Mathematical Principles of Fractance Approximation Circuits

分抗逼近电路之数学原理

袁 晓 著

科 学 出 版 社

分抗逼近电路之数学原理

Mathematical Principles of Fractance Approximation Circuits

袁 晓 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书的基本目的是试图探索并建立表征与分析、理解与构造分抗（元）、分抗逼近电路以及分数阶电路与系统等的一般数学原理与方法. 内容包括分抗概念及其在蔡氏公理化元件系中的位置关系、分抗逼近电路与分抗有理逼近、分抗与分抗逼近电路的性能分析、Liu 分抗的运算振荡现象与逼近性能分析、半阶分形分抗逼近电路的数学原理、分抗有理逼近的数学原理, 以及分抗完美阶数空间的数学理解与思考、问题与猜想.

本书是作者及其所带领的研究团队近年来在分数阶微积分理论与应用（特别是分数阶数字滤波器理论与设计、分数阶微积分在图像信号分析与处理中的应用）、分数阶电路与系统理论（特别是分抗元、分抗逼近电路理论）等领域探索研究的部分最新成果的集成与提炼. 本书可供自然科学与工程技术领域中的科研人员、高等院校理工科教师、研究生, 以及对自然与科学感兴趣的人士阅读.

图书在版编目（CIP）数据

分抗逼近电路之数学原理/袁晓著. —北京：科学出版社，2015.6

ISBN 978-7-03-044631-2

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①袁… Ⅲ. ①逼近应用–电路分析 Ⅳ. ①TM33 ②O174.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 124612 号

责任编辑：杨 岭 孟 锐 / 责任校对：胡小洁
责任印制：余少力 / 封面设计：墨创文化

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

成都创新包装印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 6 月第 一 版 开本：B5（720 × 1000）
2015 年 6 月第一次印刷 印张：17
字数：345 000

定价：89.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

众所周知, 数学是解决与理解现实世界中实际问题最卓越的工具. 与此同时, 傅里叶“对自然界的深刻研究是数学最富饶的源泉”思想, 不仅促进数学本身不断向前发展壮大, 而且指导人们在科学研究与工程技术实践等领域发现数学并不断取得丰硕的成果.

“如果你能计算, 你就能理解了.”

本书的基本目的是试图探索并建立表征与分析、理解与构造分抗（元）、分抗逼近电路以及分数阶电路与系统等的一般数学原理和方法.

书中所要论述的首要概念——**分抗**(fractance), 是**分数阶阻抗**(fractional order impedance）的简称. 它是**分数阶元件**（fractional order element, FOE）在电磁学、电气电子学、信号与信息处理、控制理论等诸多领域的称谓. 用数学语言, 分抗就是具有**分数阶微积分**（fractional order calculus, 简称**分数微积分** fractional calculus）运算功能的电子元器件或系统. 使用分抗器件, 就可以设计与构造分数阶控制系统, 实现具有分数微积分运算性能（线性、非线性）的电路与系统——**分数阶电路与系统**.

分数阶电路与系统、分数阶信号与系统、分数阶控制、分数阶信号分析与处理、分数维动力学①等, 是一个正逐渐显露于世人面前的多学科交叉的、新的、广袤而奇妙深邃的研究领域.

分数阶系统（fractional order system）是 21 世纪的系统.

分数微积分概念与经典的**整数（阶）微积分**（即通常意义的微积分概念, 人们耳熟能详的一阶微分、二阶微分……, 一次积分、二次积分……）概念一样古老. 早在 1695 年微积分创始人之一的**莱布尼茨**（1646—1716, 德国数学家、物理学家、哲学家）与**洛必达**（1661—1704, 法国数学家）的通信中就已论及将整数阶导数（或整数阶微分）推广到非整数阶情形意味着什么的问题.

半阶导数（或半阶微分）是什么? 半次积分是什么?

“It will lead to a paradox, from which one day useful consequences will be drawn.”

---

① 分数维动力学（fractional dynamics）——分数阶微积分在粒子、场及介质动力学等中的理论与应用, 特别是分数维非线性系统的建模、分析、仿真, 分形分布物质体系的分数连续模型, 长程作用现象与过程, 分数空间动力学, 分数时间动力学, 分数量子力学等.

