金程考研 ◆ 考研数学通关宝®系列 ◆

考研数学

高分复习全书

金程考研公共课教研中心 编著

资深名师权威打造 理论解题全面突破

知识精讲提纲挈领 直击考点分析透彻

解题思路清晰精妙 题型点拨灵活高效

常见误区精确提示 应试技巧综合提升

复旦大学出版社

金程考研 ◆ 考研数学通关宝®系列

考研数学

高分复习全书

金程考研公共课教研中心 编著

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学高分复习全书/金程考研公共课教研中心编著. —上海:复旦大学出版社,2015.8
ISBN 978-7-309-11673-1

Ⅰ. 考… Ⅱ. 金… Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 172316 号

考研数学高分复习全书
金程考研公共课教研中心 编著
责任编辑/岑品杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@ fudanpress. com http://www. fudanpress. com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
浙江省临安市曙光印务有限公司

开本 890 × 1240 1/16 印张 27.75 字数 817 千
2015 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-11673-1/O · 571
定价: 55.00 元

前 言

自从2009年新大纲改革之后，《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》延续以往的传统，没有任何实质性的变化，只是极少数内容的表述上有细微调整与润色.通过对近年来各卷种真题的研究分析，不难发现全国硕士研究生入学统一考试数学命题在不断进步和完善，对考生"三基"能力的要求在不断创新和加强，各卷种真题的难度逐渐趋于稳定.从历年的考试分析来看，往往被考生认为相对较容易的题目反而得分率较低，这也说明很多考生尚未完全领悟和掌握所学的知识和方法，想当然地按照自己的方式做题，从而陷入命题老师所设的陷阱.

《考研数学高分复习全书》主要通过将大纲知识点与历年真题中考查的题型相结合的方式，进一步强化考生对考研数学中知识点的理解与运用，增加考生对解题方法和技巧的训练，锻炼考生的实际动手解题能力，使考生能够真正掌握"三基"、吃透考研数学命题规律，并运用这些规律达到解题的目的，从而在考试中灵活运用，最终取得优异成绩.

本书分三篇，分别是高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计，各篇均严格按照《数学考试大纲》的要求进行编排，每章的编排中均包含"考纲要求""知识精讲""命题规律"和"重要考点"四部分，具体如下：

一、考纲要求

本部分的目的是使考生明白考试内容和考试要求，从而在复习时有明确的目标和学习重点.

二、命题规律

本部分主要将考试大纲对考研数学所要求的考试内容按照题型方式进行归纳，并总结历年真题的考试情况，归纳分析每一章的考查形式、考试内容、考试题型及在整个试卷中的比例，使考生熟悉历年真题中各章的考查重点、难点和易错点.

三、知识精讲

本部分主要对考试大纲所要求的三基即“基本概念、基本理论与基本方法”涉及的知识点进行全面阐述，并对考试重点、难点以及常考知识点进行深度剖析.

四、重要考点

本部分主要包括三个方面的内容：**“真题考频”“题型点拨”“经典例题”**. 其中，**“真题考频”**主要是帮助考生总结历年考试对本章命题的次数、频率和分值情况，使考生对重要考点有明确的认识；**“题型点拨”**主要是对本部分所归纳的重要考点进行解题方法、解题技巧等方面的重要指导，使考生对本题型的学习能够举一反三，融会贯通；**“经典例题”**主要是根据所讲的方法和题型技巧进行举例说明，使考生在学习中对题型、方法不断进行强化认识，逐步提高自己的解题能力. 由于篇章有限，本书的**“经典例题”**部分精选了最典型、最重要的部分真题和经典题，建议考生在学习的时候一定要认真思考求解. 然后从中找出自己存在的不足，提高复习效率，养成独立思考的习惯. 在学习完本书后建议考生独立完成几套历年真题试卷，以增加对本书的认知和方法的体会. 做题时建议考生严格按照考试时间要求进行，以便及时发现自己的不足，进行查漏补缺，以达到演练的目的.

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助，由于时间所限，本书中错误之处在所难免，如有不当之处，恳请读者批评指正.

