

GAODENG SHUXUE
● 主编 谭飞

高等数学

目标练习与测试

MUBIAO LIANXI

YU

CESHI

高等数学

目标练习与测试

MUBIAO LIANXI

YU

CESHI

责任编辑 谢金海

封面设计 吴 钰

ISBN 7-81090-724-7



9 787810 907248 >

ISBN 7-81090-724-7/O·35 定价: 15.00元

高等数学目标练习与测试

主 编 谭 飞

副主编 武广金 叶润萍

图书在版编目(CIP)数据

高等数学目标练习与测试/谭飞主编. —苏州: 苏州
大学出版社, 2006. 8
ISBN 7-81090-724-7

I. 高… II. 谭… III. 高等数学-高等学校-教
学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 095750 号

内 容 提 要

全书分为上、下两篇. 上篇包括函数、极限与连续、一元函数微分学及一元函数积分学等内容; 下篇包括向量代数与解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数及微分方程等内容. 上、下篇各分为六章, 每章以重要知识结点, 按内容要求、基本题型、综合计算及应用题型、提高题型编排, 每章后配有测试卷, 每篇后配有教学进程表、考试复习大纲、期末考试模拟试卷及高等数学竞赛试卷.

本书适用于国家第二批、第三批录取的本科院校学生. 其中高等数学 A 是为学习工科类专业的学生准备的, 为与高等教育出版社出版的《高等数学》(同济五版)教材体例相符, 我们将任务书内容与教材目录作了对应; 高等数学 B 是为学习经管类等专业的学生准备的, 为与孟广武主编的由同济大学出版社出版的《高等数学》(经管类)教材体例相符, 我们将任务书内容也与该教材目录作了对应.

高等数学目标练习与测试

谭 飞 主编

责任编辑 谢金海

苏州大学出版社出版发行

(地址: 苏州市干将东路 200 号 邮编: 215021)

宜兴文化印刷厂印装

(地址: 宜兴市南漕镇 邮编: 214217)

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 11 字数 274 千

2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-81090-724-7/O·35 定价: 15.00 元

苏州大学版图书若有印装错误, 本社负责调换

苏州大学出版社营销部 电话: 0512-67258835

前 言

当前,许多高等学校以培养应用型科学技术人才为主要目标,针对这种具体情形,编者根据多年教学实践,遵循《工科类本科数学基础课程教学基本要求》(修订稿)的要求,编写了这本辅导书.

全书分为上、下两篇.上篇包括函数、极限与连续、一元函数微分学及一元函数积分学等内容,下篇包括向量代数与解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数及微分方程等内容.上、下篇各分为六章,每章以重要知识结点,按内容要求、基本题型、综合计算及应用题型、提高题型编排,每章后配有测试卷,每篇后配有教学进程表、考试复习大纲、期末考试模拟试卷及高等数学竞赛试卷.

本书遵循将知识结构与人的认知结构相统一的原则,力求在尊重学生个性发展的基础上激发学生的学习积极性与互动性,循序渐进地培养学生的素质能力.鉴于此,本书在编写中力图做到以下几点:

(1) 以显示微积分的直观性与广泛的应用性为侧重点,强调其重要的思想与方法,并以此构建脉络分明、清晰易懂的高等数学知识体系,便于学生理解学习进程与要求,明确学习任务.

(2) 注重知识纵向与横向的联系.针对每一个重要的概念,在内容要求的导引下,精心设计了基本题型、综合计算或应用题型、提高题型、测试题等几个环节,一环紧扣一环,便于学生根据自身情况有的放矢地进行学习和钻研,循序渐进地掌握知识,提高素质.

(3) 为增强学生在学习进程中的积极性与互动性,书中每题都附有分值与答案,便于学生自查与互查.同时,书中编制了一些讨论题、一题多问题、一题多解题,这有利于学生增进交流,共同探讨.

本书适用于国家第二批、第三批录取的本科院校学生.其中高等数学 A 是为学习工科类专业的学生准备的,为与高等教育出版社出版的《高等数学》(同济五版)教材体例相符,我们将任务书内容与教材目录作了对应;高等数学 B 是为学习经管类等专业的学生准备的,为与孟广武主编的由同济大学出版社出版的《高等数学》(经管类)教材体例相符,我们将任务书内容也与该教材目录作了对应.

