



高等院校工科类、经济管理类数学系列辅导丛书

微积分同步 练习与模拟试题



刘 强
孙激流 ◎ 编 著

清华大学出版社

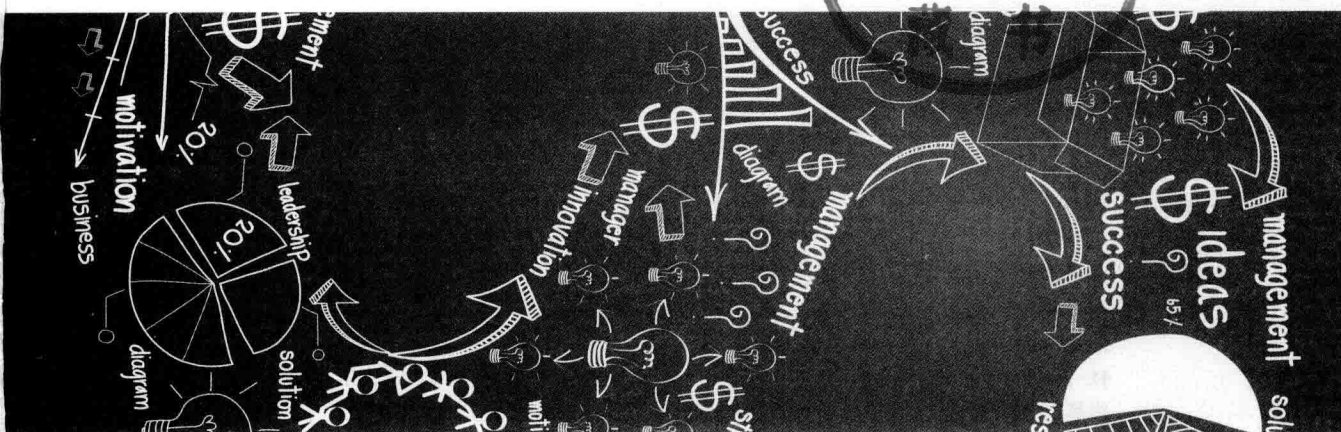




高等院校工科类、经济管理类数学系列辅导丛书

微积分同步 练习与模拟试题

刘 强 孙激流 ◎ 编 著



清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是高等院校经济管理类本科生学习微积分的辅导用书. 全书分为两大部分, 第一部分为“同步练习”, 该部分主要包括四个模块, 即内容提要, 典型例题分析, 习题精选和习题详解, 旨在帮助读者尽快地掌握微积分课程中的基本内容、基本方法和解题技巧, 提高学习效率. 第二部分为“模拟试题及详解”, 该部分给出了 20 套模拟试题, 其中上、下学期各 10 套, 并给出了详细解答过程, 旨在检验读者的学习效果, 快速提升读者的综合能力.

本书可以作为高等院校经济管理类本科生学习微积分的辅导用书, 对于准备报考硕士研究生的本科生而言, 也是一本不错的基础复习阶段的数学参考用书.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签, 无标签者不得销售。

版权所有, 侵权必究。侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步练习与模拟试题/刘强, 孙激流编著. --北京: 清华大学出版社, 2015

(高等院校工科类、经济管理类数学系列辅导丛书)

ISBN 978-7-302-40944-1

I. ①微… II. ①刘… ②孙… III. ①微积分—高等学校—习题集 IV. ①O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 166236 号

责任编辑: 彭 欣

封面设计: 王新征

责任校对: 王荣静

责任印制: 刘海龙

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175

邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者: 北京嘉实印刷有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×260mm

印 张: 20.5

字 数: 472 千字

版 次: 2015 年 9 月第 1 版

印 次: 2015 年 9 月第 1 次印刷

印 数: 1~4000

定 价: 39.50 元

产品编号: 064156-01

随着经济的发展、科技的进步,数学在经济、管理、金融、生物、信息、医药等众多领域发挥着越来越重要的作用,数学思想和方法的学习与灵活运用已经成为当今高等院校人才培养的基本要求.

然而,很多学生在学习过程中,对于一些重要的数学思想、方法难以把握,对一些常见题型存在困惑、常常感觉无从下手,对数学的理解往往只注重某些具体的知识点而体会不出蕴含在其中的思想和方法.

为了让学生更好、更快地掌握所学知识,同时结合部分学生考研的需要,我们编写了高等院校工科类、经济管理类数学系列丛书,该丛书包括《微积分》、《高等数学》、《线性代数》和《概率论与数理统计》四门数学课程的辅导用书,由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书的主编.