祝同学们复习顺利，考研成功，心想事成！

金程考研公共课教研中心·数学教研室

2015 年 7 月

目　录

高等数学篇

线性代数篇

概率论与数理统计篇

高等数学篇

第一章　函数、极限与连续

考纲要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

命题规律

本章函数部分主要从构建函数关系，或确定函数表达式等方面考查. 极限作为高等数学的理论基础，不仅需要准确理解它的概念、性质和存在的条件，而且要会利用各种方法求出函数(或数列)的极限，还要会根据题目所给的极限得到相应结论. 函数的连续性是函数可导与可积的重要条件，因此要熟练掌握判断函数连续性及间断点类型的方法，特别是分段函数在分段点处的连续性. 与此同时，还要了解闭区间上连续函数的相关性质(如有界性、最值定理、介值定理、零点定理等)，这些内容往往与其他知识点结合起来考查.

本章的知识点可以有多种形式(如选择题、填空题、解答题均可)考查，平均来看，本章内容在历年考研试卷中数一、数三大约占 14 分，数二大约占 18 分.

知识精讲

一、函数

1. 函数的概念

设 I 是实数集的某非空子集，若对于 I 中的每个值 x，变量 y 按照某种对应法则 f 总有一个确定的值与之对应，称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，I 称为函数的定义域，相应的函数值 y 的全体称为函数的值域.

【注】 ① 考研所指函数是单值函数.

② 函数的两要素：定义域；对应法则.

两个函数相等 $\Leftrightarrow$ 定义域相同；对应法则相同.

③ 函数与自变量的字母表示无关.

2. 函数的几何性质

(1) 奇偶性. 设函数 $f(x)$ 定义域为 D 关于原点对称,如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为奇函数;如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为偶函数.

【注】 ① 图像:偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称;奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

② 考研常见的奇偶函数:

常见的奇函数:0, $\sin x$, $\tan x$, $\dfrac{1}{x}$, x^{2n+1}, $\arcsin x$, $\arctan x$, $\cdots$.

常见的偶函数:C, $|x|$, $\cos x$, x^{2n}, $e^{|x|}$, e^{x^2}, $\cdots$.

③ 运算:(i) 四则/复合运算:奇×奇=偶函数;偶×奇=奇函数;偶×偶=偶函数;偶+偶=偶函数,奇+奇=奇函数,非零奇+非零偶=非奇非偶函数;奇函数与奇函数复合为奇函数;偶函数与偶函数复合为偶函数;偶函数与奇函数复合为偶函数. (ii) 导函数与原函数的运算.

④ 应用:可简化积分的运算(定积分、重积分、第一类曲线和曲面积分).

【例】 判断下列函数的奇偶性 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

【分析】 本题考查用定义来判断函数的奇偶性.

【解析】 易知 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,故对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有:

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \ln \frac{\left[-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right]\left[x+\sqrt{1+(x)^2}\right]}{x+\sqrt{1+(x)^2}}$$

$$= \ln \frac{1}{x+\sqrt{1+(x)^2}} = \ln\left[x+\sqrt{1+(x)^2}\right]^{-1} = -\ln\left(x+\sqrt{1+(x)^2}\right) = -f(x),$$

所以 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

(2) 周期性. 设函数 $f(x)$ 定义域为 D,如果存在一个正数 T,使得对于任一 $x \in D$,有 $(x \pm T) \in D$,且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 是周期函数,T 为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

【注】 ① 并非每个周期函数都有最小正周期. 如狄利克雷(Dirichlet)函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in \overline{Q} \end{cases}$,容易验证这是一个周期函数,任何正有理数 r 都是它的周期,因为不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期.

② 图像特征:周期函数的图像周期变化.

③ 考研常见的周期函数:C, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $|\sin x|$, $|\cos x|$ $\cdots$.

④ 应用:简化定积分的计算.

【例】 设实数 $a < b$,函数 $f(x)$ 对任意实数 x,有 $f(a-x) = f(a+x)$, $f(b-x) = f(b+x)$,证明:$f(x)$ 是以 $2b-2a$ 为周期的周期函数.

【分析】 会用定义来进行证明函数的周期性.

【解析】 因为 $a < b$,故 $2b - 2a > 0$.

对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有:$f(2b-2a+x) = f[b+(b-2a+x)] = f[b-(b-2a+x)] = f(2a-x) = f[a+(a-x)] = f[a-(a-x)] = f(x)$.