书中自学部分,学习高等数学 A、B 的学生可不作要求;带 * 的部分,学习高等数学 B 的学生可不作要求.

参加本书编写的人员有:谭飞、武广金、叶润萍,由谭飞负责统稿.书中引用了多本《高等数学》教材与教辅材料中的习题,在此向各位作者表示感谢!

由于编者水平有限,书中的不当之处在所难免,敬请专家、同行与广大读者批评指正.

编 者
2006 年 8 月

目 录

上 篇

第一章 函数与极限	(1)
测试卷一	(8)
第二章 导数与微分	(11)
测试卷二	(15)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(18)
测试卷三	(22)
第四章 不定积分	(25)
测试卷四	(27)
第五章 定积分	(30)
测试卷五	(34)
第六章 定积分的应用	(37)
测试卷六	(39)
《高等数学》A(1)复习考试大纲	(45)
高等数学(A1)期末模拟试卷(一)	(46)
高等数学(A1)期末模拟试卷(二)	(49)
《高等数学》B(1)复习考试大纲	(54)
高等数学(B1)期末模拟试卷(一)	(55)
高等数学(B1)期末模拟试卷(二)	(58)

下 篇

第七章 空间解析几何与向量代数	(61)
测试卷七	(66)
第八章 多元函数微分法及其应用	(69)
测试卷八	(76)

第九章 重积分	(79)
测试卷九	(83)
第十章 曲线积分与曲面积分	(86)
测试卷十	(90)
第十一章 无穷级数	(93)
测试卷十一	(98)
第十二章 微分方程	(100)
测试卷十二	(104)
《高等数学》A(2)复习考试大纲	(109)
高等数学(A2)期末模拟试卷(一)	(110)
高等数学(A2)期末模拟试卷(二)	(114)
《高等数学》B(2)复习考试大纲	(120)
高等数学(B2)期末模拟试卷(一)	(121)
高等数学(B2)期末模拟试卷(二)	(124)
高等数学本科 A 类竞赛模拟试卷	(128)
高等数学本科 B 类竞赛模拟试卷	(132)
答案与提示	(135)

函数与极限

一、函数 (§ 1.1)

I 内容要求

(i) 在中学已有的函数知识的基础上,加深对函数概念的理解和函数性质(奇偶性、单调性、周期性和有界性)的了解.

(ii) 理解复合函数的概念,了解反函数的概念,了解分段函数的概念.

(iii) 记忆基本初等函数的图象,了解初等函数的概念,自学双曲函数及反双曲函数.

(iv) 学会建立简单实际问题中的函数关系式.

II 基本题型

(i) 有关确定函数定义域的题型

1. (4') $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域为 _____.

2. (4') $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\ln(2-x)}$ 的定义域为 _____.

3. (4') $y = \arcsin(2x-3)$ 的定义域为 _____ ()

A. (1,2) B. [1,2) C. (1,2] D. [1,2]

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$, 求下列各函数的定义域:

(1) (4') $f(x^2)$; (2) (4') $f(2^x)$;

(3) (6') $f\left(x+\frac{1}{3}\right) + f\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

(ii) 有关确定函数(反函数)表达式的题型

5. (4') 已知: $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$, 则 $f(x) =$ _____.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] =$ _____.

7. 求下列函数的反函数:

(1) (4') $y = \sqrt[3]{x+1}$; (2) (4') $y = \frac{1-x}{1+x}$;

(3) (6') $y = 1 + \ln(x+2)$.

8. (7') 已知: $f(x)=x^3-x$, $\varphi(x)=\sin 2x$, 求 $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$.

9. (10') 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -1, & |x|>1, \end{cases}$ $g(x)=e^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

函数的图形.

(iii) 有关函数性质判定的题型

10. (每题 2') 下列函数中哪些是偶函数? 哪些是奇函数? 哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=3x^2-x^3$; (2) $y=|x|+1$; (3) $y=\sin x+1$;

(4) $y=a^x+a^{-x}$; (5) $y=a^x-a^{-x}$.

11. (4') 设 $f(x)=\frac{\sin(x+1)}{x^2+1}$, $-\infty<x<+\infty$, 则此函数为 ()

A. 有界函数 B. 奇函数 C. 偶函数 D. 周期函数

12. (4') $y=\sin(\frac{x}{2}+3)$ 的最小正周期为 _____.