本书为《微积分》部分,编写的主要目的有两个:一是帮助学生更好地学习“微积分”课程,熟练掌握教材中的一些基本概念、基本理论和基本方法,提高学生分析问题、解决问题的能力,以达到经济类、管理类专业对学生数学能力培养的基本要求;二是为了满足学生报考研究生的需要,结合编者多年来的教学经验,精选了部分经典考题,使学生对考研试题的难度和深度有一个总体的认识.

本书主要分为两大部分,第一部分是同步练习部分,该部分主要包括四个模块,即内容提要、典型例题分析、习题精选及习题详解;第二部分为两个模块,分别为模拟试题与试题详解.具体模块内容如下:

1. 内容提要:对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理、归纳总结,详细解答了学习过程中可能遇到的各种疑难问题.

2. 典型例题分析:这一部分是作者在多年来教学经验的基础上,创新性地构思了大量有代表性的例题,并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典习题,按照知识结构、解题思路、解题方法对典型例题进行了系统归类,通过专题讲解,详细阐述了相关问题的解题方法与技巧.

3. 习题精选:精心选编了部分具有代表性的习题,帮助读者巩固、强化所学知识,提升学习效果.

4. 习题详解:本部分对精选习题给出了详细解答,部分习题还给出了多种解法,开拓读者的解题思路,培养读者的分析能力和发散思维.

5. 模拟试题与详解:本部分共给出了 20 套模拟试题,其中上、下学期各 10 套,并给

出了详细解答过程,主要目的是检验读者的学习效果,提高读者的综合能力。

为了便于读者阅读本书,书中的选学内容将用“*”标出,有一定难度的内容、例题和综合练习题等将用“**”标出,初学者可以略过。

本书的前身是一本辅导讲义,在首都经济贸易大学已经使用过多年,期间多次修订,本次应清华大学出版社邀请,我们将该讲义进行了整理出版,几经易稿,终成本书。

全书共分九章,其中第1、2、3、6章由刘强编写,第4、5、7、8、9章由孙激流编写,最后由刘强负责统一定稿。

本书可以作为普通高等院校经济管理类本科生学习《微积分》的辅导资料;对于准备报考硕士研究生的本科生而言,也是一本不错的基础复习阶段的数学参考用书。

本系列丛书在编写过程中,得到了北京工业大学程维虎教授,西安交通大学吴可法教授,首都经济贸易大学纪宏教授、张宝学教授、马立平教授、吴启富教授,北京化工大学李志强副教授及同事们的大力支持,清华大学出版社的编辑也为丛书的出版付出了很多努力,在此表示诚挚的感谢。

由于作者水平有限,书中可能存在不妥甚至错误之处,恳请读者和同行们不吝指正。邮箱地址为:cuebliuqiang@163.com.

作 者

第一部分 同步练习

第 1 章 函数	3
1.1 内容提要	3
1.1.1 函数的定义	3
1.1.2 分段函数	3
1.1.3 函数的基本特性	4
1.1.4 反函数	5
1.1.5 复合函数	5
1.1.6 基本初等函数	5
1.1.7 初等函数	5
1.1.8 一些常用的三角公式	5
1.1.9 一些常用的代数公式	6
1.2 典型例题分析	7
1.2.1 题型一 函数定义域的求解	7
1.2.2 题型二 函数表达式的求解	7
1.2.3 题型三 反函数的求解	8
1.2.4 题型四 复合函数的求解	8
1.2.5 题型五 函数的四种基本特性	9
1.3 习题精选	10
1.4 习题详解	12
第 2 章 极限与连续	14
2.1 内容提要	14
2.1.1 数列的极限	14
2.1.2 函数的极限	14
2.1.3 无穷小量	14
2.1.4 无穷小量的阶	15

