非线性问题的重心插值配点法

Barycentric Interpolation Collocation Method for Nonlinear Problems

■ 王兆清 李淑萍 著

国防工業出版社
National Defense Industry Press

非线性问题的重心插值配点法

Barycentric Interpolation Collocation Method for Nonlinear Problems

王兆清　李淑萍　著

国防工業出版社

·北京·

内 容 简 介

本书论述了重心插值配点法求解非线性微分方程的计算格式和计算程序；详细讨论了重心插值配点法求解非线性常微分方程初值问题和边值问题、二维非线性椭圆偏微分方程边值问题、一维非线性扩散方程和动力学方程初边值问题的计算方法；给出了直接线性化和 Newton 线性化迭代重心插值配点法求解非线性微分方程的计算算法；建立了求解非线性微分方程(初)边值问题的重心插值 Newton - Raphson 迭代法计算格式；通过大量数值算例，说明了重心插值配点法求解非线性微分方程的有效性和计算精度。

本书可供从事数值分析领域研究的工程技术人员和高等院校计算数学、计算力学和其他工科专业本科生、研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性问题的重心插值配点法/王兆清，李淑萍著. —北京：国防工业出版社，2015. 6
ISBN 978 - 7 - 118 - 10211 - 6

Ⅰ. ①非...　Ⅱ. ①王...②李...　Ⅲ. ①非线性方程 - 研究　Ⅳ. ①0175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 119122 号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)
天利华印刷装订有限公司印刷
新华书店经售

*

开本 787 × 1092　1/16　印张 $18\frac{3}{4}$　字数 430 千字
2015 年 6 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—2000 册　定价 58.00 元

国防书店：(010)88540777　　发行邮购：(010)88540776
发行传真：(010)88540755　　发行业务：(010)88540717

前　言

工程中的许多问题其数学模型可归结为非线性微分方程定解问题。在一定条件下,非线性问题可简化为线性问题。例如细长梁的弯曲问题,其控制方程为非线性常微分方程,在小挠度的条件下,细长梁的控制方程可简化为线性常微分方程。对于非线性微分方程,适用于线性微分方程的叠加原理不再成立。非线性微分方程的表现形式千差万别,一般很难得到其解析解。

数值方法是求解非线性微分方程的有效手段。非线性微分方程一般采用迭代法求解,可分为两大类求解方法。第一类方法是利用数值方法将非线性微分方程离散为非线性代数方程组,采用 Newton – Raphson 迭代法求解非线性代数方程组,得到非线性微分方程的数值解。第二类方法是将非线性微分方程线性化,构造一个线性化迭代格式近似非线性微分方程,采用求解线性问题的数值方法迭代计算得到非线性微分方程的数值解。

重心插值配点法是基于微分方程强形式的数值方法,通过强迫微分方程在计算节点处成立,得到微分方程的离散代数方程组。在重心插值配点法实施过程中,采用微分矩阵离散微分算子,可以直接写出微分方程的离散代数方程公式。重心插值配点法具有数值稳定性好、计算精度高的特点,可应用于常微分方程初/边值问题、积分方程边值问题和偏微分方程初边值问题的数值计算。

本书研究重心插值配点法求解非线性微分方程的数值算法和计算程序,主要研究重心插值配点法求解非线性常微分初值问题和边值问题、非线性二维椭圆型偏微分方程边值问题和非线性一维抛物型和双曲型偏微分方程初边值问题的计算公式和计算程序,并通过典型数值算例的数值结果说明方法的有效性和计算精度。

本书介绍重心插值配点法求解非线性微分方程的两类方法:线性化迭代重心插值配点法和重心插值 Newton – Raphson 迭代法。在线性化迭代重心插值配点法中,详细介绍了非线性微分方程的直接线性化和 Newton 线性化方法,给出了非线性微分方程的线性化迭代格式和重心插值配点法计算公式。在重心插值 Newton – Raphson 迭代法中,详细介绍了重心插值配点法离散非线性微分方程为非线性代数方程的计算公式以及 Newton – Raphson 迭代 Jacobi 矩阵的计算方法。本书的数值算例来源于数学、力学和其他工程领域的学术论文,书中直接引用其数学方程,读者若要了解数学方程的工程背景可以查阅参考文献所列出的文章或相关文献。数值算例采用

