中学数学专题丛书

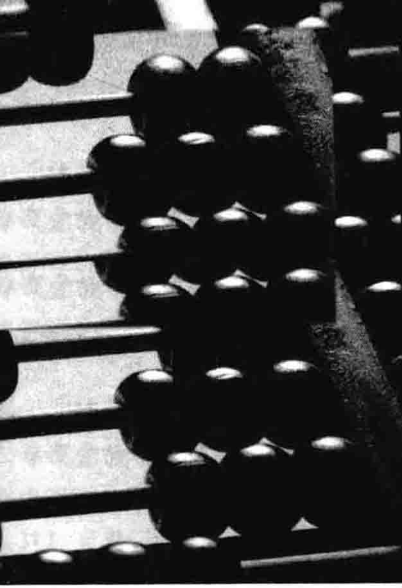
叶尧城 主编

彭家麒 编著

复数

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU
湖北教育出版社

3



中学数学专题丛书

叶尧城 ·主编

复数

彭家麒 编著

3

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

复数/彭家麒编著.—武汉:湖北教育出版社,2001
(中学数学专题丛书/叶尧城主编)
ISBN 7-5351-3159-X

Ⅰ.复… Ⅱ.彭… Ⅲ.复数-中学-教学参考资料
Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 078200 号

出版 发行:湖北教育出版社　武汉市青年路 277 号
邮编:430015　传真:027-83619605
网　址:http://www.hbedup.com　邮购电话:027-83669149

经　销:新　华　书　店
印　刷:湖北新华印务有限公司　(430034·武汉市解放大道 145 号)
开　本:787mm×1092mm　1/32　8 印张
版　次:2002 年 4 月第 1 版　2002 年 7 月第 2 次印刷
字　数:155 千字　印数:5 001-8 000

ISBN 7-5351-3159-X/G·2564　定价:10.50 元

总　序

随着素质教育的深入推进,需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁,以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建?改革教材成为了人们选择的突破口!当前,国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用,新教材在"为所有的学生打好共同基础"上将有所作为。然而,我国幅员辽阔,地区间的教育水平的差异大,个体间学习水平的差异大。如何真正地体现"以学生发展为本",发展学生的个性特长,让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高,还需要通过特定的教学过程来完成,其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的"检测题"、"同步练习"、"习题集"等)。因此,我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物,以专题讲座的形式,帮助学生了解知识的发生、发展过程,学会分析、解决问题的思想方法,深化、拓宽相关知识。

有鉴于此,我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有18个小册子,各册相对独立又相互联系,小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触,介绍一点数

学史料,有助于学生吸收各种不同的数学经验,理解各种不同的数学思想观点,体会数学的人文价值;着力反映知识的纵横联系,并以范例的形式予以说明;精选典型例题,揭示重难点,说明重在何处,难在哪里,如何理解,着重分析解题思路,阐释思想方法;选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题,引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题,供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生,可系统阅读,也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲,该套丛书具有如下特点:

1. **帮助学生夯实基础**。通过知识精讲、典例剖析、归纳小结,落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力**。精选思想性强的综合题,启迪学生的思维,开阔学生的思路,落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用**。精选密切联系生活实际和社会实践的应用题,促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新**。精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题,培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功**。选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型,有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩,走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试,难免出现这样或那样的疏漏和不足,敬请读者提出批评和建议,以便再版时修改,使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

目录

第一章
复数的概念

一、虚数的形成

本节简要地介绍了虚数形成的历史.

16 世纪,欧洲人在用配方法解二次方程时,碰到要求任何数的平方根,尤其是求负数的平方根的问题.

1545 年,卡当(Girolamo Cardano,1501 ~ 1576,意大利学者)在他所著《大术》一书中,研究了这样一个问题:"把 10 分成两部分,使其乘积为 40",列出方程是 $x(10-x)=40$,他求得的根为 $5+\sqrt{-15}$与 $5-\sqrt{-15}$.在同一本书中,卡当还发表了他的解一元三次方程 $x^3+px+q=0$(p,q 都是实数)的著名公式

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

但根据这个公式解方程时,却产生了一个当时意想不到的困难.例如,在解方程 $x^3=15x+4$ 时,由上面公式得

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

可是这个方程显然可以被 4 和另外两个实数值(知道原方程

$x^3-15x-4=0$ 的一个根为 $x=4$ 后,运用除法或因式分解,把 $x^3-15x-4=0$ 化成 $x-4$ 与一个二次三项式的积,利用一元二次方程求根公式,很容易求出原方程的另外两个实数根)所满足.这一切令人十分困惑,以致卡当说,一定有一种新型的数(复数)存在.

