高等院校数学教材同步辅导及考研用书

数值分析（清华第5版）习题精解及考研辅导

周华任 等编

知识结构分析
典型方法归纳
各种题型集成
课后习题精解
考研真题精选
打磨能力训练
成就考试考研

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等院校数学教材同步辅导及考研用书

数值分析习题精解及考研辅导

（清华第5版）

周华任　王俐莉　穆　松
周　生　徐　兵　李喜波　等编

东南大学出版社
·南京·

内 容 简 介

本书是清华大学出版社出版的李庆扬、王能超、易大义主编的《数值分析》(第五版)配套的学习辅导书，主要包括知识结构框图、知识点归纳、典型例题详解、课后复习与思考题全解，课后习题精解和考研真题及参考答案等几个部分. 本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，开拓解题思路，更好地掌握数值分析的基本内容和解题方法.

本书可作为理工科各专业本科生、研究生的课程辅导材料和复习参考用书，也可作为相关专业考研强化复习的指导书及教师参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

数值分析习题精解及考研辅导/周华任等编. —南京:东南大学出版社，2015.6

高等院校数学教材同步辅导及考研用书

ISBN 978－7－5641－5678－7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①数值分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 087841 号

数值分析习题精解及考研辅导

编　　者	周华任等
责任编辑	宋华莉
编辑邮箱	52145104@qq.com
出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
网　　址	http://www.seupress.com
电子邮箱	press@seupress.com
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700 mm×1 000 mm　1/16
印　　张	13
字　　数	359 千字
版　　次	2015 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978 - 7 - 5641 - 5678 - 7
定　　价	36.00 元
经　　销	全国各地新华书店
发行热线	025 - 83790519　83791830

(本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话:025 - 83791830)

前　　言

《数值分析》是数学系专业基础课程之一.

本书是清华大学出版社出版的，李庆扬、王能超、易大义主编的《数值分析》（第5版）配套的学习辅导书，主要由如下几个部分组成：

1. 知识要点结构框图：把本章的主要知识点用图解的方式表达出来.

2. 知识点归纳：对每章知识点做了简练概括，梳理了各知识点之间的脉络联系，突出各章主要定理及重要公式，使读者在各章学习过程中目标明确，有的放矢.

3. 典型例题详解：该部分选取了一些具有启发性或综合性较强的经典例题，给出详细解答，意在抛砖引玉.

4. 课后复习与思考题全解：对教材中的复习与思考题作了详尽的解答，可以帮助读者对各章的基本概念、公式、方法等进行讨论、提炼和梳理，有助于读者掌握各章的知识理论和方法.

5. 课后习题精解：教材中课后习题丰富、层次多样，许多基础性问题从多个角度阐释帮助学生理解基本概念和基本理论，使其掌握基本解题方法. 对教材的课后习题给了详细的解答.

6. 考研真题及参考答案：精选了名校的研究生入学考试真题5套，这些题目涉及内容广，题型多，技巧性强，可以使同学们举一反三，触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握数值分析的考试题型和解题方法.

本书由周华任、王俐莉、穆松、周生、徐兵、李喜波编写. 旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，开拓解题思路，更好地掌握数值分析的基本内容和解题方法.

由于时间较仓促，编者水平有限，难免书中有疏漏之处，敬请各位同行和读者给予批评、指正.

编者

2015.3

目　　录

第一章　数值分析与科学计算引论 …… 1
知识要点结构框图 …… 1
知识点归纳 …… 1
典型例题详解 …… 2
课后复习与思考题全解 …… 3
课后习题精解 …… 6

第二章　插值法 …… 12
知识要点结构框图 …… 12
知识点归纳 …… 12
典型例题详解 …… 15
课后复习与思考题全解 …… 18
课后习题精解 …… 22

第三章　函数逼近与快速傅里叶变换 …… 34
知识要点结构框图 …… 34
知识点归纳 …… 34
典型例题详解 …… 39
课后复习与思考题全解 …… 42
课后习题精解 …… 46

第四章　数值积分与数值微分 …… 59
知识要点结构框图 …… 59
知识点归纳 …… 59
典型例题详解 …… 62
课后复习与思考题全解 …… 66
课后习题精解 …… 69

第五章　解线性方程组的直接方法 …… 80
知识要点结构框图 …… 80
知识点归纳 …… 80
典型例题详解 …… 83
课后复习与思考题全解 …… 86
课后习题精解 …… 89