三个多世纪以来，分数微积分理论与应用的研究与发展主要局限于纯数学之中，或快或慢地向前发展，至今已逐渐形成一个重要的数学分支．但在数学之外，特别是物理、化学、生物、医学、工程技术等领域，近百年来才零零星星受到人们的关注．直到20世纪下半叶，人们陆陆续续在众多领域（如电磁学、电气电子学、电解化学、连续介质力学、地震学与流变构造地质学、生物工程、控制理论、材料科学、混沌系统与过程、分形结构与现象、粒子与场及介质动力学、分数维非线性系统、信号与信息处理……）发现，使用分数微积分，比起经典的整数微积分更能准确地表征或建模人们所面对的现实世界中的实际问题．

其实，自然界并不完全是整数阶、整数维、纯线性的自然界，更广泛和现实的是分数（阶）的世界，是分维分形的世界，是非线性的世界．

21 世纪初，分数微积分受到人们广泛关注，而成为几乎所有使用微积分领域的研究热点．在此背景下，研究分抗、设计与制造分抗器件、分数阶控制理论与应用、分数阶电路与系统等的基本概念与理论显得尤为重要与急迫．

有了分抗器件，再结合有源器件（如运算放大器、OTA 器件、MOSFET-C、OTA-C、开关电容、CCⅡ、CCCⅡ等），就可以实现模拟的分数微分和积分电路．有了分抗器件，就能够实现分数阶电路与系统、实现分数阶控制等．有了分抗器件，就能够用电子信息的理论、技术与方法，很方便地模拟与研究自然界中各种各样的分数阶现象与过程、分维分形现象与过程、非线性系统中混沌现象与过程等．但在没有分抗元件的条件下，人们只能想方设法借助现有的器件来（近似）实现分抗的功能．或者观察分析各种各样的（无机的与有机的）物质材料、器件（或生物组织、器官等）、复杂的现实系统及其行为，以及大量的物理（特别是纳米物理）、化学、生物、医学、控制等领域的分数阶现象与过程，哪怕是在一定条件下或在一定频域范围内，建立分抗电路模型都是有益的．

本书所要考察的主要对象是**分抗逼近电路**．

像理想电容 C（1745 年荷兰 Von • 穆森布罗克发明莱顿瓶）、电阻 R（1826 年德国欧姆发现欧姆定律而提出电阻概念）、电感 L（1831 年英国法拉第制成铁芯线圈）和忆阻 M（1971 年美国科学家蔡少棠先生从理论上预测了描述电量与（电）磁通关系基本电路元件的存在性）[①]不存在一样，理想分抗 F 也是不存在的．更何况现在还没有现成的单个的、广谱的（电气电子）集总分抗器件．一种很自然的想法是利用现成的（无源的、有源的）电气电子元器件（特别是整数阶无源元件 R、C、L、M 等）组成电路，在一定精度下逼近理想的分抗元．这样的电路称为

① 2008 年美国 Hewlett-Packard 实验室的 Strukov、Snider、Steward、Williams 首次报道了忆阻器的实现（*The missing memristor found*，Nature，2008，453：80-83），研究成果震惊了国际电工电子技术世界，极大地唤起了人们对忆阻全方位的研究热潮．

分抗逼近电路（fractance approximation circuit），它在某个频带内具有理想分抗的电学性质与行为.

1892 年**亥维赛**（Heaviside, 1850—1925, 英国物理学家、数学家）将**拉普拉斯**（Laplace, 1749—1827, 法国数学家、天文学家、物理学家）变换运用于电机工程与电路理论, 发展出一套**运算微积**（operational calculus）概念与理论（但没给出相应的数学论证, 许多结果未经证明而采用, 因此曾被讥讽为“严格主义者的扫兴人”①），使分析复杂电路的运算简化为代数运算——**算子演算**！这为人们探索广义导数理论及其工程技术应用奠定了数学基础. 1920 年亥维赛在考察传输线理论时引入分数微分, 并在其著作《电磁理论》(3 卷, 1893—1921）中指出：理论上无限长的均匀 RC 电缆的输入阻抗是 $\sqrt{1/s}=s^{-1/2}$（在数学上称为负半阶算子或半阶积分算子），也就是说, 无限长 RC 传输线系统对被传输的电信号具有半阶（亦即半次)积分运算功能. 这可能是人们最先发现具有分数阶运算性能的物理实体系统. 同时, 这也为人们提供了一个 RC 链型分抗逼近电路的范例. 1936 年 Gemant 在纽约出版的杂志 *Physics*（第 7 期第 311 页）发表的论文中将亥维赛的运算微积与分数微分概念与理论应用于黏弹动力学实验分析与精密建模.