所以 $f(x)$ 是以 $2b-2a$ 为周期的周期函数.

(3) 有界性. 设函数 $f(x)$ 定义域为 D,数集 $X \subset D$.

如果存在数 K_1,使得 $f(x) \leqslant K_1$ 对任一 $x \in X$ 都成立,那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界,而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界.

如果存在数 K_2,使得 $f(x) \geqslant K_2$ 对任一 $x \in X$ 都成立,那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界,而 K_2 称为

函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.

如果存在正数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对任一 $x\in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界；这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

【注】 ① 有界性与区间有关.

② 常见的有界函数：$y=C$（常数），$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

③ 有界性的判定：结合中值定理与极限来考察.

【例】 证明：函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

【解析】 显然 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x)>0$，下面证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有上界.

因为 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}>0$，故有 $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x^4+1}{x^2+1}=\dfrac{(x^4-1)+2}{x^2+1}=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}+\dfrac{2}{x^2+1}=x^2-1+\dfrac{2}{x^2+1}$

$=\left[(x^2+1)+\dfrac{2}{x^2+1}\right]-2\geqslant 2\sqrt{2}-2$，即 $\dfrac{1}{f(x)}\geqslant 2\sqrt{2}-2$，故有 $f(x)\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{2}-2}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}<\dfrac{3}{2}$.

综上所述有：$0<f(x)<\dfrac{3}{2}$，即函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

【注】 函数有界，指的是既有上界也有下界，二者缺一不可.

(4) 单调性. 设函数 $f(x)$ 定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

【注】 ① 有些书上把这里单调增加称为严格单调增加；把这里单调不减称为单调增加.

② 单调性与区间有关.

③ 考研主要考查的内容：(i) 利用导数符号判断单调性；(ii) 利用单调性证明不等式.

④ 单调性的判别：(i) 定义；(ii) 充分条件；(iii) 充要条件.

3. 函数的构成方法与常见函数类

(1) 基本初等函数.

① 幂函数：$y=x^\mu$（$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数）.

② 指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

③ 对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）. 特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$（自然对数）；当 $a=10$ 时，记为 $y=\lg x$（常用对数）.

【注】 这里 e 是无理数，它的值是 $\mathrm{e}=2.718\,281\,828\,459\,045\cdots$.

④ 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等.

⑤ 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

(2) 复合函数. 设 $y=f(u)$ 的定义域 U，$u=g(x)$ 的定义域 I，值域 U^*；如果 $U^*\cap U\neq\varnothing$，则 $y=f[g(x)]$ 是定义在 I 上的一个复合函数. 其中 u 称为中间变量.

【注】 ① 注意函数复合的条件：$U^*\cap U\neq\varnothing$.

② 会把复合函数分解成若干个“简单”函数；会把两个函数（尤其是分段函数）进行复合.

(3) 初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数. 如：$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\sin^2 x$，$y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$ 等都是初等函数，在高等数学里所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

(4) 分段函数.

① 定义：在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

如：$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in I_1\\ f_2(x), & x\in I_2\\ \vdots & \vdots \quad \vdots\\ f_n(x), & x\in I_n\end{cases}$.

② 常见的分段函数：

(i) $y=|f(x)|$.

(ii) $y=[f(x)]$(取整函数：表示不超过 $f(x)$ 的最大整数).

(iii) $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ (符号函数).

(iv) $y=\max\{f(x), g(x)\}=\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$.

(v) $y=\min\{f(x), g(x)\}=\dfrac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$.

【注】 对任意的实数 x，均有 $x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$ 成立.

(5) 反函数. 设函数 $f: D\to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D)\to D$，称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数. 即：对每个 $y\in f(D)$，有唯一的 $x\in D$，$f(x)=y$，于是有 $x=f^{-1}(y)$. 有时也用 $y=f^{-1}(x)$ 表示. 例如 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 解出 $x=\sqrt{y}\ (y\geqslant 0)$；而 $y=x^2(x\leqslant 0)$ 解出 $x=-\sqrt{y}\ (y\geqslant 0)$.