第六章　解线性方程组的迭代法…………………………………………………………………………… 100
知识要点结构框图……………………………………………………………………………………… 100
知识点归纳……………………………………………………………………………………………… 100
典型例题详解…………………………………………………………………………………………… 102
课后复习与思考题全解………………………………………………………………………………… 103
课后习题精解…………………………………………………………………………………………… 106

第七章　非线性方程与方程组的数值解法………………………………………………………………… 114
知识要点结构框图……………………………………………………………………………………… 114
知识点归纳……………………………………………………………………………………………… 114
典型例题详解…………………………………………………………………………………………… 117
课后复习与思考题全解………………………………………………………………………………… 120
课后习题精解…………………………………………………………………………………………… 123

第八章　矩阵特征值计算…………………………………………………………………………………… 133
知识要点结构框图……………………………………………………………………………………… 133
知识点归纳……………………………………………………………………………………………… 133
典型例题详解…………………………………………………………………………………………… 135
课后复习与思考题全解………………………………………………………………………………… 137
课后习题精解…………………………………………………………………………………………… 140

第九章　常微分方程初值问题数值解法…………………………………………………………………… 149
知识要点结构框图……………………………………………………………………………………… 149
知识点归纳……………………………………………………………………………………………… 149
典型例题详解…………………………………………………………………………………………… 151
课后复习与思考题全解………………………………………………………………………………… 154
课后习题精解…………………………………………………………………………………………… 159

附录一　考研真题检测……………………………………………………………………………………… 166
考研真题一……………………………………………………………………………………………… 166
考研真题二……………………………………………………………………………………………… 170
考研真题三……………………………………………………………………………………………… 173
考研真题四……………………………………………………………………………………………… 177
考研真题五……………………………………………………………………………………………… 181
附录二　考研真题参考答案………………………………………………………………………………… 185
考研真题一……………………………………………………………………………………………… 185
考研真题二……………………………………………………………………………………………… 188
考研真题三……………………………………………………………………………………………… 190
考研真题四……………………………………………………………………………………………… 194
考研真题五……………………………………………………………………………………………… 196

第一章　数值分析与科学计算引论

知识要点结构框图

- 数值分析与科学计算引论
  - 数值计算的误差
    - 误差来源与分类
    - 误差与有效数字
    - 数值运算的误差估计
  - 误差定性分析
    - 算法的数值稳定性
    - 病态问题与条件数
    - 避免误差危害
  - 算法设计的技术
    - 多项式求值的秦九韶算法
    - 迭代法与开方求值
    - 以直代曲
    - 化整为零
    - 松弛法
  - 算法语言
    - Fortran 语言
    - C 语言
  - 数学软件
    - IMSL
    - MATLAB

知识点归纳

1. 误差度量

(1) 数值分析研究的两类误差

舍入误差和截断误差. 由于计算机字长的有限性,对相关数据进行存储表示时会产生舍入误差,计算机必须在有限的时间内得到运行结果,于是无穷的运算过程必须截断为有限过程,由此产生截断误差.

(2) 误差的度量方式

设 x^* 是真值 x 的一个近似值,绝对误差为 $e^*(x^*) = x^* - x$,相对误差为 $e_r^*(x^*) = \dfrac{e^*}{x} \approx \dfrac{e^*}{x^*}$. 绝对误差限 ε^* 和相对误差 ε_r^* 分别是 $|e^*|$ 和 $|e_r^*|$ 的上限.

(3) 有效数字的定义

若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位,该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位,就说 x^* 有 n 位有效数字. 它可表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)})$$

其中 $a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是 0 到 9 中的一个数字,$a_1 \neq 0$,m 为整数,且

$$|x-x^*|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{m-n+1}.$$

(4) 误差限的运算

两个近似数 x_1^* 与 x_2^*，其误差分别为 $\varepsilon(x_1^*)$ 及 $\varepsilon(x_2^*)$，它们进行加、减、乘、除运算得到的误差限分别为

$$|\varepsilon(x_1^*\pm x_2^*)|\leqslant|\varepsilon(x_1^*)|+|\varepsilon(x_2^*)|$$

$$|\varepsilon(x_1^*x_2^*)|\leqslant|x_1^*|\cdot|\varepsilon(x_2^*)|+|x_2^*|\cdot|\varepsilon(x_1^*)|$$

$$\left|\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)\right|\leqslant\frac{|x_1^*||\varepsilon(x_2^*)|+|x_2^*||\varepsilon(x_1^*)|}{|x_2^*|^2}.\quad(x_2^*\neq 0)$$

2. 误差传播

在运算过程中舍入误差如果能够得到控制，或者舍入误差的增长不影响产生可靠的结果，则称该算法是数值稳定的.