分抗逼近电路问题最早的研究可追溯到 20 世纪 60 年代初期, 美国堪萨斯州立大学的 Carlson 和 Halijak 关于半阶微分算子 $\sqrt{s}$、半阶积分算子 $\sqrt{1/s}$ 与分数算子 $(1/s)^{1/n}$（n 是大于或等于 2 的正整数）的有理逼近与电路建模工作, 以及 Dutta Roy 等对**恒相角阻抗**的分布与集总 RC 实现研究, 等等. 应当说他们的贡献, 对于分抗逼近电路的研究具有开创性的意义.

20 世纪 70 年代初期, 加拿大 Trent 大学的 Keith B. Oldham 研究团体, 根据电解分析化学过程中所发现的**新异极谱**（neopolarogram）的大量实验证实与深入理论分析, 提出半阶积分电解分析（semiintegral electroanalysis）理论, 引进一类具有负半阶运算特征的 RC 链分抗模型——**Oldham RC 链分抗逼近电路**, 并对该类电路的某些特例用传统的频域分析法进行了运算特征的理论考察.

分数阶微积分现象与过程就存在于自然界之中. 对自然界的深刻研究, 不仅是数学发现的最富饶源泉, 也是电路与系统发展的强劲推动力.

推动分抗逼近电路研究的原始力量, 很可能源自电磁理论、黏弹动力学、电解化学分析、分数阶控制系统理论与应用、生物化学、生物医学, 以及分形理论等诸多领域中的分数阶行为与现象、分形分维结构物质与功能材料、凝聚态物理与无序随机过程等的分数阶特性的理论描述与数学建模.

人们从各自不同的学科领域, 零零散散地提出了一些十分有效的分抗模型. 特

① “Wet blankets of rigorists” [6: 2].

别是 21 世纪以来, 分数微积分理论与应用研究热潮, 推动着分抗、分抗逼近电路、分数阶电路与系统、分数阶信号分析与处理、分数阶控制理论与应用、分数维动力学等向前发展. 它们迫切需要新概念、新方法、新理论、新技术的引领.

本书内容按顺序概括如下.

(1) 阐述分抗概念与分数阶电路与系统, 以及分抗在蔡氏公理化元件系中的位置关系.

(2) 简要钩沉分抗、分抗逼近电路(主要是分形分抗与分抗有理逼近问题)的研究、发展历程, 并对经典的分抗、分抗逼近电路进行概括总结与评论.

(3) 引进阶频特征函数、K 线图等全新概念表征分数阶元件(或器件)阻抗与分数阶系统传输函数的运算本质: **分数阶数**(运算阶)与**恒相性质**等. 提出分抗、分抗逼近电路性能分析的频域方法(使用**阶频特征**曲线、**相频特征**曲线等)与逼近性能指标(**K 线图**、**K 指标**、电路复杂度、逼近效益等), 并对众多经典的分形分抗逼近电路(特别是 Oldham 链、N-S 树、Carlson 格型、H 型、B 型、Sierociuk 链类、Haba 链类等)进行逼近性能分析与对比研究. 从数学原理上指出改善这些分抗逼近电路性能的方向与技术实现路径, 等等.

(4) 对 Liu 分形树与 Liu-Kaplan 分形链分抗逼近电路的运算振荡现象的研究与逼近性能分析, 并指出 Liu 分形分抗逼近所引出的一系列值得深入思考与进一步研究的课题.

(5) 在深入研究五类(Oldham 链、N-S 树、Carlson 格型、H 型与 B 型)负半阶分形分抗的迭代电路构造特点与数学特点(迭代函数、迭代方程等)基础之上, 提出对偶操作与对偶置换原理、有效迭代原理与技术等, 并用于分形分抗的构造, 得到一系列新型的分形分抗逼近电路, 指出分形分抗实现的诸多数学难题.