【注】 ① 偶函数必无反函数；

② 单调函数必有反函数；

③ 奇函数如果有反函数，其反函数也是奇函数；

④ 原函数与其反函数在他们各自的定义域上单调性相同；

⑤ 函数 $y=f(x)$ 的图像和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(6) 隐函数. 形如 $y=f(x)$ 的函数称为显函数；由方程 $F(x, y)=0$ 确定函数关系式 $y=y(x)$ 称为由方程 $F(x, y)=0$ 在 I 上确定的隐函数，有些隐函数可以化为显函数，例如 $x^2+y^2=1$，$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ (不一定是一个单值函数)，而有些隐函数则不能化为显函数.

(7) 由参数方程定义的函数(数一、数二). 若由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定了 y 与 x 间的函数关系，则称此时的函数关系式为由参数方程确定的函数.

【注】 由参数方程定义的函数考研主要考查其导数和积分的计算.

(8) 考研数学中常见的非初等函数.

① 含参数极限定义的函数，如：$y=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$；$y=\lim\limits_{t\to x} f(t, x)$.

② 导函数.

【注】 导函数具有两大特性：① 导函数具有介值性；② 导函数没有第一类间断点.

③ 变限积分函数，如：

(i) $y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(t)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$.

(ii) $y=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$，其中 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 可导，$f(t)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$.

④ 幂级数的和函数(数一、数三).

二、极限

1. 极限的定义

(1) 数列极限($\varepsilon-N$ 语言). $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$(自然数),使得当 $n > N$ 时,有 $|a_n - A| < \varepsilon$.

【注】 极限存在时称数列收敛,极限不存在时称数列发散.

(2) 当 $x\to\infty$ 时的函数极限($\varepsilon-X$ 语言). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$,使得当 $|x| > X$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(3) 当 $x\to x_0$ 时的函数极限($\varepsilon-\delta$ 语言). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(4) 单侧极限. 在 x_0 点的左极限(用 $f(x_0 - 0)$ 表示 $f(x)$ 在 x_0 的左极限值): $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,使得当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

在 x_0 点的右极限(用 $f(x_0 + 0)$ 表示 $f(x)$ 在 x_0 的右极限值): $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

【注】 函数极限是否存在与该点是否有定义无关.

(5) 熟记常用的极限. 如: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $|q| < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, $|q| > 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1\ (a > 0)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

(6) 极限存在的充要条件. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

【例】 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

【解析】 首先讨论 x 的取值范围,去掉极限得到 $f(x)$ 的解析式,容易得到:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & |x| < 1 \\ \dfrac{1+x}{2}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

所以, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(1+x) = 2$, 故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在;

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}(1+x) = 0$; $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0$, 故 $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$.

2. 极限的性质

(1) 唯一性. 自变量一个变化过程中,若数列(函数)的极限存在,则极限必唯一.

(2) 有界性(局部有界性). 如果数列收敛,则数列必有界;如果函数极限存在,则函数局部有界.

(3) 保号性(局部保号性).

数列:若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ (或 $a < 0$),则 $\exists N > 0$,当 $n > N$ 时,$a_n > 0$ (或 < 0).

函数:若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$ (或 $A < 0$),则 $\exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,$f(x) > 0$ (或 < 0).

【推论】 ① 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in (b, c)$,则 $\exists N > 0$,当 $n > N$ 时,$a_n \in (b, c)$;

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in (B, C)$,则 $\exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,$f(x) \in (B, C)$.

【注】 上述的 a, b, c, A, B, C 均为常数.

【例】 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,且 $a \neq 0$,则当 n 充分大时有(　　).

(A) $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$　　(B) $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$　　(C) $a_n > a - \dfrac{1}{n}$　　(D) $a_n < a + \dfrac{1}{n}$

【解析】 答案为(A).

本题主要考查极限的保号性. 由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0$,可得$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|>\frac{1}{2}|a|>0$. 根据极限的保号性,可得:$\exists N>0$,当$n>N$时,$|a_n|>\frac{1}{2}|a|$. 故选(A).

(4) 数列极限与子列极限的关系. 数列$x_n\to A(n\to\infty)\Leftrightarrow$对任意的子列$\{x_{n_k}\}$均有$x_{n_k}\to A(k\to\infty)$.

【例】 设$\{x_n\}$是数列,下列命题中不正确的是(　　).

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$　　(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$　　(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

【解析】 答案为(D),本题主要考查数列极限与子列极限的关系.