函数值绝对误差传播公式如下

$$f(x^*)-f(x)\approx f'(x^*)(x^*-x)$$

$$f(x_1^*,\cdots,x_n^*)-f(x_1,\cdots,x_n)\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i}(x_i^*-x_i)$$

$$|\varepsilon(f(x^*))|\approx|f'(x^*)|\cdot|\varepsilon(x^*)|$$

典型例题详解

例 1 取 $\sqrt{99}$ 的 6 位有效数 9.949 87，则以下两种算法各有几位有效数字？

$$10-\sqrt{99}\approx 10-9.94987=0.05013 \tag{1}$$

$$\frac{1}{10+\sqrt{99}}\approx\frac{1}{10+9.94987}=\frac{1}{19.94987}=0.0501256399\cdots \tag{2}$$

【解】 记 $x=\sqrt{99}, x^*=9.94987, e(x)=x^*-x$，则

$$|e(x^*)|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

由 $e(10-x^*)\approx -e(x^*)$ 得

$$|e(10-x^*)|=|e(x^*)|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

因而算式(1)

$$10-\sqrt{99}\approx 0.05013$$

至少具有 4 位有效数字.

又由

$$e(10+x^*)\approx e(x^*),\quad |e(10+x^*)|\approx|e(x^*)|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

和

$$e\left[\frac{1}{10+x^*}\right]\approx-\frac{e(10+x^*)}{(10+x^*)^2}\approx-\frac{e(x^*)}{(10+x^*)^2}$$

得

$$\left|e\left(\frac{1}{10+x^*}\right)\right|\approx\frac{|e(x^*)|}{(10+x^*)^2}\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-5}}{(10+9.94987)^2}\approx 0.1256\times 10^{-7}$$

因而算式(2)

$$\frac{1}{10+\sqrt{99}} \approx 0.050\ 125\ 639\ 9\cdots$$

至少具有 6 位有效数字，即$\frac{1}{10+\sqrt{99}} \approx 0.050\ 125\ 6$.

例 2　求$\sqrt{3}$ 的近似值，使其绝对误差限精确到$\frac{1}{2}\times 10^{-1}$，$\frac{1}{2}\times 10^{-2}$，$\frac{1}{2}\times 10^{-3}$.

【解】　因为$\sqrt{3}=1.732\ 05\cdots$. 由于

$$\varepsilon^*(1.7)=|\sqrt{3}-1.7|=0.032\ 05\cdots<0.05=\frac{1}{2}\times 10^{-1}$$

$$\varepsilon^*(1.73)=|\sqrt{3}-1.73|=0.002\ 05\cdots<0.005=\frac{1}{2}\times 10^{-2}$$

$$\varepsilon^*(1.732)=|\sqrt{3}-1.732|=0.000\ 05<0.000\ 5=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

所以 $x_1^*=1.7, x_2^*=1.73, x_3^*=1.732$.

例 3　把 $x_1^*=2.7$ 作为 e 的近似值，试确定它有几位有效数字，并求出相对误差限.

【解】　$x_1^*=2.7=10^0\times 2.7$，于是有 $m=0$，由

$$|e(x_1^*)|=|x_1^*-x|=|2.7-\mathrm{e}|=0.018\cdots \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-1}$$

可知 x_1^* 具有两位有效数字，利用不等式

$$|e_r(x_1^*)|=\frac{|e(x_1^*)|}{|x_1^*|}=\frac{0.018\cdots}{2.7} \leqslant \frac{0.019}{2.7}\approx 0.007\ 0$$

得相对误差限 $\varepsilon_r(x_1^*)\approx 0.007\ 0$.

例 4　请给出一种算法计算 x^{256}，要求乘法次数尽可能少.

【解】　$x_1=x\cdot x$

$$x_2=x_1\cdot x_1$$
$$x_3=x_2\cdot x_2$$
$$x_4=x_3\cdot x_3$$
$$x_5=x_4\cdot x_4$$
$$x_6=x_5\cdot x_5$$
$$x_7=x_6\cdot x_6$$
$$x_8=x_7\cdot x_7$$

则有 $x_8=x^{256}$. 这样共需要 8 次乘法就可以计算出结果.