(6) 对诸多分抗有理逼近(特别是 Carlson 迭代、Oustaloup、Charef、Matsuda、连分式展开、二项式展开等有理逼近)问题进行深入研究, 提出满足运算有效性应当遵循的基本数学原则, 然后从数学原理与技巧等方面, 考察与理解这些逼近方法的性能并探讨广义化有关分抗有理逼近方法. 特别是任意分数阶算子 $s^{\pm j/n}$——完美阶数空间的有理逼近函数及其电路实现的数学理解与思考, 问题与猜想.

书中各部分或多或少给出了一些难题、猜想与值得进一步探索的课题.

电路与系统理论及其应用领域, 正在经历一次前所未有的巨大变革. 蔡氏公理化元件系理论与第四元件——忆阻元的 Williams TiO_2 纳米物理实体发明、混沌电路、分数阶电路与系统等, 是这场变革的基础. 本书试图论述的分抗、分抗逼近电路等问题仅是这场变革浪潮中一朵微小的浪花. 本团队的研究工作只是相关问题研究的一个初步开端, 期望能抛砖引玉, 共谋发展.

分抗逼近电路问题是具有挑战性的探索课题. 人们一步一步向前走来, 很不容易. 虽然极其艰辛, 但引人入胜. 它包含着丰富多彩的内容, 暗藏着自然

界奥妙深邃的机理．在这一领域，存在广袤的土地有待开垦，蕴藏着许多珍宝有待发掘．

作者才疏学浅，斗胆使用书名《分抗逼近电路之数学原理》而不胜其重．该题目牵涉广泛，是一个多学科交叉互联的研究课题，特别是分抗逼近电路的来源与建模、设计与构造，更是如此．数学、物理、化学、生物、医学等几乎无所不包．因此真正探索研究起来，才觉自己孤陋寡闻，时常举步维艰．虽然辛苦、寂寞，但时常快乐着，特别是在偶尔的茅塞顿开之时．

没有什么深刻的理论，只是在不停地试探与纠错，不断发展前行．

“在我们之外有一个巨大世界，它离开人类而独立存在，它在我们面前就像一个伟大而永恒的谜，然而至少部分是我们的观察和思维所能及的．对这个世界的凝视深思，就像得到解放一样吸引着我们，而且我不久就注意到，许多我所尊敬和钦佩的人，在专心从事这项事业中，找到了内心的自由和安宁．”①

不自量力而草撰拙作，疏漏之处在所难免．书中一些新概念、新观点、新方法等还很不成熟，需要完善与发展．祈望读者海涵、批评、指正．但愿读者阅读后有所收获．

“善不由外来兮，名不可以虚作．孰无施而有报兮，孰不实而有获？”②

谢谢，亲爱的读者．

袁　晓

2014 年 8 月

谨识于四川大学桃林村舍

---

① 1946 年爱因斯坦《自述》(爱因斯坦．爱因斯坦文集（增补本)．1 卷．许良英，李宝恒，赵立中，等，译．北京：商务印书馆，2009：2)．

② 屈原：九章·抽思．

致　　谢

本书部分内容源自成都市科技计划项目（项目编号：12DXYB255JH-002）的创新成果，在此表示衷心感谢．还要特别感谢四川省科技支撑计划项目（项目编号：2013SZ0071）对本书部分研究与出版的支持．

衷心感谢本书责任编辑孟锐老师．他周到细致的工作作风，严谨认真的工作态度令人难以忘怀．

在本书写作与出版过程中，亲爱的夫人何丽女士付出了许多辛勤劳动．感谢她的一贯支持与帮助、理解与鼓励．在开展分抗逼近电路理论研究过程中，时常与袁子同学进行讨论与切磋，特别是在编程遇到困难时．书中关于 Oldham 链、Carlson 格型、B 型、2h 型等分形分抗逼近电路阻抗零极点的解析求解就来自他的努力．与此同时，他对 Liu 分形分抗逼近电路，特别是关于 Liu-Kaplan 标度方程的去标度问题与求解问题也进行了积极思考．

衷心感谢岳母陈秀仙女士的长久关心与照顾．

谨以此书献给敬爱的父亲和母亲——袁英先生与陈隆惠先生，感激父母的育养教化导引之恩．

目　录

第 1 章　分抗概念与分数阶电路与系统

分抗，是**分数阶阻抗**的简称．它是**分数阶元件**在电磁学、电气电子学、信号与信息处理、控制理论等领域的称谓．用它可以设计与构造具有分数（阶）微积分运算功能（线性、非线性）的电路与系统——**分数阶电路与系统**．