数列$x_n\to a(n\to\infty)\Leftrightarrow$对任意的子列$\{x_{n_k}\}$均有$x_{n_k}\to a(k\to\infty)$,所以(A)、(B)、(C)正确;而(D)错误(因为选项(D)缺少了子列$\{x_{3n+2}\}$的敛散性),故选(D).

(5) 函数极限与数列极限间的关系. 海涅定理(归结原则):若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,$\{x_n\}$为$f(x)$定义域中任一收敛于$x_0$的数列且$x_n\neq x_0(\forall n\in\mathbf{N}^*)$,则$f(x_n)$收敛且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

【注】 该定理是充要条件. 考生需要熟悉一些极限不存在的例子,如:

(1) $x_n=\begin{cases}1,\ n=2m\\-1,\ n=2m+1\end{cases}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$, $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$不存在.

3. 极限的运算法则

(1) 极限的四则运算法则. 设$\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,则有:

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

② $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

③ $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\ (g(x)\neq0,\ B\neq0)$.

【注】 四则运算法则成立的前提条件是参加运算的只有有限项,且极限都存在.

(2) 幂指函数极限运算法则. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=A^B$.

【注】 ① 幂指函数$f(x)^{g(x)}$的定义域是:$f(x)>0$.

② 当$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在或是无穷大时可以把运算法则推广到除七种未定式以外的情况,七种未定式指的是:$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

(3) 复合函数极限运算法则. 已知$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0\Rightarrow$在有意义的情况下,$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$.

4. 极限存在的判别法则

(1) 夹逼定理(追敛性原则). 若$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

【注】 ① 上述法则对其他极限方式也成立. ② 上述法则同样适用于数列极限.

【例】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$.

【解析】 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n}}$.

由夹逼定理可得:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n\cdot n}}\right)=\frac{1}{3}$.

(2) 单调有界定理. 单增有上界必有极限;单减有下界必有极限.

【例】 设数列$\{x_n\}$满足 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}$，$x_0>0$，$n=0,1,2,3,\cdots$，证明：数列$\{x_n\}$的极限存在并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】 先证明数列的极限存在再计算数列的极限.

【解析】 因为 $x_0>0$，且 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}$，所以 $x_n>0$.

由 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}$ 可知，显然 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}>2\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$. 所以函数有下界.

又因为 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x_n^2}$，所以$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x_n^2}<1$，所以此数列是单调递减的，所以由单调有界必收敛准则可知，数列$\{x_n\}$的极限存在.

不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对题干已知的等式两边同时取极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}\right)$，得 $a=\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{a}$ 解得 $a=\sqrt{2}$ 或 $a=-\sqrt{2}$(舍去)，所以数列$\{a_n\}$的极限存在且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

5. 两个重要极限

【公式 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

【公式 2】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$；$\lim\limits_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=\mathrm{e}$.

【注】 ① 考研常用的推广情形：$\lim\Delta=0\Rightarrow\lim\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=1$(这里 $\Delta\neq 0$)；$\lim\Delta=\infty\Rightarrow\lim\left(1+\dfrac{1}{\Delta}\right)^{\Delta}=\mathrm{e}$.

② 对于公式 2，其本质是 1^∞ 型极限. 对于 1^∞ 型幂指函数的极限，其最简单方法是：若 $\lim f(x)=1$，$\lim g(x)=\infty$，则$\lim f(x)^{g(x)}=\lim[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot(f(x)-1)g(x)}=\mathrm{e}^{\lim(f(x)-1)g(x)}$，此公式读者须牢记.

【例 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

【例 2】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________.

【解析】 因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(\tan x-1)\frac{1}{\cos x-\sin x}\right]}$，而 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(\tan x-1)\dfrac{1}{\cos x-\sin x}\right]=$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}-1\right)\dfrac{1}{\cos x-\sin x}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos x-\sin x}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(-\dfrac{1}{\cos x}\right)=\dfrac{2}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$，

所以$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$.

6. 特殊类型的极限

(1) 无穷小、无穷大的定义.

无穷小：若 $\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为无穷小量；

无穷大：若 $\lim f(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 为无穷大量.

【注】 无穷小与 x 的变化过程有关，比如：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小，而 $x\to x_0$ 或其他时，$\dfrac{1}{x}$ 不是无穷小.