注：要求乘法次数尽可能少，其中一种思路是尽可能运用已经计算出来的结果. 如 $x^{256}=(x^{128})^2$，当 x^{128} 的结果计算出来之后，再需一次乘法便得到 x^{256}. 同样 $x^{128}=(x^{64})^2$，依此类推，这样就能使得到的乘法次数尽可能少.

课后复习与思考题全解

1. 什么是数值分析？它与数学科学和计算机的关系如何？

【解】　数值分析也称计算数学，是数学科学的一个分支，主要研究的是用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论与软件实现.

数值分析以数学问题为研究对象,但它并不像纯数学那样只研究数学本身的理论,而是把理论与计算紧密结合,着重研究数学问题的数值方法及其理论.

2. 何谓算法?如何判断数值算法的优劣?

【解】 一个算法是指按规定顺序执行一个或多个完整的进程,通过算法将输入元变换成输出元.

一个面向计算机,有可靠理论分析且计算复杂性好的算法就是一个好的算法.

判断一个算法的优劣应从算法的可靠性、准确性、计算复杂性几个方面考虑.

3. 列出科学计算中误差的三个来源,并说出截断误差与舍入误差的区别.

【解】 科学计算中误差一般有模型误差,截断误差和舍入误差. 用计算机解决实际问题首先要建立数学模型,数学模型与实际问题之间出现的误差叫做模型误差,在数学模型中往往还有一些根据观测得到的物理量,如温度、长度等,这些参量显然也包含误差,这种由观测产生的误差称为观测误差.

当数学模型不能得到精确解时,通常要用数值方法求它的近似解,其近似解和精确解之间的误差称为截断误差或方法误差.

有了求解数学问题的计算公式以后,用计算机做数值计算时,由于计算机字长有限,原始数据在计算机上表示时会产生误差,计算过程又可能产生新的误差,这种误差称为舍入误差.

截断误差和舍入误差是两个不同的概念,截断误差是由所采用的数值方法而产生的,因而也称方法误差,舍入误差是由数值计算而产生的.

4. 什么是绝对误差与相对误差?什么是近似数的有效数字?它与绝对误差和相对误差有何关系?

【解】 设 x 为准确值,x^* 为 x 的一个近似值,称 $e^* = x^* - x$ 为近似值 x^* 的绝对误差,简称误差.

近似值的误差 e^* 与准确值 x 的比值

$$\frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

称为近似值 x^* 的相对误差,记做 e_r^*.

若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位,该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位,就说 x^* 有 n 位有效数字.

有效位数越多,绝对误差限越小. 相对误差限也越小.

5. 什么是算法的稳定性?如何判断算法稳定?为什么不稳定算法不能使用?

【解】 算法稳定性是指一个算法如果输入数据有误差,而在计算中舍入误差不增长;否则称为不稳定的.

判断一个算法是否稳定主要是看初始数据误差在计算中的放大程度. 如果放大倍数很大就是数值不稳定的.

不稳定的算法,由于其误差传播是逐步扩大的,因而计算结果不可靠,所以不稳定的算法是不能使用的.

6. 什么是问题的病态性?它是否受所用算法的影响?

【解】 问题的病态性是指如果输入数据有微小扰动(即误差),引起输出数据(即问题解)绝对误差限很大.

病态性是数值问题本身固有的,不是由计算方法引起的,病态性不受所用算法的影响. 对病态问题必须采用特殊的方法以减少误差危害.

7. 什么是迭代法?试利用 $x^3 - a = 0$ 构造计算 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式.

【解】 迭代法是一种按同一公式从初始值开始重复计算逐次逼近真值的算法,是数值计算普遍使用的重要方法.

在计算$\sqrt[3]{a}$时，可从求方程$x^3-a=0$的根出发，利用方程的等价形式$x=\frac{1}{3}\left(2x+\frac{a}{x^2}\right)$即可得到计算$\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{3}\left(2x_k+\frac{a}{x_k^2}\right)\quad(k=0,1,2,\cdots,x_0\text{ 给定}).$$

8. 直接利用以直代曲的原则构造求方程$x^2-a=0$的根$x^*=\sqrt{a}$的迭代法.