MATLAB编写，对于典型的算例，在附录中给出完整的 MATLAB 程序代码，供读者学习参考。

建议读者在阅读本书前，应先了解重心插值配点法求解线性微分方程的基本算法，这样就可将阅读重点放在如何处理非线性微分方程上。

本书出版得到国家自然科学基金(No. 51379113)的资助，在此表示感谢。

由于作者水平有限，书中或有不当之处，敬请各位同仁批评指正。建议和意见可发至邮箱：sdjzuwang@126.com。

王兆清　李淑萍

2015 年 1 月于济南

目　录

第1章　非线性问题的基本方法

本书论述数值求解非线性微分方程的高精度计算方法,不讨论非线性代数方程问题,因此本书中非线性问题和非线性微分方程定解问题的含义是相同的,今后对两者不加区分。

本章论述分析和模拟非线性问题的基本方法,内容包括:非线性问题的物理背景和数学模型,工程中常见非线性问题的简单分类,非线性问题数值分析的基本方法;重点论述非线性问题数值分析的线性化迭代法及相关 MATLAB 程序框架问题。

1.1　非线性问题的数学模型

人们在分析实际工程问题时,根据大量观察和实验,在一定的假设前提下总结出物理定律,然后根据物理定律,建立分析问题的数学模型。许多工程问题,其数学模型采用微分方程来描述。通常人们采用线性微分方程来描述工程问题,例如,描述热扩散和波传播规律的热传导方程和波动方程、小变形梁弯曲方程和小变形弹性 Lame - Navier 方程等都是一些线性微分方程。在数学上,线性微分方程的理论和数值分析方法比较完备。一般来说,线性微分方程是对工程问题的近似描述,要准确描述工程问题,往往需要采用非线性微分方程。例如梁的弯曲问题,在小变形假设下,采用挠度的二阶导数近似挠曲线的曲率,得到梁弯曲问题的线性控制微分方程;在大变形的情况下,必须采用准确的曲率公式,得到梁弯曲问题的非线性控制微分方程。

对于一个微分方程,如果其关于未知函数及其各阶(偏)导数都是线性(一次方)的,则称其为线性微分方程,否则称其为非线性微分方程。非线性微分方程的表现形式要比线性微分方程多得多。不同的非线性问题得到非线性微分方程千差万别,下面举几个工程中常见的非线性微分方程的例子。

1. 大振幅单摆

质量为 m 的小球悬挂在长为 l 的不计重量的线下端。设摆角为 θ,重力加速度为 g,根据牛顿第二定律,小球的运动方程为[1]

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\sin\theta = 0。\tag{1.1}$$

令 $\omega^2 = g/l$,则式(1.1)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\sin\theta = 0。\tag{1.2}$$

式(1.2)为非线性二阶常微分方程。当摆角 θ 很小时,$\sin\theta \approx \theta$,式(1.2)的线性化方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0。\tag{1.3}$$

2. 大挠度 Euler - Bernoulli 梁弯曲

设 Euler - Bernoulli 悬臂梁，梁长为 l，抗弯刚度为 EI，梁上作用的弯矩函数为 $M(x)$，梁的中线挠曲线为 $w(x)$，则梁弯曲问题的控制方程为

$$\frac{w''(x)}{(1 + w'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI}, 0 < x < l。\tag{1.4}$$

式(1.4)为非线性二阶常微分方程，适用于弯曲变形的任意情况。在小挠度情况下，式(1.4)的线性化方程为

$$EIw''(x) = M(x), 0 < x < l。\tag{1.5}$$

3. 电磁力作用的微梁

如图 1.1 所示，在静电力作用下的微梁，梁长为 l，宽为 b，抗弯刚度为 EI，梁与极板间的距离为 G，施加的电压为 V，空气的介电常数为 ε_0。微梁在静电力作用下的弯曲控制方程可表示为[2]

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{\varepsilon_0 bV^2}{2(G - w)^2}, 0 < x < l。\tag{1.6}$$

式(1.6)为非线性四阶常微分方程，其非线性来源于非线性的电场力。

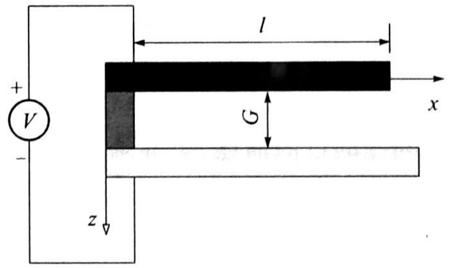

图 1.1　静电力作用的微悬臂梁

4. 孤立子波

描述孤立子波的非线性 Schrödinger 方程可表示为[3]

