曲线的方程.

函数的表示法包括公式法、图像法、表格法和描述法, 但在理论研究和后续学

习中,公式法是比较常用的一种表示法,图像法是一种比较直观的几何表示法,表格法和描述法是比较少用的特殊表示方法.需要注意的是,函数用公式法表示,但没有明确其定义域,此时我们约定该函数的定义域就是使该公式有意义的一切实数.例如, $y = \sqrt{x}$ 意味着 $x \geq 0$.

公式法表示函数,有时未必能用一个式子表示.例如,符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

再如,Dirichlet^①(狄利克雷)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (\mathbb{Q} \text{ 为有理数集合}).$$

称这种形式的函数为分段函数.分段函数是一个函数,在其定义域的不同部分用不同的式子表示其对应规律.但要注意“伪”分段函数.例如,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

不是分段函数.因为 $f(x) = 1 - |1 - x| = 1 - \sqrt{(x-1)^2}$ ($x \in [0, 2]$).

另外,Dirichlet 函数说明了一个重要的问题:函数的图像并不是都可以在直角坐标系中刻画出来的,也就是说图像法不能表达所有的函数.

例 1.1 解答下列问题:

(1) 在区间 $(-\infty, 0)$ 内,函数 $g(x) = -\sqrt{1-x}$ 与 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x^3}}{x}$ 是否为同一个函数?

(2) 求函数 $y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域;

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求 $f(x-a) + f(x+a)$ ($a > 0$) 的定义域.

解 (1) 由于

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2(1-x)}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1-x}}{x}.$$

注意到 $x < 0$, 知 $f(x) = -\sqrt{1-x}$. 所以, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在给定的定义域内是同一个函数.

(2) 要使函数有意义, x 需满足

$$4 - x^2 \geq 0, \quad x - 1 > 0.$$

^① Dirichlet (1805—1859), 德国数学家.

解之, 得 $1 < x \leq 2$. 于是, 函数的定义域为 $\{x|x \in (1, 2]\}$.

(3) 根据题意, 有 $0 \leq x - a \leq 1, 0 \leq x + a \leq 1$, 解之, 得

$$a \leq x \leq 1 + a, \quad -a \leq x \leq 1 - a.$$

因为 $a > 0$, 所以当 $1 - a \geq a \left(0 < a \leq \frac{1}{2}\right)$ 时, $a \leq x \leq 1 - a$. 当 $1 - a < a$ 时, 无解. 于是, 所求定义域为

$$[a, 1 - a], \quad 0 < a \leq \frac{1}{2}; \quad \emptyset, \quad a > \frac{1}{2}.$$

例 1.2 设 $x \in \mathbb{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[\pi] = 3, [-2.1] = -3, [4] = 4$. 记

$$y = [x], \quad x \in \mathbb{R}$$

所表示的函数为**取整函数**. 显然, 取整函数满足不等式

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

对于函数 $f(x)$, 如果其定义域为正整数集合 $\mathbb{N}$, 可简记为 $a_n = f(n) (n = 1, 2, \dots)$, 称为**数列**

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

用 $\{a_n\}$ 表示 (为简单起见, 以后仍记为 a_n). 其中 a_n 表示数列的通项, n 表示数列的项数.

1.1.3 几类特殊的函数

1. 有界函数

设 I 为函数 $f(x)$ 的定义区间^①, 如果存在常数 M_1, M_2 , 使得对任意的 $x \in I$,

$$M_1 \leq f(x) \leq M_2,$$

则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**有界函数**. 其中 M_1 和 M_2 分别称为函数 $f(x)$ 的**下界**和**上界**. 如果这样的 M_1 和 M_2 至少有一个不存在, 则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**无界函数**. 换句话说, 对任意给定的数 M , 总有一点 $x_0 \in I$, 使得

$$f(x_0) < M \quad \text{或} \quad f(x_0) > M.$$

例如, 函数 $y = \sin x$ 在其定义域 $\mathbb{R}$ 内有界, 因为对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $|\sin x| \leq 1$. 从几何上看, 有界函数的图像介于直线 $y = M_1$ 和 $y = M_2$ 之间.

^① 定义区间是函数的定义域内除孤立点之外的区间, 它是定义域的一部分.

综上, 注意两点: ①函数 $f(x)$ 的有界性与给定的区间有关, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[1, 2]$ 上有界, 但在区间 $(-1, 1)$ 上无界; ②函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界, 也有下界.

例 1.3 判定函数 $f(x) = x \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上的有界性.

解 取 $x_0 = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$), 经计算, 得 $f(x_0) = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. 因此, 对任意的 $M > 0$, 只要 $n > M$, 都有 $f(x_0) > M$. 因此函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无界.

2. 单调函数

设 I 为函数 $f(x)$ 的定义区间, 如果对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是区间 I 上的**单调增加函数**, 简称**单增函数**; 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是区间 I 上的**单调减少函数**, 简称**单减函数**. 单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**.

如果对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称函数 f 是区间 I 上的**单调不减函数**(**单调不增函数**).

例如, 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调减少, 但在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数; 函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调函数.

对数列 $a_n = f(n)$ 而言, 相应地, 可以给出有界数列、无界数列、单调数列的概念.

3. 奇函数和偶函数

若函数 $f(x)$ 在定义域内满足

$$f(x) = -f(-x),$$

则称函数 $f(x)$ 是**奇函数**; 若满足

$$f(x) = f(-x),$$

则称函数 $f(x)$ 是**偶函数**.