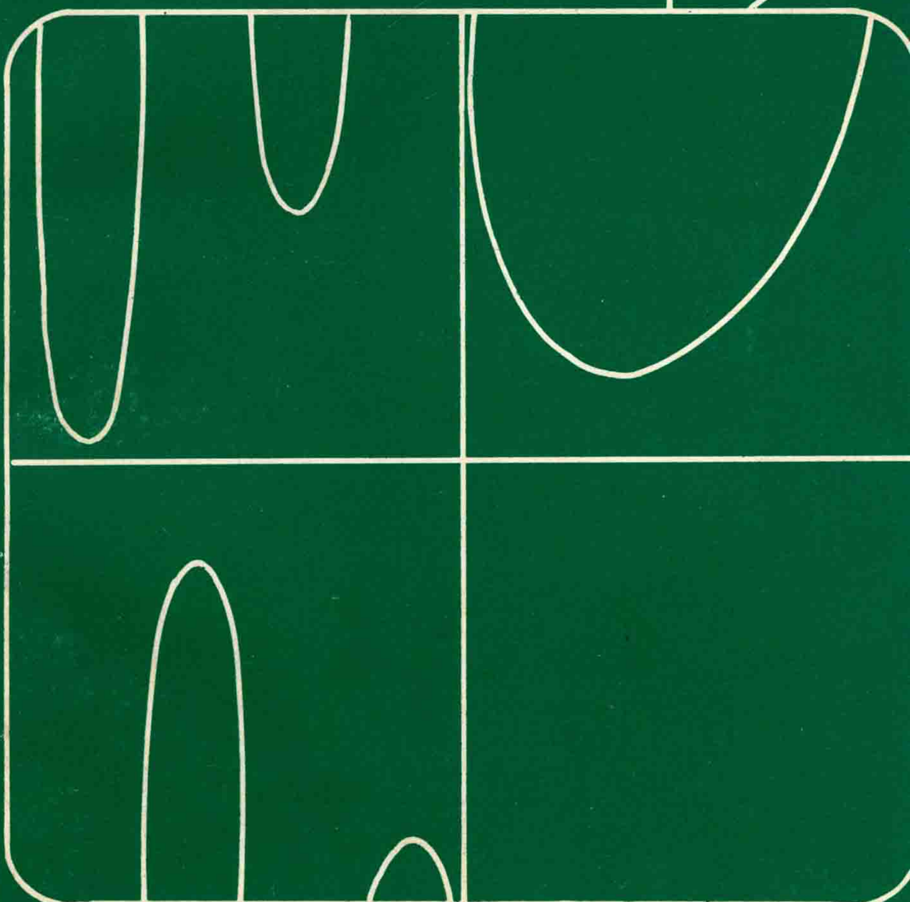
科學圖書大庫

工程數學(下)

譯者 吳治平



徐氏基金會出版

科學圖書大庫

工程數學（下）

譯者　吳治平

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　　　發行人　石開朗

科學圖書大庫

中華民國七十年八月二十一日初版

工程數學(下)

基本定價 ~~4.40~~ 3.40

譯者 吳治平 台灣大學化工系工學士

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。　謝謝惠顧

局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱 13-306 號

發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥帳戶第 15795 號

電話 9221763 9271575 9271576

承印者　大原彩色印製有限公司　台北市武成街三五巷九號　電話 3070998

初版原序

近代由科學到實際應用之間的時距已經愈縮愈短，因此，科學家與工程師對數學的需求也相對增加了。雖然工學院學生的數學能力在過去三十年已經受到了極大的重視，但是超越傳統微積分教材以後的數學一直受到限制。至於數學教材的進一步推展之所以受到阻力，要歸結於幾個原因，一方面因爲工程學科的課程愈來愈繁雜，一方面由於在科學與工業界具有核心地位的數學難以統一，再方面就是缺乏專門的機構與適合的編者。然而，數學敎育範圍的全面擴大是無法避免的，因爲事實證明任何工程師如果要在科學上有任何突破，就非得提高他自己的數學水準不可。

這本書的目的就是在提高上述的數學水平。而作者不但以今日工程上的需求做爲編寫的準則，同時也根據「國家科學基金會」(the National Science Foundation)，「美國工程敎育組織」(American Society of Engineering Education) 及其前身「工程敎育推展組織」(Society for the Promotion of Engineering Euducation)……等學術機構所發起的無數次有關工程敎育的討論與研究，綜合工程先進思想而完成此書。

過份重視數學上的邏輯關係與嚴格的理論根據往往會使它脫離現實而失去趣味。然而，如果應用問題重於理論架構又往往使它失去了發展的潛力。因此作者儘量求其平衡，以使之成爲介紹應用數學的良好敎材。

至於主題的取捨是作者考慮該方面在應用上出現的比率而決定的，書中的內容與實例是注重它們在原理運用上的價值，而並不在工程上某些專門的技巧解法上作深入。

雖然本書儘量減少閱讀前需要具備的基本條件，但是讀者也該明白

，在繁雜的推導過程中，我們沒有能力讓出空間來解釋一些太根本的問題。爲了使大家能熟悉定理並培養對物理問題的數學解析能力，我們很多例子都做到了不厭其煩的地步。作者相信牛頓的話“一個例題最終的結論往往與我們最初的判斷有一段差距”。