1632 年,笛卡尔(René Descartes,1596 ~ 1650,法国数学家)在解方程中,把方程的根区分为实根和虚根,给这种负数的平方根取名叫虚数(imaginaries,虚的,和 realles,实的相对),他也给出了复数(complex numbers)的名称.但牛顿不承认复数,可能是因为它们缺乏物理意义.莱布尼茨虽在形式运算中使用复数,但他也不理解复数的性质,而说:"那个我们称之为虚的 -1 的平方根,是圣灵在分析奇观中的超凡显示,是介于存在与不存在之间的两栖物,是理想世界的瑞兆."

历史进入了 18 世纪,由于对积分技术的研究,又涉及到虚数,取得了一些关于虚数的成果.

1702 年,伯努利(John Bernoulli,1667 ~ 1748,瑞士数学家)在科学院《纪要》上发表了以下事实:为了计算积分 $\int \frac{a^2}{a^2-x^2}dx$,引入部分分式 $\frac{a^2}{a^2-x^2}=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$,从而立即求出积分.用此法计算 $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ 时,部分分式法就导致计算积分 $\int \frac{1}{px+q}dx$,其中 p 和 q 可能是虚数.由此引起对虚数的对数的争论,使对虚数的理解有了很大意义的进展.1714 年,

科茨(Cotes.R,1682~1716,德国数学家)发表了定理

$$\sqrt{-1}\varphi=\log_e^{(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}.$$

1722年,棣莫弗(De Moivre,1667~1754,法国数学家)得到公式

$$(\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi\pm\sqrt{-1}\sin n\varphi$$

其中 n 为正整数.1743年,欧拉(Leonhard Euler,1707~1783,瑞士数学家)发现了

$$\cos S=\frac{e^{\sqrt{-1}S}+e^{-\sqrt{-1}S}}{2},$$

$$\sin S=\frac{e^{\sqrt{-1}S}+e^{-\sqrt{-1}S}}{2\sqrt{-1}},$$

1748年他又给出了著名公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

特别地,$\theta=\pi$ 时,有 $e^{i\pi}=-1$,即 $e^{i\pi}+1=0$

克莱茵认为这是整个数学中最卓越的公式之一,它将数学中五个重要的数 $1,0,i,\pi,e$ 融为一体.1777年,欧拉在递交给彼得堡科学院的论文《微分公式》中,首次用 i^2 表示 -1.

真正对虚数作出合理解释的是末塞尔(Caspar Wessel,1745~1818,挪威学者).1797年,未塞尔向丹麦科学院递交论文《方向的解析表示,特别应用于平面与球面多边形的测定》,其中用 $+1$ 表示正方向的单位,$+q$ 表示另一种单位,方向与前者垂直且有相同的原点,文中并且有 $\sqrt{-1}=q$ 及 $\cos\upsilon+q\sin\upsilon$ 等记法.除了虚数单位的符号不同之外,和现代表示法一致.

高斯(Gauss Card Friedrich,1777~1855,德国数学家)在1799

年代数基本定理的证明中使用了复数,并假定了直角坐标系上的点与复数的一一对应,但直到1831年才将 $a+bi$ 表示为平面上的点 (a,b),而且阐述了复数的几何加法和乘法,同时他还指出在这个几何表示中人们可以看到复数直观意义已经完全建立起来了,不需要增加什么就可以在算术领域中采用这些量.几何表示使人们克服了对虚数的神秘印象,从而对复数有了新的看法.

但是一种理论过于依赖几何直观,其基础是不牢固的,于是建立复数理论的逻辑基础,成了数学家们的新追求.

1837年,哈密尔顿(Hamilton,1805~1865,英国数学家)在文章《共轭函数及作为纯粹时间的科学的代数》中指出,复数 $a+bi$ 不是 $2+3$ 意义上的和,它只不过是实数的有序偶 (a,b),并用有序偶定义四则运算,如设 $a+bi$ 与 $c+di$ 是两个复数,则

$$(a,b)\pm(c,d)=(a\pm c,b\pm d),$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)(c,d\text{ 不同时为零}).$$

通常的结合律、交换律及分配律都能用有序偶推导出来.这样,复数理论的逻辑基础终于在实数的基础上牢固地建立起来了.