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u|u|^2 = 0。\tag{1.7}$$

式(1.7)为二阶非线性抛物型偏微分方程。

5. 最小曲面问题

最小曲面问题是在给定区域 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上的边界条件 $u = g$，求一个面积最小的曲面。该问题是一个变分最小值问题，其 Euler - Lagrange 方程可写为

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0。\tag{1.8}$$

在二维区域 Ω，式(1.8)可写为[4]

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0。\tag{1.9}$$

式(1.9)是一个强非线性偏微分方程。最小曲面问题是一个非线性偏微分方程边值

问题。

1.2 非线性问题的数值分析方法

与线性问题不同，非线性问题的微分方程表现形式千差万别。不同的非线性问题其微分方程可能完全不同，一般采用第一个研究者的姓氏命名，例如流体力学中的 Navier - Stokes 方程等。

1.2.1 非线性问题的简单分类

数学上没有关于非线性微分方程分类的方法，本书根据微分方程的特点，简单地将非线性微分方程加以分类：

（1）按照自变量的个数分类，可分为非线性常微分方程和非线性偏微分方程；

（2）按照未知函数的个数分类，可分为单个微分方程和微分方程组；

（3）按照未知函数最高阶（偏）导数的阶数分类，可分为一阶、二阶、高阶微分方程；

（4）按照定解条件分类，可分为初值问题、边值问题和初边值问题；

（5）按照求解区域（区间）分类，可分为有限区域和无限区域上的微分方程。

有时也按照非线性偏微分方程是否含有关于时间的偏导数，以及关于时间偏导数的阶次加以分类：

（1）含有关于时间一阶导数的非线性常微分方程——非线性常微分方程初值问题；

（2）与时间无关的稳态非线性微分方程——非线性常微分方程和偏微分方程边值问题；

（3）含有关于时间一阶偏导数的非线性偏微分方程——非线性扩散方程初边值问题；

（4）含有关于时间二阶偏导数的非线性偏微分方程——非线性动力学偏微分方程初边值问题。

1.2.2 非线性问题的经典数值分析方法

除了少数特殊的情形，非线性微分方程一般很难得到其解析解。在工程科学中，非线性微分方程一般采用数值技术求解。数值计算方法是随着计算机技术的发展而发展的，传统的数值计算方法主要有有限差分法（Finite Difference Method, FDM）、有限元方法（Finite Element Method, FEM）、边界元方法（Boundary Element Method, BEM）等。

有限差分法采用差分算子近似微分算子，主要应用于时域问题的时间导数离散，也可应用于规则空间域边值问题求解。有限差分法求解非线性初值问题的代表性计算方法是 Roung - Kutta 法。采用有限差分法求解不规则区域上的边值问题，构造不规则区域上的差分格式是非常困难和复杂的问题。

有限元方法主要用于求解微分方程边值问题，通过区域单元划分，采用低阶多项式函数近似单元上的未知函数，利用微分方程的 Galerkin 积分弱形式得到计算格式，其优点是能够适用于各种不规则区域，缺点是前处理过程比较耗时，并且要得到高精度的数值解，需要划分稠密的计算网格，增加了计算工作量。

边界元方法是一种求解边值问题的高精度算法，其将区域上的微分方程转化为区域边界上的积分方程求解，可以极大地减少分析问题的自由度。边界元方法依赖于求解问题的基本解，对于不存在基本解的工程问题，无法采用边界元方法进行分析。

配点法（Collocation Method）是一种简单、高效的求解微分方程的数值计算方法[5]，尤其适用于非线性问题的数值分析。配点法以区间（域）上的全局插值近似微分方程的未知函数，利用强迫微分方程在计算节点上精确成立的方式，建立微分方程的离散方程。本质上配点法是一种以 δ 函数为加权函数的 Galerkin 方法[6]。常见的全局插值函数有 Lagrange 多项式[7]、小波函数[8]、样条函数[9]、径向基函数（Radial Basis Function，RBF）[10]和各种谱函数（Spectral function）[11-12]等。配点法不但能够求解微分方程初值问题和边值问题，也能够求解偏微分方程初边值问题。