I.S. SOKOLNIKOFF
R.M. REDHEFFER

二版原序

新版的書雖然在內容上不同於初版，但它的基本精神並沒有改變。

數學在應用上的用途大增，而且在科學與工程方面的預備材料已有很大的改進。因此，一些初版內介紹性的內容現在改寫成了新的主題，而數學思考的培養再度被強調。因爲無窮級數不但在應用上有重要地位，它也是數學分析結構上不可或缺的概念，所以我們把它列爲第一章。適當的熟悉這一章對於其他各章的學習是有必要的，但是這並不是絕對的。然而，如果想要單獨研究本書中的任一章，讀者必須具有微積分的良好基礎。

第二章與第三章對常微分方程式與拉普拉斯變換的討論，我們引進很多線性與非線性的觀念，這是初版所沒有的。縱然在這兩章中強調技巧的運用，但整個內容是整體的知識，而非一連串獨立的技巧。在多變函數與向量場論中自由座標的合成方面我們做了較多的修訂。

問題與練習都顯著的增加了，但是我們並沒一味的增加同樣深度的問題。書中問題分成三大類：(1)增進前節使觀念融會的內容。(2)爲後面的新觀念做引導。(3)使原章節內的結論得到適當的發揮與推展。全書中我們強調數學對科學以及科學對數學之間的關係。

本書的內容足夠每星期三小時，連續六個學期的課程進度。很多學校要求工學院的學生每年都得讀數學，書中所選定的主題完全配合國家科學基金會在應用數學方面的評鑑。這些評鑑可以參考H. Liebowitz與J.M. Allen所著的“固態力學課程”。Prentice-Hall，Inc. Englewood Cliffs. N.J. 1961。

本書網羅工程師所需最基本的數學技巧。不可諱言的，蘇俄的物理學家與工程師在數學方面會超過這些最基本的內容。雖然只有少數美國

的理工學院將工程數學的課程增加到一年以上，但是數學教學的課程必定會愈變愈長，因爲在數學上所下的功夫不論對未來職業上的研究或更深入的發展都是一項最有力的投資。

I. S. SOKOLNIKOFF
R. M. REDHEFFER

譯者序

一本工程數學教材，能闡明定理和數學分析的過程，這僅是基本要求。至於行文流利易懂，固然對初學者甚為有益，也畢竟算不上出色。譯者認為眞正值得研讀的數學書籍，其內容在觀念方面應能脫離俗套，並可觸發新思想。如果書中還能暗示一些數學應用在工程上的通則，使讀者對工程問題本身產生更有系統的概念，那就更難能可貴了。本書就具有一些與衆不同的特色，例如在第二章介紹有關等斜線與相平面的觀念，微分不等式的演導過程，以及第三章所介紹系統回應的概念與狄克拉分佈的理論都有其獨到之處；書中的例題能前後呼應，表現出各章節與各定理間的連貫性，殊為難得。總之，本書不僅介紹數學理論，還能在整體上表現出一些在其他同類書籍中不易發現的概念，這也是譯者偏愛本書的原因。

由於數學本身是一種抽象思考的理論，用具體之文字來闡述抽象的概念，其中總會有“辭不達意”之處。尤其當理論深入後，更難以三言兩語說得清楚；然而敍述的詞語太多，又容易彼此混雜，產生邏輯不嚴密的缺點。何況有些抽象概念並不是一味旁敲側擊就能解釋得通的。有時，基於一個數學定理本身的結構繁複，用來說明它的詞句經常需要同時包括幾個邏輯關係。如此，句子就愈來愈“不通”了。本書所探討者既然是數學問題，上述的困難總是無可避免的。所以我建議讀者在研讀本書之際多讀相關的書籍，多思考相關連的問題，因為往往我們無法了解一種數學現象的根本原因是對它太陌生。如果能先熟悉問題，就算答案初起不能得到，最後必能尋出解決問題的方法。

本書原著共分十章，由無窮級數到數值分析，工程數學中比較大的幾個主題都已涵蓋，可為學習工程數學的良好起點。書中對於目前工程

數學發展的新趨勢也隨時提出，讓我們能了解進一步研究的方向。原書前五章以微分方程與多變函數爲主體，後五章則以向量場論與偏微分方程爲主體，今按前後分上下兩冊出版，如此安排希望讀者能夠滿意。

譯者利用餘暇翻譯此書，一方面基於個人對數學的喜好，一方面也希望能以此書爲起點，爲促進國家學術發展，盡一分力量。本書下冊最後兩章與先後校正期間，多承陳志平、孫一明、蔡木山、陳宜昌等同學幫忙指正，特此致謝。譯者才疏學淺，雖勉力以赴，誤漏之處定所難免，期盼先進賢達多予指教是幸。