分数阶电路与系统、分数阶信号与系统、分数阶控制、分数维动力学等，是一个正逐渐显露于世人面前的多学科交叉的、新的研究领域[1]．分数阶系统是 21 世纪的系统[2-6]．

众所周知，对于通常意义下的二端无源基本电路元件：电阻元 R、电容元 C、电感元 L 等，在理想的情况下，它们的阻抗 $Z(s)$ 可以统一表示为

$$Z(s)=F_{\mu}s^{\mu}\ . \tag{1.1}$$

式中，μ 是一个整数，称为阻抗的**阶数**(order)；s 是拉普拉斯变量：$s=\sigma+\mathrm{j}\Omega$，通常又称复频率，或**运算变量**（operational variable）．

式（1.1）中 F_{μ} 表示元件的集总特性常量．

（1）当阶数 $\mu=-1$ 时，$F_{\mu}=F_{-1}=1/C$，对应容性阻抗 $Z(s)=1/(Cs)=s^{-1}/C$——**−1 阶阻抗**，由理想电容元 C 来实现，对应的算符 s^{-1} 表示（一次）积分运算．

（2）当阶数 $\mu=0$ 时，$F_{\mu}=F_{0}=R$，对应电阻阻抗 $Z(s)=R=R\cdot s^{0}$——**0 阶阻抗**，由理想电阻器件或电阻元 R 来实现，对应的算符 s^{0} 表示恒等运算．

（3）当阶数 $\mu=+1$ 时，$F_{\mu}=F_{1}=L$，对应感性阻抗 $Z(s)=Ls$——**+1 阶阻抗**，由理想电感器件或电感元 L 来实现，对应的算符 s^{+1} 表示（一阶）微分运算．

式（1.1）中，阶数 μ 反映了算符 s^{μ} 的微积分**运算特性**（operational characteristics）．以上三种情形是最经典的基本电路元件——整数阶阻抗器件．

当阶数 μ 为非整数，即取 μ 为分数（当然从数学理论上可以取为任意实数或复数）时由什么器件来实现呢？分抗器件！这就是本章所要论述的概念与问题．

如何用电路来实现分抗的功能？实现它基于的数学原理是什么？就是本书所要尝试阐述与试图解决的核心问题——分抗逼近电路！

1.1　容性分抗与感性分抗

当μ的取值为非整数——分数，即有理数（$\mu\in\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$）时，式（1.1）表示的就

是分数阶阻抗, 1983 年 Méhautéy 和 Crépy[7]创造新词：fractance——**分抗**①概念来称呼它们, 以便与传统意义下的电阻、电容、电感等无源电气、电子集总元器件相区别[5: 278].

具有负分数阶运算特性的电容——**分数电容**（运算阶数 $-1<\mu<0$）如果存在, 其电学性质介于电阻与电容特性之间, 因此称为**容性分抗元**（capacitive fractor②）, 其阻抗称为**容性分抗**, 并用记号 C_μ 表示. 与分数电容相对应的是**分数电感**, 电学性质介于电阻与电感特性之间, 运算阶数 $0<\mu<1$, 称为**感性分抗元**（inductive fractor, 有些文献也称为“fractductor”[3: 35, 8]）, 并用记号 L_μ 表示. 这两种分抗元件在电路中分别用图 1.1（a）所示的两个电路符号表示.

容性分抗、感性分抗, 这两种具有不同运算性质的分抗元都有一个共同点, 即它们的阶数μ为分数（或实数）. 考虑到在电路中, 特别是微电子电路中, 人们尽力避免使用电感器件, 因此可以用容性分抗的电路符号来表示一般意义下（$0<|\mu|<1$）的分抗元件, 并用 F_μ 标记（或简记为 F）, 如图 1.1（b）所示.