谱配点法（Spectral Collocation Method，SCM），也称拟谱方法（Pseudospectral Method，PSM），是一种高精度计算方法，其采用谱函数（Fourier、Chebyshev、Hermite 和 Legendre 多项式等）近似未知函数，利用高精度插值的微分矩阵离散微分方程。拟谱方法是一种全局性数值方法，只需采用较少数量的计算节点，即可得到极高精度的数值解[13]。谱方法适用于规则区域，不能直接应用于不规则区域上微分方程的数值求解。另外，谱函数的定义域是一些特殊区间，例如 Chebyshev 多项式的定义域为$[-1,1]$，对于任意区间$[a,b]$上的微分方程，需要采用坐标变换将区间$[a,b]$上的微分方程变换为区间$[-1,1]$上的微分方程。

微分求积法将未知函数在计算节点上的导数值表达为计算节点函数值的加权和，其加权系数一般采用 Lagrange 插值或样条插值确定。本质上微分求积法是一种基于 Lagrange 插值的配点法。由于高阶 Lagrange 插值的数值不稳定性，微分求积法所采用的计算节点数量不能太多。为克服微分求积法的缺陷，人们提出了局部化的微分求积法[14-15]。

非线性问题的数值分析依据其定解条件的不同，采用不同的数值计算方法。对于非线性初值问题（一般与时间有关），文献中一般采用有限差分法，典型的计算格式为四阶 Roung - Kutta 法。Roung - Kutta 法的计算精度和数值稳定性依赖于时间步长，对于刚性问题需要非常小的时间步长，计算成本是巨大的。

对于非线性边值问题，包括常微分方程边值问题和偏微分方程边值问题，人们一般采用有限元方法求解。对于非线性边值问题，有限元方法将非线性微分方程离散为非线性代数方程，通过迭代求解非线性代数方程得到非线性问题的数值解。当然，也可以采用其他的数值方法将非线性微分方程离散为非线性代数方程。这种将非线性微分方程离散为非线性代数方程迭代求解的方法，称为非线性迭代法。非线性迭代法相关文献的主要工作集中在如何将非线性微分方程离散为非线性代数方程。对于非线性代数方程一般建议采用 Newton 法求解。从计算程序实施的角度看，非线性代数方程的求解是非线性迭代法能否成功的关键。

对于非线性初边值问题，包括扩散和动力学偏微分方程初边值问题，经典的求解方法为在空间域上采用有限元方法离散空间导数，将非线性偏微分方程初边值问题转换为非线性常微分方程组初值问题，利用非线性初值问题的求解方法求解非线性常微分方程组初值问题。也就是说，涉及到时间问题，人们一般采用差分法求解。

偏微分方程初边值问题的经典数值分析方法，是将空间变量和时间变量分开处理。文献[5]将时间变量和空间变量同等看待，建立了求解线性偏微分方程初边值问题的完全重心插值配点法计算格式。作者及其合作者采用重心插值配点法求解微分方程初值问题[16-18]、边值问题[19-31]和初边值问题[32-33]，其计算思想和计算格式是类似的，这为采用重心插值配点法求解非线性问题奠定了坚实的算法基础。

1.3 非线性问题的线性化迭代法

1.2 节介绍了求解非线性问题的经典方法，本节介绍线性化迭代法求解非线性问题的基本思想，针对具体非线性问题的计算格式将在后续各章详细介绍。本书将线性化迭代法和微分矩阵法相结合，求解各种非线性问题。

1.3.1 直接线性化迭代法

对于一个非线性常微分方程 $\mathcal{D}u(x)=f(x)$，其中 $\mathcal{D}$ 为微分算子，可将其分解为线性项和非线性项两部分

$$\mathcal{L}u(x)+\mathcal{N}u(x)=f(x), \tag{1.10}$$

式中，$\mathcal{L}$，$\mathcal{N}$ 分别为线性和非线性微分算子。

如果给定一个初始已知函数 $u_0(x)$，代入式(1.10)中的非线性项，得

$$\mathcal{L}u(x)+\mathcal{N}u_0(x)=f(x), \tag{1.11}$$

则式(1.11)转化为线性微分方程。求解式(1.11)可得一个新的函数 $u_1(x)$，由此可以构造一个线性迭代格式

$$\mathcal{L}u_n(x)+\mathcal{N}u_{n-1}(x)=f(x)。 \tag{1.12}$$

如果迭代格式(式(1.12))是收敛的，则 $u_n(x)\to u(x)$，$n\to\infty$。在实际计算时，给定一个控制精度 ε，若 $|u_n(x)-u_{n-1}(x)|\leqslant\varepsilon$，则迭代停止，得到非线性问题的近似解。这个过程称为直接线性化迭代法。