2.1.5	无穷大量	15
2.1.6	函数的连续性	15
2.1.7	函数的间断点	16
2.1.8	间断点的类型	16
2.1.9	子数列	16
2.1.10	重要的法则、定理	16
2.1.11	连续函数的性质	17
2.1.12	闭区间上的连续函数的性质	18
2.1.13	两个重要的结论	18
2.1.14	两个重要公式	18
2.2	典型例题分析	19
2.2.1	题型一 利用分析定义证明极限存在	19
2.2.2	题型二 利用极限的四则运算法则求极限	19
2.2.3	题型三 利用单侧极限的性质求极限	20
2.2.4	题型四 利用两个重要极限求极限	20
2.2.5	题型五 利用等价无穷小量替换求极限	21
2.2.6	题型六 证明极限不存在	21
2.2.7	题型七 利用极限的存在准则求极限	22
2.2.8	题型八 利用极限的性质求参数值或函数的表达式	23
2.2.9	题型九 函数的连续性问题	23
2.2.10	题型十 连续函数的等式证明问题	25
2.2.11	题型十一 综合问题	25
2.3	习题精选	27
2.4	习题详解	30
第3章	导数与微分	34
3.1	内容提要	34
3.1.1	导数的概念	34
3.1.2	导数的几何意义	35
3.1.3	可导与连续的关系	35
3.1.4	基本初等函数的导数公式	35
3.1.5	导数的四则运算法则	36
3.1.6	复合函数的求导法则	36
3.1.7	反函数的求导法则	36
3.1.8	隐函数的求导法则	36
3.1.9	对数求导法则	36
3.1.10	高阶导数	36
3.1.11	几个常用的高阶导数公式	37

3.1.12	微分的概念	37
3.1.13	导数与微分的相关结论	38
3.1.14	微分的四则运算法则	38
3.1.15	复合函数的微分法则	38
3.1.16	微分在近似计算中的应用	38
3.1.17	导数在经济学中的应用	39
3.2	典型例题分析	40
3.2.1	题型一 导数的定义问题	40
3.2.2	题型二 利用导数的定义求极限	41
3.2.3	题型三 利用导数的四则运算法则求导数	42
3.2.4	题型四 利用函数的可导性与连续性求参数值	43
3.2.5	题型五 反函数、复合函数的求导问题	43
3.2.6	题型六 分段函数的导数问题	44
3.2.7	题型七 导数的几何意义	44
3.2.8	题型八 导函数的几何特性问题	45
3.2.9	题型九 高阶导数问题	45
3.2.10	题型十 隐函数的求导问题	47
3.2.11	题型十一 导函数的连续性问题	48
3.2.12	题型十二 导数的经济学应用	48
3.3	习题精选	49
3.4	习题详解	52
第4章	中值定理与导数的应用	56
4.1	内容提要	56
4.1.1	中值定理	56
4.1.2	洛必达法则	57
4.1.3	函数的单调区间	57
4.1.4	函数的极值	58
4.1.5	函数的凹凸区间与拐点	58
4.1.6	曲线的渐近线	58
4.1.7	函数作图	59
4.2	典型例题分析	59
4.2.1	题型一 利用中值定理证明等式问题	59
4.2.2	题型二 利用洛必达法则求解标准类型不定式 $\left(\frac{0}{0}\text{与}\frac{\infty}{\infty}\right)$ 问题	60
4.2.3	题型三 利用洛必达法则求解 $0 \cdot \infty$ 与 $\infty - \infty$ 类型不定式问题	61
4.2.4	题型四 利用洛必达法则求解幂指函数类型 $0^0, \infty^0$ 及 1^∞ 不定式问题	61

4.2.5	题型五	洛必达法则的其他应用	63
4.2.6	题型六	不适合使用洛必达法则的极限问题	63
4.2.7	题型七	函数的单调性与极值问题	65
4.2.8	题型八	利用单调性证明不等式问题	65
4.2.9	题型九	利用函数单调性讨论函数的零点问题	66
4.2.10	题型十	利用极值证明不等式问题	66
4.2.11	题型十一	函数的凹凸性与拐点问题	67
4.2.12	题型十二	利用凹凸性证明不等式的问题	67
4.2.13	题型十三	函数图形的渐近线问题	67
4.2.14	题型十四	利用泰勒公式计算极限问题	68
4.2.15	题型十五	综合问题	69
4.3	习题精选		69
4.4	习题详解		72
第5章 不定积分			77
5.1	内容提要		77
5.1.1	不定积分的概念		77
5.1.2	不定积分的性质		77
5.1.3	基本积分公式表		77
5.1.4	第一类换元积分法(凑微分法)		78
5.1.5	第二类换元积分法		79
5.1.6	分部积分法		80
5.2	典型例题分析		80
5.2.1	题型一	利用积分基本公式计算不定积分	80
5.2.2	题型二	利用凑微分法计算不定积分	80
5.2.3	题型三	利用第二类换元积分法计算不定积分	81
5.2.4	题型四	利用分部积分法计算不定积分	82
5.2.5	题型五	对有理函数计算不定积分	83
5.2.6	题型六	有关三角函数的不定积分的求解	85
5.2.7	题型七	分段函数的不定积分问题	86
5.2.8	题型八	综合问题	86
5.3	习题精选		88
5.4	习题详解		91
第6章 定积分			97
6.1	内容提要		97
6.1.1	定积分的定义		97
6.1.2	定积分的几何意义与物理意义		98