13. (4') 设 $f(x)=\begin{cases} \cos x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & x=0, \\ -\cos x, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在定义区间为 ()

A. 奇函数但非周期函数 B. 偶函数但非周期函数
C. 奇函数且为周期函数 D. 偶函数且为周期函数

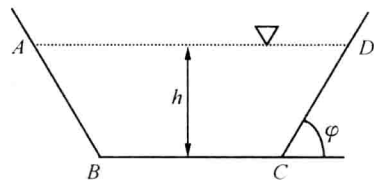
(iv) 有关复合函数分解的题型

14. (6') 将 $y=\ln(\tan x^2)$ 分解成由若干个基本初等函数复合的形式.

15. (7') 将 $y=\arctan^3 \frac{x}{1-x^2}$ 分解成基本初等函数的复合形式.

III 综合应用题型

16. (8') 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角 φ 为已知锐角 (如图所示), 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时, 求湿周 L 与水深 h 之间的函数关系式, 并指明其定义域.



17. (8') 一列火车在运行时, 每小时的费用由两部分组成: 一部分是固定费用 a ; 另一部分费用与火车的平均速度 x 的立方成正比, 比例系数为 k . 常用 y 表示火车连续运行路程 s 所需的总费用, 试将 y 表示为 x 的函数.

18. (8') 火车站收取行李费的规定如下: 当行李不超过 50kg 时, 按基本运费计算, 如从上海到某地每千克收 0.15 元, 当超过 50kg 时, 超重部分按每千克 0.25 元收费. 试求上海到该地的行李费 y (元) 与行李质量 x (kg) 之间的函数关系式, 并画出此函数的图形.

19. (8') 按照银行规定, 某种外币一年期存款的年利率为 4.2%, 半年期存款的年利率为 4.0%, 每笔存款到期后, 银行自动将其转存为同样期限的存款. 设将总数为 A 单位货币的该种外币存入银行, 两年后取出, 问存何种期限的存款有较多的收益, 多多少?

* 20. (10') 森林失火了, 火势正以每分钟 100m^2 的速度顺风蔓延, 消防站接到报警后立

即派消防队员前去,在失火后 5 分钟到达现场开始救火,已知每名消防队员在现场平均每分钟可灭火 50 m^2 ,所消耗的灭火材料、劳务津贴等费用平均每人每分钟 125 元,另附加每次救火所损耗的车辆、器械和装备等费用平均每人 100 元,而每烧毁 1 m^2 森林的损失费为 60 元,设消防队派了 x 名消防队员前去救火,从到达现场开始救火到把火完全扑灭共耗时 n 分钟.

- (1) 求出 x 与 n 的关系式;
- (2) 当 x 为何值时,才能使得总损失 y 最小?

二、极限

(一) 极限的定义及其性质 (§ 1.2, § 1.3, § 1.4)

I 内容要求

(i) 理解数列极限、函数极限的描述性定义,自学数列极限、函数极限的精确定义、几何意义及其性质.

(ii) 了解无穷小与无穷大量的概念及其关系,了解无穷小量的性质.

(iii) 记忆基本初等函数图象的变化趋势,学会计算函数在一点处的左、右极限.

II 基本题型

(i) 涉及基本初等函数极限的题型

21. (每空 4') 填充题:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} n^p = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} e^x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \cot x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \arctan x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(ii) 简单函数在一点处左、右极限的题型

$$22. (4') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

()

A. -1

B. 0

C. 1

D. 不存在

$$23. (6') \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0, \\ \ln(1+x), & -1 < x \leq 0, \end{cases} \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

(iii) 无穷小与无穷大量的判定题型

24. (4') 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,下列函数哪个是无穷小量

()

A. $\ln \frac{1}{x}$

B. $1 - \cos x$

C. $-x^2$

D. $\sin \frac{1}{x}$

25. (4') 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,下列函数哪个是无穷大量

()

A. e^x B. e^{-x} C. $e^{-\frac{1}{x}}$ D. $e^{\frac{1}{x}}$

(iv) 涉及无穷小量性质的极限题型

26. (每题 4') 填空题:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} =$ _____;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} =$ _____;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 1) =$ _____.

27. (每题 2') 是非题:

在同一自变量变化过程中:

(1) 两个无穷小的商自然是无穷小;

()

(2) 无穷小的倒数一定是无穷大;

()

(3) 无穷小与无穷大必互为倒数.