直接线性化迭代法在线性化非线性项时，可能存在多种线性化选择，有些是收敛的，有些可能不收敛，收敛的速度也不相同。这需要试算来确定一个有效的计算格式，后续各章将详加介绍。对于收敛速度很慢的直接线性化迭代格式，可采用 Newton 线性化迭代法加速。

1.3.2 Newton 线性化迭代法

不妨设非线性方程(式(1.10))的非线性项为

$$\mathcal{N}u(x)=F(x,u,u',u''), \tag{1.13}$$

对于给定的初始函数 $u_0(x)$，多元函数 $F(x,u,u',u'')$ 关于未知函数 $u(x)$ 及其各阶导数的 Taylor 展开式为

$$\begin{aligned}F(x,u,u',u'') &= F(x,u_0,u'_0,u''_0)+F_u(x,u_0,u'_0,u''_0)(u-u_0)\\&\quad+F_u{}'(x,u_0,u'_0,u''_0)(u'-u'_0)+F_u{}''(x,u_0,u'_0,u''_0)(u''-u''_0)+\cdots,\end{aligned} \tag{1.14}$$

式中：$F_u, F_{u'}, F_{u''}$分别为函数 $F(x,u,u',u'')$ 关于 u,u',u''的偏导数。

忽略式(1.14)的高阶项，代入式(1.10)，得

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}u + F(x,u_0,u'_0,u''_0) + F_u(x,u_0,u'_0,u''_0)(u-u_0)\\&\quad + F_{u'}(x,u_0,u'_0,u''_0)(u'-u'_0) + F_{u''}(x,u_0,u'_0,u''_0)(u''-u''_0) = f(x),\end{aligned}\tag{1.15}$$

式(1.15)为线性微分方程。由此可构造一个线性迭代格式，即

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}u_n + F(x,u_{n-1},u'_{n-1},u''_{n-1}) + F_u(x,u_{n-1},u'_{n-1},u''_{n-1})(u_n-u_{n-1})\\&\quad + F_u{}'(x,u_{n-1},u'_{n-1},u''_{n-1})(u'_n-u'_{n-1}) + F_u{}''(x,u_{n-1},u'_{n-1},u''_{n-1})(u''_n-u''_{n-1}) = f(x)。\end{aligned}\tag{1.16}$$

迭代求解式(1.16)，得到非线性问题的数值解。式(1.16)称为 Newton 线性化迭代法。

一般来说，Newton 线性化迭代法的收敛速度要比直接线性化迭代法快，一些直接线性化迭代法不收敛的非线性问题，Newton 线性化迭代法是收敛的。直接线性化迭代法的计算格式要比 Newton 线性化迭代法简单。

采用线性化迭代法求解非线性问题的最大优点是，可以利用求解线性问题的数值方法求解非线性问题，不需要求解非线性代数方程。求解线性问题的计算程序可直接用于求解非线性问题。

1.4 重心插值及其微分矩阵

线性化迭代法求解非线性问题，将非线性微分方程转换为线性微分方程求解。重心插值配点法是求解线性微分方程的高精度、高效率数值方法。重心插值配点法求解各种线性微分方程的计算格式可参考文献[5]。

本节介绍配点法求解线性微分方程中的一个重要工具——微分矩阵。利用微分矩阵可以直接写出线性微分方程的重心插值配点法离散公式的矩阵形式，为计算格式的建立和程序的编写创造便利条件。

1.4.1 一维重心插值及其微分矩阵

在区间$[a,b]$上给定 N 个离散节点 $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$，以及相应的函数值 $f_i = f(x_i)$，$i = 1,2,\cdots,N$，Lagrange 多项式插值公式可表示为

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \ell_j(x) f_j, \ell_j(x) = \prod_{k=1,k\neq j}^{N}(x-x_k) \Big/ \prod_{k=1,k\neq j}^{N}(x_j-x_k), j = 1,2,\cdots,N,\tag{1.17}$$

式中，$\ell_j(x)$，$j = 1,2,\cdots,N$ 为 Lagrange 插值基函数。

定义重心插值权

$$w_j = 1 \Big/ \prod\nolimits_{j\neq k}(x_j-x_k),\quad j = 1,2,\cdots,N,\tag{1.18}$$

式(1.17)可改写为[34]

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k(x) f_k, \xi_k(x) = \frac{w_k}{x-x_k} \Big/ \sum_{j=1}^{N} \frac{w_j}{x-x_j},\quad k = 1,2,\cdots N,\tag{1.19}$$