【解】 曲线$y=x^2-a$在点$(x_k,f(x_k))$处的切线方程为$y=2x_kx-x_k^2-a$，切线方程的根$x=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)$，以此作为新的近似值，就得到了求方程$x^2-a=0$的根$x^*=\sqrt{a}$的迭代公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)\quad(k=0,1,2,\cdots,x_0\text{ 已知})$$

9. 举例说明什么是松弛技术.

【解】 在积分近似计算的梯形公式$T_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]$中，令$n=1,2$

$$T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],$$

$$T_2=\frac{b-a}{4}[f(a)+2f(c)+f(b)],\quad c=\frac{a+b}{2}.$$

令

$$S_1=T_2+\omega(T_2-T_1)=(1+\omega)T_2-\omega T_1,$$

若取$\omega=1/3$，则得

$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=\frac{b-a}{6}[f(a)+2f(c)+f(b)],$$

这就是松弛技术，ω称为松弛因子.

10. 考虑无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，它是发散的，在计算机上计算它的部分和，会得到什么结果？为什么？

【解】 在理论上无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，但在计算机上计算时，由于计算机只能进行有限数的计算，所以无论n取多大的值，级数的和都是有限数，即使对于有限值的n，当n较大时，$\frac{1}{n}$较小. 如果小到在计算机内视为计算机零，则对部分和就没有贡献了. 这时所得的部分和就是常数了.

11. 判断下列命题的正确性：

(1) 解对数据的微小变化高度敏感是病态的.

(2) 高精度运算可以改善问题的病态性.

(3) 无论问题是否病态，只要算法稳定都能得到好的近似值.

(4) 用一个稳定的算法计算良态问题一定会得到好的近似值.

(5) 用一个收敛的迭代法计算良态问题一定会得到好的近似值.

(6) 两个相近数相减必然会使有效数字损失.

(7) 计算机上将 1 000 个数量级不同的数相加，不管次序如何结果都是一样的.

【解】 (1) 对. 病态就是根据这一现象定义的.

(2) 错. 病态性是问题本身固有的，与所采用的方法无关.

(3) 错. 只有当问题为良态时，稳定的算法才有可能得到好的近似值.

(4) 错. 用一个稳定的算法计算良态问题是否能得到好的近似值还依赖于初始值选取得是否适当.

(5) 错. 用收敛的迭代法计算良态问题时,同样依赖于初始值选取的问题.

(6) 对. 如果两个相近数直接相减,大多会使有效数字损失. 可以通过等价变换转化成其他运算而避免有效数字损失.

(7) 错. 次序不加处理和次序加以处理的结果一般是不一样的,尤其是当所加的数据的数量级相差较大时. 此时,将数量级相近的数据调整到一起相加结果会准确些. 一般采取绝对值较小的数先相加.

课后习题精解

1. 设 $x>0$,x 的相对误差为 δ,求 $\ln x$ 的误差.

【解】 设 x 的近似数为 x^*,则

$$\frac{x^*-x}{x}=\delta,\ln x^*-\ln x=\ln\frac{x^*}{x}=\ln\frac{x^*-x+x}{x}=\ln(\delta+1)\approx\delta.$$

2. 设 x 的相对误差为 2%,求 x^n 的相对误差.

【解】 $e(x^n)\approx nx^{n-1}(x^*-x)$

$$e_r(x^n)\approx n\frac{x^{n-1}(x^*-x)}{x^n}=n\frac{x^*-x}{x^*}=ne_r(x)=0.02n.$$

3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数,即误差限不超过最后一位的半个单位,试指出它们是几位有效数字:

$x_1^*=1.102\,1,x_2^*=0.031,x_3^*=385.6,x_4^*=56.430,x_5^*=7\times1.0.$

【解】 $x_1^*=1.102\,1$ 有 5 位有效数字;

$x_2^*=0.031$ 有 2 位有效数字;

$x_3^*=385.6$ 有 4 位有效数字;

$x_4^*=56.430$ 有 5 位有效数字;

$x_5^*=7\times1.0$ 有 2 位有效数字.

4. 利用公式(2.3)求下列各近似值的误差限:

(1) $x_1^*+x_2^*+x_4^*$;(2) $x_1^*\cdot x_2^*\cdot x_3^*$;(3) x_2^*/x_4^*.

其中 x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^* 均为第 3 题所给的数.