()

28. (6') $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right).$

29. (6') $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right).$

(二) 极限的运算 (§ 1.5, § 1.6)

I 内容要求

(i) 掌握极限的四则运算法则和复合运算法则.

(ii) 了解未定式的概念, 会判断 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty$ 未定式类型.

(iii) 记忆两个重要极限公式并学会利用它们求极限, 了解夹逼定理与单调有界定理.

II 基本题型

(i) 直接运用四则求限法则及复合求限法则解决的极限题型(定式)

30. (每题 4') 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-9};$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right);$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x^2 + 1);$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} (1+x)^{x^3}.$

(ii) 简单未定式的判断及计算题型

31. 判定下列未定式的类型, 并进行计算:

(1) (4') $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9};$

(2) (4') $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2-9};$

(3) (6') $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9};$

(4) (6') $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n};$

(5) (6') $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{2n^3+3n+1};$

(6) (7') $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1});$

(7) (7') $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right).$

32. 判定下列未定式的类型, 并进行计算:

$$(1) (4') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x};$$

$$(2) (4') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \omega x}{x};$$

$$(3) (6') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x};$$

$$(4) (6') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 5x};$$

$$(5) (6') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x}{x};$$

$$(6) (6') \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x};$$

$$(7) (6') \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 3x.$$

33. 判定下列未定式的类型, 并进行计算:

$$(1) (4') \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(2) (4') \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{2x}};$$

$$(3) (6') \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{kx};$$

$$(4) (6') \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n;$$

$$(5) (6') \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{1-\frac{1}{x}}.$$

III 提高题型

用极限存在准则解决的极限题型

34. (每题 7') 用夹逼定理求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + \pi} + \frac{n}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n\pi} \right).$$

35. (7') 用单调有界定理证明数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$ 的极限存在, 你能求出该极限吗?

(三) 极限的综合计算及其应用 (§ 1.7)

I 内容要求

- (i) 学会对无穷小量的阶进行比较.
- (ii) 学会确定曲线的水平渐近线与铅直渐近线.
- (iii) 记忆常用的等价无穷小, 学会运用等价无穷小量代换求极限.

II 基本题型

(i) 关于无穷小阶的比较题型

36. (4') 当 $x \rightarrow 0$, $1 - \cos x^2$ 是关于 x^4 的 ()

- A. 高阶无穷小
- B. 低阶无穷小
- C. 同阶但非等价无穷小
- D. 等价无穷小

37. (4') 当 $x \rightarrow 0$, $\ln(1+x)$ 是关于 x^2 的 ()

- A. 高阶无穷小
- B. 低阶无穷小
- C. 同阶但非等价无穷小
- D. 等价无穷小

38. (4') $x \rightarrow 0$, $\sqrt[3]{1+x^2} - 1 \sim kx^n$, 则 $k =$ _____; $n =$ _____.

(ii) 关于渐近线确定的题型

39. (4') $y = \frac{x+2}{2x-3}$ 的水平渐近线为 _____; 铅直渐近线为 _____.

40. (7') 求 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ 的水平渐近线与铅直渐近线.

(iii) 利用无穷小进行等价代替处理的极限题型

41. (每题 6') 判断下列未定式类型, 并求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x(1 - \cos x)}{\tan 4x^3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)\arcsin x}{\ln(1 + x^2)};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 \cdot \ln(1 + 2x)}{\sqrt[3]{1 + x^3} - 1}.$$

III 提高题型

复杂未定式的计算题型

42. (每题 7') 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \sqrt{1 + \sin^2 x} - x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{x+1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^x - 1}{\ln(\cos x)}.$$

43. (10') 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$, 求 a, b . 你知道解决该题的几何意义吗?

44. (7') 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n + 1) \right] = a (0 < a < +\infty)$,

求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$.

三、连续(A: § 1.8, § 1.9, § 1.10; B: § 1.8, § 1.9)

I 内容要求

(i) 理解函数在一点处连续和在一区间内连续的概念.

(ii) 了解函数间断点的概念, 会判别间断点的类型.

(iii) 了解初等函数的连续性和闭区间内连续函数的介值定理与最值定理.