随着生产的发展,复数在数学和其他有关科学技术中日益起着巨大的作用,在19世纪中叶以后,对复数的研究已逐渐发展成为一个庞大的数学分支——复变函数论.

二、复数的概念

本节内容是复数的基础，对后面的学习有着很重要的作用.要学好本节内容，必须理解复数的有关概念和分类，掌握两个复数相等和互为共轭复数的充要条件.

1. 虚数单位 i

(1)它的平方等于 -1，即

$$i^2=-1;$$

(2)实数可以与它进行四则运算.进行四则运算时，原有的加乘运算律仍然成立(这是数集扩充的原则之一).

例1 计算$\dfrac{1}{3i+\dfrac{1}{2i+\dfrac{1}{i}}}$

分析 由 i 的规定知，$\dfrac{1}{i}=-i$，将它代入式中计算即可.

解 原式$=\dfrac{1}{3i+\dfrac{1}{2i-i}}=\dfrac{1}{3i+\dfrac{1}{i}}=\dfrac{1}{3i-i}$

$$=\frac{1}{2i}=\frac{1}{2}\cdot(-i)=-\frac{i}{2}$$

例2 计算

①$i+i^3+i^5+\cdots+i^{33}$

②$1+2i+3i^2+\cdots+(4n+1)i^{4n}$

分析 本题要用好 $i^n(n\in Z)$值的周期性:

$$i^{4n}=1, i^{4n+1}=i,$$
$$i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i$$

因此,可把算式中各加数适当分组,找出各组求和的共同规律,使运算简化;或者利用数列求和的基本方法来化简求值.

解 ①原式 $=(i+i^3)+(i^5+i^7)+\cdots+(i^{29}+i^{31})+i^{33}$ $=[i+(-i)]+[i+(-i)]+\cdots+[i+(-i)]+i=i.$

②设 $S=1+2i+3i^2+\cdots+(4n+1)i^{4n}$,则

$iS=i+2i^2+\cdots+4n\cdot i^{4n}+(4n+1)i^{4n+1}$.两式相减,得

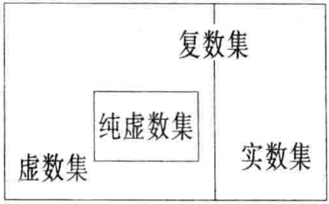
$$\begin{aligned}(1-i)S&=1+i+i^2+\cdots+i^{4n}-(4n+1)i^{4n+1}\\&=\frac{1-i^{4n+1}}{1-i}-(4n+1)i^{4n+1}\\&=1-(4n+1)i\end{aligned}$$

故 $S=\dfrac{1-(4n+1)i}{1-i}=2n+1-2ni$

2. 复数及其分类

形如 $a+bi(a,b\in R)$的数叫做复数,a 与 b 分别叫做复数的实部与虚部,全体复数所成的集合,用字母 C 来表示.

复数 $a+bi$ 当 $b=0$ 时为实数,当 $b\neq0$ 时为虚数,当 $b\neq0$ 且 $a=0$ 时为纯虚数.实数集、虚数集、纯虚数集、复数集之间的关系可以用下页图表示.



例 3 m 取何实数时,复数 $z=\dfrac{m^2-m-6}{m+3}+(m^2-2m-15)i$ 是实数?是虚数?是纯虚数?

分析 运用复数分类确定参数时,必须明确参数为实数这一条件,并能分清实部、虚部.

解 z 为实数时,必有

$$\begin{cases} m^2-2m-15=0 \\ m+3\neq 0 \end{cases}$$

解得 $m=5$,即当 $m=5$ 时,z 为实数.

z 为虚数时,必有

$$\begin{cases} m^2-2m-15\neq 0 \\ m+3\neq 0 \end{cases}$$

解得 $m\neq 5$ 且 $m\neq -3$,即 $m\neq 5$ 且 $m\neq -3$ 时,z 是虚数.

z 为纯虚数时,必有

$$\begin{cases} m^2-m-6=0 \\ m^2-2m-15\neq 0 \\ m+3\neq 0 \end{cases}$$

解得 $m=3$ 或 $m=-2$,即 $m=3$ 或 $m=-2$ 时,z 为纯虚数.

例 4 复数 $z=(1+i)m^2-(3+5i)m-2(2+3i)$,$m\in R$.试分别求出满足下列条件的 m 值:①z 为纯虚数;②$z=0$.