【解】 (1) $e^*(x_1^*+x_2^*+x_4^*)\leqslant e(x_1^*)+e(x_2^*)+e(x_4^*)$

$$=\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-3}+\frac{1}{2}\times10^{-3}$$
$$\leqslant1.05\times10^{-3}.$$

(2) $e^*(x_1^*\cdot x_2^*\cdot x_3^*)$

$$\approx x_2^*\cdot x_3^*(x_1-x_1^*)+x_1^*\cdot x_3^*\cdot(x_2-x_2^*)+x_1^*\cdot x_2^*(x_3-x_3^*)$$
$$\approx0.215.$$

(3)
$$\begin{aligned}e^*(x_2^*/x_4^*)&\leqslant\left|\frac{1}{x_4^*}(x_2-x_2^*)-\frac{x_2^*}{(x_4^*)^2}(x_4-x_4^*)\right|\\&=\left|\frac{x_2^*}{x_4^*}e_r^*(x_2)-\frac{x_2^*}{x_4^*}e_r^*(x_4)\right|\\&\leqslant\left|\frac{x_2^*}{x_4^*}\right|[|e_1^*(x_2)|+|e_r^*(x_4)|]\\&=\frac{0.031}{56.430}\left(\frac{\frac{1}{2}\times10^{-3}}{0.031}+\frac{\frac{1}{2}\times10^{-3}}{56.430}\right)\\&\leqslant10^{-5}.\end{aligned}$$

5. 计算球体积要使相对误差限为 1%,问度量半径 R 所允许的相对误差限是多少?

【解】 $$e_r^*(V)=\frac{\frac{4}{3}\pi R^{*3}-\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{R^*-R}{R}\cdot\frac{R^2+R^*R+R^{*2}}{R^2}$$

$$\approx\frac{R^*-R}{R}\cdot\frac{3R^2}{R^2}=\frac{R-R^3}{R}\cdot 3=1\%$$

则

$$\frac{R^*-R}{R}=\frac{1}{3}\times 1\%=\frac{1}{300}$$

6. 设 $Y_0=28$,按递推公式

$$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}\quad(n=1,2,\cdots)$$

计算到 Y_{100},若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$(5 位有效数字),试问计算 Y_{100} 将有多大误差?

【解】 设 $Y=\sqrt{783}$, $Y^*=27.983$,若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$,则 $\varepsilon(27.982)=\delta=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$

因为 $Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$$Y_0=28,\quad Y_0^*=28,\quad \delta_0=|Y_0-Y_0^*|=0$$

$$|Y_1-Y_1^*|=\left|\left(28-\frac{1}{100}\sqrt{783}\right)-\left(28-\frac{1}{100}\times 27.983\right)\right|\leqslant\frac{1}{100}\delta$$

$$|Y_2-Y_2^*|=\left|\left(Y_1-\frac{1}{100}\sqrt{783}\right)-\left(Y_1^*-\frac{1}{100}\times 27.983\right)\right|$$

$$=\left|(Y_1-Y_1^*)-\frac{1}{100}(Y-Y^*)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{100}\delta+\frac{1}{100}\delta=\frac{2}{100}\delta$$

由递推公式可得

$$|Y_n-Y_n^*|\leqslant\frac{n}{100}\delta$$

则

$$|Y_{100}-Y_{100}^*|\leqslant\frac{100}{100}\delta=\delta=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

即计算 Y_{100} 的误差限不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-3}$.

7. 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根,使它至少具有 4 位有效数字($\sqrt{783}\approx 27.982$).

【解】 解方程 $x^2-56x+1=0$ 得

$$x_{1,2}=\frac{56\pm\sqrt{56^2-4}}{2}=28\pm\sqrt{\frac{3\,132}{4}}=28\pm\sqrt{783}$$

具有 5 位有效数字,故可取

$$x_1=28+\sqrt{783}\approx 28+27.982=55.982$$

$$x_2=28-\sqrt{783}=\frac{1}{28+\sqrt{783}}\approx\frac{1}{28+27.982}=\frac{1}{55.982}\approx 0.017\,863.$$

8. 当 $x\approx y$ 时计算 $\ln x-\ln y$ 有效位数会损失,改用 $\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}$ 是否就能减少舍入误差?(提示:考虑对数函数何时出现病态).

【解】 考虑对数函数的病态性问题. 设 $f(x)=\ln x$,则其条件数为

$$C_p = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x\frac{1}{x}}{\ln x} \right| = \left| \frac{1}{\ln x} \right|$$

则 $x \approx 1$ 时，C_p 充分大，问题为病态.

对于 $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$，由于 $x \approx y$，即 $\frac{x}{y} \approx 1$，故用 $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$ 不能减少舍入误差.