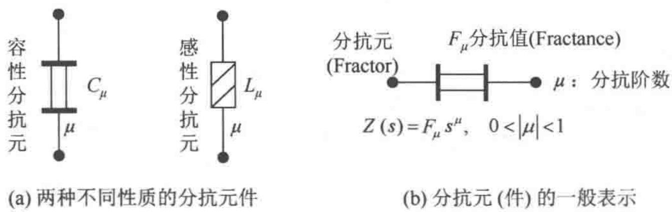


图 1.1 分抗的电路符号

分抗（容性分抗、感性分抗）在电工学、电子学等领域中完全可以看成电路的新元件类. 也许在不久的将来, 人们会制造出这样的元件, 并在电子元器件市场上就能购买得到.

（理想）分抗概念

$$Z^{(\mu)}(s)=F_\mu s^\mu \quad (0<|\mu|<1,\ s\in\mathbf{C}) \tag{1.2}$$

① fractance 一词的中文译名：**分抗**, 在作者所涉及的中文文献中, 是作者所带领的研究团队最早使用如此译名[31-39], 也许亲爱的读者还有更为准确的译名. 早在 2002 年, 作者在译注文献[5]与[6]时就开始使用“分抗”译名, 并开始考虑“分抗”的电路符号问题. 作者之后在相关研究生课程（如“现代数字信号处理”“子波分析与算法”“分数演算十讲”“分抗逼近电路”等）与本科课程“数字信号处理”中讲授与普及“分数阶微积分”“分抗”“分抗逼近电路”“分数阶数字微积滤波器”等概念与相关知识.

② 值得读者注意的是, 与新英语单词 fractor[8]（分抗元）相近的英语单词 fracton, 在分形理论中是“分形子”[53: 41, 215]意义. 分形子概念把分形与动力学过程联系了起来[53: 216, 143: 136]. 在早期有关“分抗（fractance）”研究的文献中, 人们曾从不同领域与不同研究角度出发, 使用过一些不同的名词来称呼“分抗（fractance）、分抗元（fractor）”,如“分数阶电容（fractional-order capacitor）”“恒相元（constant phase element）”等.

是电阻、电容、电感等概念的一种很自然的推广或拓展．它们之间的区别与联系在表 1.1 中给出．表中所给出的五类元件的阻抗都可统一地用式（1.2）表示．

表 1.1　经典无源电路元件与分抗的联系与区别

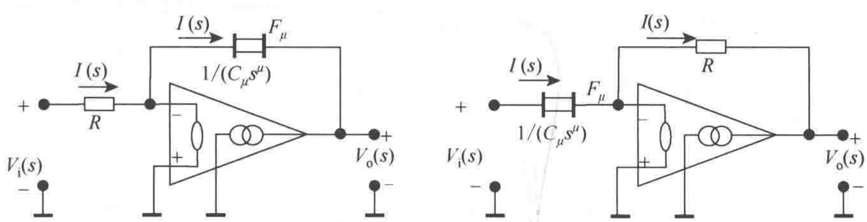
元件	标示符号	阶数μ	特征值 F_μ	阻抗 $Z^{(\mu)}(s)$	单位	量纲
电阻	R	0	$F_0=R$	R	欧姆(Ω)：$kg\cdot m^2/(A^2\cdot s^3)$	$L^2T^{-3}MI^{-2}$
电容	C	−1	$F_{-1}=\dfrac{1}{C}$	$\dfrac{1}{Cs}$	法拉(F)：$A^2\cdot s^4/(kg\cdot m^2)$	$L^{-2}T^4M^{-1}I^2$
电感	L	+1	$F_1=L$	Ls	亨利(H)：$kg\cdot m^2/(A^2\cdot s^2)$	$L^2T^{-2}MI^{-2}$
容性分抗	C_μ	$-1<\mu<0$	$F_\mu=1/C_\mu$	s^μ/C_μ	—	—
感性分抗	L_μ	$0<\mu<1$	$F_\mu=L_\mu$	$L_\mu s^\mu$	—	—

1.2　分数阶传输函数——分数阶电路与系统

分抗（容性分抗、感性分抗）器件与有源器件，如运算放大器等结合就能构成用于分数阶积分与分数阶微分运算的电路与系统．如图 1.2 所示由容性分抗（C_μ）与运算放大器构成的两个有源模拟运算电路，在理想的情况下，它们的（电压）传输函数可以统一写为

$$H(s)=\frac{V_i(s)}{V_o(s)}=K_\mu s^\mu,\quad -1<\mu<1, \tag{1.3a}$$

（式中，K_μ 是常数）并称为**简单分数阶传输函数**（simple fractional order transfer function），该系统也可称为理想的**分数微积器**（fractional differintegrator），它能够实现分数微积分运算．