分析 先将给定复数 z 写成 $a+bi(a,b\in R)$的形式,再根据题设,利用有关概念列出并求解方程组.

解 $z=(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$

$=(m-4)(m+1)+(m-6)(m+1)i$

①当$\begin{cases}(m-4)(m+1)=0\\(m-6)(m+1)\neq0\end{cases}$即 $m=4$ 时,z 为纯虚数.

②当$\begin{cases}(m-4)(m+1)=0\\(m-6)(m+1)=0\end{cases}$即 $m=-1$ 时,$z=0$.

例5 求 θ,使复数 $z=(2\sin^2\theta-\sin\theta)+(3\tan^2\theta-1)i$ 是:①实数;②纯虚数.

分析 复数 z 的实部、虚部是用三角函数的形式给出的,按照题目要求得到三角等式(或三角不等式),解之即得.

解 ①由 $3\tan^2\theta-1=0$,得 $\tan\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore\theta=k\pi\pm\frac{\pi}{6}(k\in Z)$时,$z$ 是实数.

②由$\begin{cases}2\sin^2\theta-\sin\theta=0\\3\tan^2\theta-1\neq0\end{cases}$得$\begin{cases}\sin\theta=0\text{ 或 }\sin\theta=\frac{1}{2},\\\tan\theta\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}$

$\therefore\theta=k\pi(k\in Z)$时,$z$ 是纯虚数.

3. 复数相等

如果两个复数的实部与虚部分别相等,就说这两个复数相等,即若 $a,b,c,d\in R$,则

$$a+bi=c+di\Longleftrightarrow a=c,b=d.$$

特别地,

$$a+bi=0 \Longleftrightarrow a=b=0.$$

(1)利用复数相等的充要条件,可将复数问题转化为实数问题来处理,体现了化归的数学思想.

例6 已知$(2x-1)+i=y-(3-y)i$,x、$y\in R$,求 x 与 y.

解 根据复数相等的定义,得方程组

$$\begin{cases}2x-1=y\\1=-(3-y)\end{cases}$$

$\therefore \quad x=\dfrac{5}{2}, y=4.$

点评 应用复数相等的定义解题时必须准确判断实部、虚部,否则将出错,如将题中"x、$y\in R$"的条件换成:$x\in R$,y 是纯虚数,则本题应这样来解.

设 $y=bi$,$b\in R$ 且 $b\neq 0$,则$(2x-1)+i=bi-(3-bi)i$,即$(2x-1)+i=-b+(b-3)i$,于是有

$$\begin{cases}2x-1=-b\\1=b-3\end{cases}$$

解得 $x=-\dfrac{3}{2}$,$b=4$,因而 $y=4i$.

例7 若$(3-10i)y+(-2+i)x=1-9i$,求实数 x,y 的值.

分析 先将等式左边整理成复数 $a+bi(ab\in R)$的形式后,再利用复数相等的充要条件得到关于 x,y 的方程组.

解 原等式可整理为$(3y-2x)+(-10y+x)i=1-9i$,则

$$\begin{cases}3y-2x=1\\-10y+x=-9\end{cases}$$

$\therefore x=y=1.$

例 8 已知关于 x,y 的方程组

$$\begin{cases}(2x+1)+i=y+(3-y)i & ①\\(2x+ay)-(4x-y+bi)=9-8i & ②\end{cases}$$

有实数解,求实数 a,b 的值.

分析 先通过①式求出 x,y,再代入②式中求 a,b.

解 $\because x,y\in R$,根据复数相等的充要条件,由方程①得

$$\begin{cases}2x+1=y\\1=(3-y)\end{cases}$$

$\therefore x=\frac{1}{2},y=2.$

代入方程②,得 $(1+2a)-bi=9-8i$.

$\because a,b\in R.$

$$\therefore\begin{cases}1+2a=9\\-b=-8\end{cases}$$

$\therefore a=4,b=8.$

例 9 已知关于 x 的方程 $x^2+(1-2i)x+(3m-i)=0$ $(m\in R)$有实根,求这个实根和 m 的值.

分析 方程的实根必满足方程,设 $x=x_0$ 为方程的实根,代入整理后得 $c+di(c,d\in R)$的形式,再由复数相等的充要条件,可得关于 x_0 与 m 的方程组.

解 设 $x=x_0$ 是原方程的一个实根,则

$$x_0^2+(1-2i)x_0+(3m-i)=0$$