9. 正方形的边长大约为 100 cm，应怎样测量才能使其面积误差不超过 1 cm^2？

【解】 设正方形的边长为 x，则其面积为 $y = x^2$. 由题设知 x 的近似值 $x^* = 100$ cm. 记 y^* 为 y 的近似值，由误差传播公式知

$$e(y^*) = y^* - y = (x^2)'|_{x=x^*}(x^* - x)$$
$$= 2x^* e(x^*) = 200e(x^*)$$

又由题意知

$$\varepsilon(y^*) \approx 200\varepsilon(x^*) \leqslant 1$$

则

$$\varepsilon(x^*) < \frac{1}{200} = 0.005$$

即测量中边长误差不超过 0.005 cm 时，才能使其面积误差不超过 1 cm^2.

10. 设 $S = \frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有 ± 0.1 秒的误差，证明当 t 增加时 S 的绝对误差增加，而相对误差却减少.

【证明】 由 $S = \frac{1}{2}gt^2$，$e(S^*) = S^* - S = gt(t^* - t) = gte(t)$

$$e_r(S^*) = \frac{S^* - S}{S} = \frac{gt(t^* - t)}{\frac{1}{2}gt^2} = \frac{2e(t)}{t}$$

由上述 S 的绝对误差 $e(S)$ 与其相对误差 $e_r(S)$ 的表达式易知，当 t 增加时，$e(S)$ 增加，而 $e_r(S)$ 减少.

11. 序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系

$$y_n = 10y_{n-1} - 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

若 $y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$（三位有效数字），计算到 y_{10} 时误差有多大?这个计算过程稳定吗?

【解】 由 $y_0 = \sqrt{2}$，$y_0^* = 1.41$，则

$$|y - y_0^*| = |\sqrt{2} - 1.41| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2} = \delta$$

则由递推公式 $y_n = 10y_{n-1} - 1$

$$|y_1 - y_1^*| = |10y_0 - 1 - 10y_0^* + 1| = 10|y_0 - y_0^*| \leqslant 10\delta$$
$$|y_2 - y_2^*| = |10y_1 - 1 - 10y_1^* + 1| = 10|y_1 - y_1^*| \leqslant 10^2\delta$$

同理

$$|y_{10} - y_{10}^*| \leqslant 10^{10}\delta = \frac{1}{2} \times 10^8$$

故计算到 y_{10}，其误差限为 $10^{10}\delta$，亦即若在 y_0 处有误差限为 δ，则 y_{10} 的误差将扩大 10^{10} 倍，可见这个计算过程是不稳定的.

12. 计算 $f = (\sqrt{2} - 1)^6$，取 $\sqrt{2} \approx 1.4$，利用下列等式计算，哪一个得到的结果最好?

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}, (3 - 2\sqrt{2})^3, \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^3}, 99 - 70\sqrt{2}.$$

【解】 $(\sqrt{2} - 1)^5 = 0.005\ 050\ 6\cdots$，

取$\sqrt{2}\approx 1.4$,则

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}\approx\frac{1}{(1.4+1)^6}=\frac{1}{2.4^6}\approx 0.005\ 232\ 8$$

$$(3-2\sqrt{2})^3\approx(3-2\times 1.4)^3=0.008$$

$$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}\approx\frac{1}{(3+2.8)^3}\approx 0.005\ 125\ 3$$

$$99-70\sqrt{2}\approx 99-70\times 1.4=1$$

综上所述,$\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 计算得到的结果最好.

13. $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$,求 $f(30)$ 的值,若开平方用6位函数表,问求对数时误差有多大?若改用另一等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

计算,求对数时误差有多大?

【解】 设 $y=x-\sqrt{x^2-1}$,则 $f(x)=\ln y$. 由误差传播公式知

$$\varepsilon(f^*)\approx\frac{1}{|y^*|}|y^*-y|$$

而由题意知

$$|y^*-y|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-4},\quad |y^*|=0.016\ 7,$$

所以

$$\varepsilon(f^*)\approx\frac{|y^*-y|}{|y^*|}\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{0.016\ 7}\approx 0.3\times 10^{-2}$$

若用等价公式 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 计算,此时令 $y=x+\sqrt{x^2+1}$,则

$$|y^*|=59.983\ 3$$

则

$$e(f^*)\approx\frac{|y^*-y|}{|y^*|}\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{59.983\ 3}\approx 0.834\times 10^{-6}.$$

14. 用秦九韶算法求多项式 $p(x)=3x^5-2x^3+x+7$ 在 $x=3$ 处的值.