(2) 无穷小与无穷大的关系. 在 x 的同一个变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(3) 无穷小与极限的关系. $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim \alpha(x)=0$.

(4) 无穷大与无界的关系. 无穷大一定无界，反之不一定成立. 如：$f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界，但当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 不是无穷大.

(5) 无穷小的运算.

① 有限个无穷小的和仍为无穷小.

② 有限个无穷小的积仍为无穷小.

③ 有界函数与无穷小的积仍为无穷小.

【注】 上述性质不能任意推广到无穷多个.

(6) 无穷小的比较. 设 α,β 是在同一自变量变化过程中的无穷小，且 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}\ (\beta\neq 0)$ 存在：

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是 β 的高阶无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是 β 的低阶无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$，则称 α 和 β 是同阶无穷小，记作 $\alpha=O(\beta)$；

特别地，若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 和 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta^k}=l\neq 0$ 存在，则称 α 是 β 的 k 阶无穷小.

【注】 ① 并非任意两个无穷小均可做比较，如：当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x$，$g(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 均是无穷小，但二者不能做比较.

② 考研常用的等价无穷小如下：

(i) 单一函数情形：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

(ii) 两函数差情形：当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x\sim x^3/2$，$\arcsin x-x\sim x^3/6$，$x-\arctan x\sim x^3/3$，$x-\sin x\sim x^3/6$，$\tan x-x\sim x^3/3$，$x-\ln(x+1)\sim x^2/2$.

③ 利用等价无穷小求极限.

定理：在同一个极限过程当 $x\to x_0$ 时，若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则有：$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha'}{\beta}=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha}{\beta'}=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

【注】 ① 上述的等价无穷小替换定理仅仅适用于乘法或除法.

② 在满足一定的条件下，等价无穷下替换定理对于加减法也可以使用，但考研大纲对加减法的等价无穷小替换不做要求，读者可以了解一下即可：

定理：当 $x\to x_0$ 时，若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 α 不等价于 β，则有 $\alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'$.

③ 该定理对于其他极限方式也成立.

【例 1】 当 $x\to 0$ 时，用"$o(x)$"表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是(　　).

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　(B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

【解析】 答案为(D).

如 $x^2=o(x)$，$x^3=o(x^2)$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x^3}{x^2}=1$，即 $x^2+x^3\neq o(x^2)$.

【例 2】 设 $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，当 $x\to 0$ 时，若 $P(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列试题中错误的是(　　).

(A) $a=0$　　(B) $b=1$　　(C) $c=0$　　(D) $d=\dfrac{1}{6}$

【解析】 答案为(D).

当 $x\to 0$ 时由已知可得 $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ 是无穷小，所以 $a=0$.

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b+2cx-\sec^2 x}{3x^2}+d$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}(b+2cx-\sec^2 x)=0$，$\therefore b=1$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b+2cx-\sec^2 x}{3x^2}+d=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2c}{3x}-\dfrac{1}{3}+d=0$，$\therefore c=0$，$d=\dfrac{1}{3}$. 故选(D).

【例 3】 当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是(　　).

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　(D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

【解析】 答案为(B).

由定义 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^{\alpha}(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)^{\alpha}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2^{\alpha}x^{\alpha-1}=0$，所以 $\alpha-1>0$，故 $\alpha>1$.

当 $x\to 0^+$ 时，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\dfrac{x^{\frac{2}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$ 是比 x 高阶的无穷小，所以 $\dfrac{2}{\alpha}-1>0$，即 $\alpha<2$，故选(B).

三、连续

1. 函数在点 x_0 处连续的定义

定义 1. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果当自变量的改变量 Δx(初值为 x_0) 趋近于 0 时，相应的函数改变量 Δy 也趋近于 0，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义 2. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限值存在，且等于 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，此时有 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，并且有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$.

即如果函数在点 x_0 处连续，则在点 x_0 处可以交换极限号和函数号的顺序.

左右连续：设函数 $y=f(x)$，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

由上述定义 2 可知，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续也右连续.

2. 函数在区间内(上)连续的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

如果 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，在区间端点 a 右连续，在区间端点 b 左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

3. 间断点及其分类

(1) 间断点的定义. 由连续定义可知：