6.1.3	定积分的性质	98
6.1.4	变上限积分函数	99
6.1.5	牛顿-莱布尼茨公式	99
6.1.6	定积分的换元法	99
6.1.7	定积分的分部积分法	99
6.1.8	无穷限的广义积分	100
6.1.9	无界函数的广义积分	100
6.1.10	Γ 函数	100
6.1.11	定积分的几何应用	101
6.1.12	定积分的经济应用	102
6.1.13	几个重要的结论	102
6.2	典型例题分析	102
6.2.1	题型一 利用几何意义计算定积分	102
6.2.2	题型二 有关定积分性质的问题	103
6.2.3	题型三 变限积分问题	103
6.2.4	题型四 利用换元法、分部积分法求解定积分	105
6.2.5	题型五 利用奇偶性、周期性计算定积分	107
6.2.6	题型六 分段函数积分问题	107
6.2.7	题型七 利用定积分的定义求极限	108
6.2.8	题型八 积分等式问题	109
6.2.9	题型九 积分不等式问题	110
6.2.10	题型十 广义积分问题	111
6.2.11	题型十一 积分的应用问题	112
6.3	习题精选	113
6.4	习题详解	116
第 7 章	多元函数微积分学	122
7.1	内容提要	122
7.1.1	二元函数的定义	122
7.1.2	二元函数的极限与连续	122
7.1.3	偏导数	123
7.1.4	全微分	123
7.1.5	高阶偏导数	124
7.1.6	复合函数求导法则	125
7.1.7	隐函数求导法则	125
7.1.8	二元函数的极值	126
7.1.9	二重积分的概念	127
7.1.10	二重积分的性质	127

7.1.11	利用直角坐标系计算二重积分	128
7.1.12	利用极坐标计算二重积分	129
7.2	典型例题分析	130
7.2.1	题型一 二元函数表达式的求解问题	130
7.2.2	题型二 函数的定义域的求解	130
7.2.3	题型三 二元函数极限的存在性问题	131
7.2.4	题型四 偏导数的求解问题	131
7.2.5	题型五 利用定义讨论函数在某点处是否可微	132
7.2.6	题型六 全微分的求解问题	133
7.2.7	题型七 复合函数的偏导数的证明与计算	133
7.2.8	题型八 抽象复合函数的高阶偏导数的求解问题	134
7.2.9	题型九 隐函数偏导数的求解问题	134
7.2.10	题型十 函数的无条件极值问题	135
7.2.11	题型十一 实际应用题	135
7.2.12	题型十二 二次积分的换序问题	136
7.2.13	题型十三 二重积分的求解问题	137
7.2.14	题型十四 利用极坐标计算二重积分	138
7.3	习题精选	139
7.4	习题详解	146
第8章	无穷级数	159
8.1	内容提要	159
8.1.1	无穷级数的概念	159
8.1.2	无穷级数的性质	160
8.1.3	常见级数的敛散性	160
8.1.4	正项级数敛散性的判别法	160
8.1.5	任意项级数的敛散性	161
8.1.6	函数项级数的概念	162
8.1.7	幂级数的概念	162
8.1.8	幂级数的和函数的性质	163
8.1.9	函数的幂级数展开	163
8.1.10	常见的麦克劳林公式(函数在 $x_0=0$ 处的泰勒展开公式)	163
8.2	典型例题分析	164
8.2.1	题型一 利用定义判定级数的敛散性	164
8.2.2	题型二 利用级数性质判定级数的敛散性	164
8.2.3	题型三 利用比较判别法判定级数的敛散性	165
8.2.4	题型四 利用比值判别法判定级数的敛散性	166
8.2.5	题型五 利用根值判别法判定级数的敛散性	166

8.2.6 题型六 级数的条件收敛与绝对收敛问题	167
8.2.7 题型七 求幂级数的收敛域与和函数	167
8.2.8 题型八 利用间接展开法将函数展开成幂级数	171
8.3 习题精选	172
8.4 习题详解	176
第9章 微分方程	183
9.1 内容提要	183
9.1.1 微分方程的概念	183
9.1.2 微分方程的解与初值条件	183
9.1.3 一阶微分方程及解法	183
*9.1.4 可降阶的高阶微分方程及解法	185
*9.1.5 二阶线性微分方程	186
9.2 典型例题分析	187
9.2.1 题型一 判断函数是否为方程的解	187
9.2.2 题型二 一阶微分方程的求解问题	188
9.2.3 题型三 可降阶的高阶线性微分方程的求解	190
9.2.4 题型四 二阶线性齐次微分方程的求解	191
9.2.5 题型五 二阶线性非齐次微分方程的求解	191
9.3 习题精选	192
9.4 习题详答	195