【解】 由秦九韶算法公式

$$\begin{cases}b_0=a_0\\ b_i=b_{i-1}x^*+a_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

构造出下列计算表格:

	x^5 系数	x^4 系数	x^3 系数	x^2 系数	x 系数	常数项
	$a_0=3$	$a_1=0$	$a_2=-2$	$a_3=0$	$a_4=1$	$a_5=7$
$x^*=3$		$b_0x^*=9$	$b_1x^*=27$	$b_2x^*=75$	$b_3x^*=225$	$b_4x^*=678$
	$b_0=3$	$b_1=9$	$b_2=25$	$b_3=75$	$b_4=226$	$b_5=685$

由上表可知,

$$p(3)=b_5=685.$$

15. 用迭代法 $x_{k+1}=\dfrac{1}{1+x_k}(k=0,1,\cdots)$ 求方程 $x^2+x-1=0$ 的正根 $x^*=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$,取 $x_0=$

1,计算到 x_5,问 x_5 有几位有效数字.

【解】 $x_0=1$

由迭代公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{1+x_k},\quad k=0,1,\cdots$$

得

$$x_1=\frac{1}{1+x_0}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{1}{1+x_1}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}=0.666\,666\,6\cdots$$

$$x_3=0.599\,999\,9\cdots$$

$$x_4=0.625$$

$$x_5=0.615\,384\,6\cdots$$

由

$$|x^*-x_5|=0.002\,66\cdots\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2}$$

知 x_5 至少具有 2 位有效数字.

16. 用不同的方法计算积分 $\int_0^{1/2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$:

(1) 用原函数计算到 6 位小数.

(2) 用复合梯形公式(4.7),取步长 $h=\frac{1}{4}$.

(3) 利用 T_1 及 T_2 的松弛法(4.8)求 S_1.

【解】 (1) 被积函数 e^x 的原函数为 e^x,由牛顿-莱布尼兹公式有

$$\int_0^{1/2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x]_0^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}-1\approx0.648\,721.$$

(2) 利用复合梯形公式

$$\int_0^{1/2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{2}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)],$$

当步长 $h=\frac{1}{4}$ 时,取点为

$$x_0=0,\quad x_1=\frac{1}{4},\quad x_2=\frac{1}{2}$$

则

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x&\approx\frac{1}{8}f(x_0)+\frac{1}{4}f(x_1)+\frac{1}{8}f(x_2)\\&=\frac{1}{8}f(0)+\frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}f\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{8}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\\&\approx0.652\,097.\end{aligned}$$

(3) 由松弛法,取 $a=0,b=\frac{1}{2},c=\frac{a+b}{2}=\frac{1}{4}$,则

$$T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{\frac{1}{2}-0}{2}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})$$

$$T_2=\frac{b-a}{4}[f(a)+2f(c)+f(b)]=\frac{1}{8}(1+2e^{\frac{1}{4}}+e^{\frac{1}{2}})$$

令 $\omega=\frac{1}{3}$,由松弛法得

$$\begin{aligned}\delta_1&=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1\\&=\frac{1}{6}(1+2e^{\frac{1}{4}}+e^{\frac{1}{2}})-\frac{1}{12}(1+e^{\frac{1}{2}})\\&=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}e^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{12}e^{\frac{1}{2}}\\&\approx 0.648\ 735\end{aligned}$$

17. 将 15 题迭代前后的值加权平均构成迭代公式

$$x_{k+1}=\omega x_k+(1-\omega)\frac{1}{1+x_k}$$

验证:若取 $\omega=\frac{7}{25}$,则上述公式比 15 题迭代收敛快.

【解】 分别用 15 题的迭代公式与本题加权平均后的迭代公式迭代计算,得结果如下表所示.

x_k	$x_{k+1}=\frac{1}{1+x_k}$	有效数字位数	$x_{k+1}=\omega x_k+(1-\omega)\frac{1}{1+x_k}$	有效数字位数
x_0	1		1	
x_1	0.5		0.64	1
x_2	0.666 667	1	0.618 024	4
x_3	0.6	1	0.618 034	5
x_4	0.625	1		
x_5	0.615 384	2		

由上表可以看出,本题加权平均后的迭代公式比第 15 题的迭代公式收敛快.