(a) 分数阶积分电路　　(b) 分数阶微分电路

图 1.2　有源模拟分数阶微积运算电路（使用容性分抗）——分数微积器

从数学观点来看，理想分抗 $Z^{(\mu)}(s)=F_\mu s^\mu$（为了强调“理想（ideal）”概念与突出运算阶数μ，用符号 $I_\mu(s)=F_\mu s^\mu$ 来表示）与理想的简单分数传输函数 $H_\mu(s)=K_\mu s^\mu$

具有相同的意义. s^{μ}（$0<|\mu|<1$）是**分数微积算子**（fractional calculus operator, 简称**分数阶算子**或**分数算子** fractional operator）在复频域中的解析表示.

一般地, 如果网络函数或系统传输函数

$$H(s)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\beta_i s^{\mu_i}}{\sum_{i=0}^{m}\alpha_i s^{\eta_i}}\quad(\mu_i\in\mathbf{R},\ \eta_i\in\mathbf{R})\tag{1.3b}$$

中含有分数算子项就称为**分数阶传输函数**, 它对应于一个分数阶系统.

1.3 理想分抗、分数阶系统的频域特征与运算特征

频域特征, 又称频率响应. 在式（1.1）或式（1.2）中, 将拉普拉斯变量 s 用傅里叶频率变量Ω取代, 即取 $s=\mathrm{j}\Omega$（$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$）, 则得到理想分抗的频率特征函数

$$I_{\mu}(\Omega)=F_{\mu}(\mathrm{j}\Omega)^{\mu}\quad(0<|\mu|<1),\tag{1.4a}$$

式中, F_{μ}是与元件特性密切关联的一个（实）常数. 不失一般性, 可设 $F_{\mu}=1$.

显然, 分抗的频率特征函数是一个复变函数, 对于理想分抗可以写成

$$\begin{cases}A_{\mu}(\Omega)=|I_{\mu}(\Omega)|=F_{\mu}|\Omega|^{\mu}\\ \Theta_{\mu}(\Omega)=\dfrac{\mu\pi}{2}\mathrm{sgn}(\Omega)\end{cases}\quad(\Omega\in\mathbf{R},\ 0<|\mu|<1).\tag{1.4b}$$

式中, $A_{\mu}(\Omega)$ 和 $\Theta_{\mu}(\Omega)$ 分别称为μ阶理想分抗的**幅频特征函数**与**相频特征函数**（图 1.3（a）和（b））. 人们习惯上喜欢用**波特图**（Bode diagram）——双对数坐标图: $\lg A_{\mu}(\Omega)\sim\lg\Omega$ 来表征与图示幅频特征曲线. 为了叙述简洁, 使用记号

$$\Lambda_{\mu}(\Omega)=\lg A_{\mu}(\Omega)=\lg F_{\mu}+\mu\lg\Omega\quad(\Omega\in\mathbf{R}^{+},\ 0<|\mu|<1).\tag{1.5}$$

表示理想分抗或简单分数阶传输函数的幅频特征函数（或称**增益**[①]）.

由此可知, 理想分抗的幅频特征 $A_{\mu}(\Omega)$ 或 $\Lambda_{\mu}(\Omega)$ 由两个参量: 分抗的特征值F_{μ}和分抗的阶数μ完全确定. 而理想分抗的相位特征函数 $\Theta_{\mu}(\Omega)$ 则仅依赖于阶数μ, 与频率 Ω 无关. 因此, 人们也常将理想分抗称为**恒定相角元件**[1-4], 简称**恒相元**（constant phase element, CPE）, 并说它具有**恒相性质**（constant phase property）.

① **增益**（gain）: 通常在电路系统分析和设计、滤波器分析与设计以及诸多工程领域中使用 $\Lambda_{\mu}(\Omega)=20\lg A_{\mu}(\Omega)$ dB 并用波特图——双对数坐标图表示. 本书将等同地使用**增益**与**幅频特征（函数）**两个概念, 因为它们只相差一个乘性常数, 而并无本质差别.