第二部分 模拟试题及详解

模拟试题一	207
模拟试题二	209
模拟试题三	212
模拟试题四	215
模拟试题五	217
模拟试题六	219
模拟试题七	221
模拟试题八	223
模拟试题九	225
模拟试题十	227

模拟试题十一	230
模拟试题十二	233
模拟试题十三	236
模拟试题十四	238
模拟试题十五	240
模拟试题十六	243
模拟试题十七	246
模拟试题十八	249
模拟试题十九	251
模拟试题二十	253
模拟试题详解	255
模拟试题一详解	255
模拟试题二详解	257
模拟试题三详解	260
模拟试题四详解	262
模拟试题五详解	265
模拟试题六详解	267
模拟试题七详解	270
模拟试题八详解	272
模拟试题九详解	275
模拟试题十详解	277
模拟试题十一详解	279
模拟试题十二详解	283
模拟试题十三详解	286
模拟试题十四详解	290
模拟试题十五详解	293
模拟试题十六详解	296
模拟试题十七详解	299
模拟试题十八详解	302
模拟试题十九详解	306
模拟试题二十详解	309
参考文献	313

第一部分

同步练习

函 数

1.1 内容提要

1.1.1 函数的定义

设 D 为一个非空实数集, 如果存在一个对应法则 f , 使得对于每一个 $x \in D$, 都能由 f 唯一确定一个实数 y 与之对应, 则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数, 记作 $y = f(x)$, 其中, x 称为自变量, y 称为因变量, 实数集 D 称为函数的定义域, 也可记为 $D(f)$ 或者 D_f . 集合 $\{y | y = f(x), x \in D_f\}$ 称为函数的值域, 一般记为 $Z(f)$ 或者 Z_f .

定义域和对应法则是函数的两要素, 值域由定义域和对应法则确定. 两个函数相同的充要条件是定义域与对应法则分别相同, 因此判断两个函数是否相同, 只需验证函数的定义域与对应法则是否分别相同, 而与自变量、因变量的符号没有关系.

如果函数没有明确给出定义域, 则其定义域一般默认为使得分析表达式有意义的自变量的取值范围.

函数的表示方法主要有公式法、图示法以及表格法等, 其中公式法是函数关系表示的一种主要形式.

1.1.2 分段函数

根据函数的定义, 在表示函数时, 并不要求在整个定义域上都用一个数学表达式来表示. 事实上, 在很多问题中, 常常遇到一些在定义域的不同子集上具有不同表达式的情况, 习惯上把这类函数叫做分段函数.

例如符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

是一个分段函数.

注 分段函数在其整个定义域上是一个函数,而不是几个函数.

1.1.3 函数的基本特性

函数的基本特性主要有四种,即奇偶性、单调性、周期性和有界性.

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于 $\forall x \in D$,恒有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**;如果对于 $\forall x \in D$,恒有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

奇函数的图像关于坐标原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.需要注意的是:函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,因此如果函数的定义域关于原点不对称,则该函数不具有奇偶性.

奇、偶函数的一些常用结论:

- (1) 常函数为偶函数;
- (2) 有限个奇函数的代数和为奇函数,有限个偶函数的代数和为偶函数;
- (3) 奇函数与偶函数的乘积为奇函数;
- (4) 奇数个奇函数的乘积为奇函数,偶数个奇函数的乘积为偶函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在某个区间 D 上有定义,对于 $\forall x_1, x_2 \in D$,且 $x_1 < x_2$,有:

- (1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 D 单调增加(单调递增);
- (2) 若 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 D 单调减少(单调递减).

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ,如果存在一个正数 T ,使得对任意一个 $x \in D$,有 $(x \pm T) \in D$ 且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立,则称该函数为**周期函数**. T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**,满足上式的最小的正数 T_0 称为函数的**最小正周期**,通常我们所说的函数的周期指的是函数的最小正周期.

周期函数的一些常用结论:

- (1) 若 $f(x)$ 的周期为 T ,则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$, $a \neq 0$;
- (2) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期均为 T ,则 $f(x) \pm g(x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,若存在正数 M ,使得对于 $\forall x \in D$,恒有 $|f(x)| \leq M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界,否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.