II 基本题型

(i) 有关连续的题型

45. (每题 2') 是非题:

(1) 若函数在一点处极值存在, 则函数在该点必连续; ()

(2) 一切初等函数在其定义区间内都连续. ()

46. (8') 研究函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 的连续性, 并画出函数的图象.

47. (4') 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1, \\ 3 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 的连续区间是 ()

A. $[0, 1) \cup (1, 2]$

B. $[0, 2]$

C. $[0, 1)$

D. $(1, 2]$

48. (7') 对函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0, \end{cases}$ 应当怎样选择数 a , 使其成为在 $(-\infty, +\infty)$ 内

的连续函数?

(ii) 有关间断点类型确定的题型

49. (每题 4') 下列函数在指定的点处间断, 说明这些间断点属于哪一类:

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, x = 1, x = 2;$$

$$(2) y = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ 3-x, & x > 1, \end{cases} x = 1;$$

$$(3) y = \frac{x}{\tan x}, x = k\pi, x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}).$$

III 综合计算题型

50. (8') 设 $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$. 求:

(1) $f(x)$ 的间断点并判断其类型;

(2) $f(x)$ 的渐近线.

$$51. (10') \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0, \\ a + \ln(1+x), & -1 < x \leq 0. \end{cases}$$

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a ;

(2) 求 $f(x)$ 的间断点, 并说明间断点所属类型;

(3) 求 $f(x)$ 的渐近线方程.

IV 提高题型

涉及介值定理的证明题

52. (7') 证明: 方程 $x = a \sin x + b (a > 0, b > 0)$ 至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$.

53. (7') 设函数 $f(x)$ 对于 $[a, b]$ 内的任意两点 x, y , 恒有 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, 其中 L 为正常数, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

54. (7') 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 必在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

55. (7') 一个登山运动员从早晨 7:00 开始攀登某座山峰, 在下午 7:00 到达山顶; 第二天早晨再从山顶沿着原路下山, 下午 7:00 到达山脚. 试利用介值定理证明: 这个运动员必在这两天的某一相同时刻经过登山路径的同一地点.

测试卷一

一、选择题(7×4')

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = 5x - 4$, 则 $f[g(0)] =$ ()
 A. -16 B. -4 C. 4 D. 16
2. 函数 $y = f(x)$ 的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ()
 A. 一定大于 0 B. 一定小于 0 C. 不一定大于 0 D. 一定不大于 0
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{2x}} =$ ()
 A. $e^{\frac{1}{5}}$ B. $e^{\frac{2}{3}}$ C. $e^{\frac{3}{2}}$ D. e^6
4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x^2$ 是关于 $\sin^2 x$ 的 ()
 A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小
 C. 等价无穷小 D. 同阶但非等价无穷小
5. $x = 4$ 是 $f(x) = \frac{\sin(x-4)}{x^2 - 16}$ 的 ()
 A. 跳跃间断点 B. 可去间断点 C. 第二类间断点 D. 连续点
6. 曲线 $y = \frac{x + \sin x}{x^2} - 2$ 的水平渐近线方程为 ()
 A. $x = -2$ B. $y = -2$ C. $x = 2$ D. $y = 2$
7. 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处有定义是 $y = f(x)$ 在 x_0 处有极限的 ()
 A. 充分但非必要条件 B. 必要但非充分条件
 C. 充分且必要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题(3×4')

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 (3n+1)^2}{(6n+1)^5} =$ _____.
2. 若函数 $y = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x}, & x > 0, \\ 3x+a, & x \leq 0 \end{cases}$ 连续, 则 $a =$ _____.
3. 已知: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + bx + 5}{1-x} = 4$, 则 $b =$ _____.

三、计算题(4×7')

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{e^x - 1}.$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{\frac{x}{2}}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

四、(9') 设 $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, 求:

- (1) 函数的间断点并判断其类型;
- (2) 该函数图象的水平渐近线及铅直渐近线.

五、(8') 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[3]{1+x^2} - 1$ 与 $1 - \cos \sqrt{ax}$ 互为等价无穷小, 求 a 值.

六、(8') 把长为 a 的线段 AB 分为 n 等份, 以每个小段为底作底角为 $\frac{2\pi}{n}$ 的等腰三角形, 这些等腰三角形的两腰组成一折线, 试求当 n 无限增大时所得折线长的极限.

七、(两题选做一题, 每题 7')

1. 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

2. 求证: 方程 $x=2\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内至少有一实根.