吳 治 平

於台大化工系

目　錄

第六章　向量場論

本章將討論歐基里得三度空間的純量場與向量場。我們強調純量與向量函數不隨座標系統改變的特性。因為自然界的現象並不會遵循某種座標系發展，而座標系的選定只不過是方便我們的計算而已。本章的重心在導出線、面、體積積分之間的轉化性質。這些理論分別由高斯（Gauss）、葛林（Green）、斯托克（Stokes）與奧斯托格斯基（Ostrogradsky）導出，在流體力學、熱力學、電動學方面，都有廣泛的用途。當然，它們在數學分析的理論建立上，也占有極其重要的地位。

純量與向量場

6－1　不變量（Invariant），純量與向量場

在上冊前一章，我們以笛卡兒座標系為參考座標來討論多變數函數。這是因為變化率（函數的導數）或面積（函數積分）的概念在此系統能得到簡化。這些概念本身與座標系是完全無關的。我們只不過是藉由某種特別的系統把它們描述出來。使它們容易被接受。然而，當我們以某種特殊系統為參考座標來建立幾何或物理概念時，這個過程並不能夠暗示我們特殊系統導出的概念也能適用於其他任何場合。因此，我們希望能用不變形式來說明自然現象的基本觀念或理論，而這種形式將不涉及任何座標系統。

空間中的點是不度量，在笛卡兒座標系，我們可用數組（x、y、z）來表示它，但是我們並不會把點對應到不變的數組上。因為在座標系改變後，我們可以用另一個數組來表示這個點，而座標系統的轉化並不會

影響到點本身的性質。同樣的，點集合所形成曲線或曲面的方程式雖然會隨座標系統而改變，但它們本身都是不變量。本章內我們列出了所有相關於不變量的基本定義與定理，但不涉及特殊化的計算。

若空間中一區域R*中的任意點P，都有一數u(P)與之對應。我們稱$u=u$(P)是R中的純量點函數(scalar point function)。物體內一點的溫度便是純量點函數。物體浸在液中表面所受的靜水壓力也代表同樣的函數。

除了點函數之外，我們可以考慮區域的純量函數或區域函數(region function)。若對適當種類的區域D，每一有界區域D對應函數$u(D)$，則u是純量區域函數(scalar region function)。純量區域函數的一個簡單例即面積$a(D)$，這個函數對應於任何有面積的平面區域。若已知一區域D的質量分布，其質量$m(D)$也是一個分布於D的純量區域函數。這種函數定義於R中的某種區域，顯然面積與質量並非對所有R中的區域都能成立，所以我們特稱能夠定義區域函數$u(D)$的區域爲可執行(admissible)區域。

本書所討論的區域函數都有加成性。這也就是說，如果D可以分割成D_1，D_2兩個不能重疊的區域，使$D=D_1+D_2$。只要D_1，D_2是可執行的，那 D也是可執行的，而且$u(D)=u(D_1)+u(D_2)$。面積函數$a(D)$是可加成的，因爲若D_1，D_2爲不相關的有面積平面區域，則D_1+D_2也有面積，且此面積爲D_1與D_2面積的總和。同理，質量函數$m(D)$也有加成性。

當R中每一點P都能決定一個向量$\mathbf{v}(P)$時，$\mathbf{v}=\mathbf{v}(P)$稱爲向量點函數(vector point function)。流體的速度$\mathbf{v}(P)$就是向量點函點。向量區域函數也有相似的定義。除非特別聲明，我們將視純量或向量函數爲單值的，換言之，它們是道道地地的「函數」。有時我們也把純量與向量函數稱爲「場」(field)，有關討論純量與向量場的理論，稱爲「場論」(field theory)。

*在第1節，我們用「區域」來代表點集合，雖然「區域」本身應該有更嚴密的定義。

定義一個區域於某特定的座標系將有助於純量或向量函數的計算。在笛卡兒座標系，我們常用 $u(x、y、z)$ 代替 $u(P)$，$\mathbf{v}(x、y、z)$ 代替 $\mathbf{v}(P)$。向量 $\mathbf{v}(x、y、z)$ 在每一點都表示了它延著特定基底方向的三個分量 $v_x(x、y、z)$、$v_y(x、y、z)$、$v_z(x、y、z)$。不過地此要再一次提醒各位，座標系的選定只是爲了運算方便，而 $u(P)$ 與 $\mathbf{v}(P)$ 是完全取決於 P，而與 P 位置所表示的座標系統完全無關。純量與向量點函數與座標系無關，我們稱這種現象爲「不變性」(invariance)，我們將會明白，既使用新的系統來表示 $u(P)$ 與 $\mathbf{v}(P)$，仍舊無法改變其基本的特性。

6-1　習　題

1. 舉出物理上未在本節出現之 (a) 純量　(b) 向量場的例子各三個。
2. 畫出一繞其中心軸以等角速度之圓盤的速度向量場。
3. 畫出曲線族 $y = cx^1$ 之向量場，c 爲一參數。
4. 下列何者是可加成性的純量區域函數：溫度、體積、熱量、速度、速率、電荷、亮度？

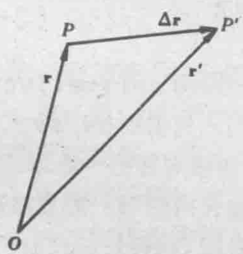


圖 1

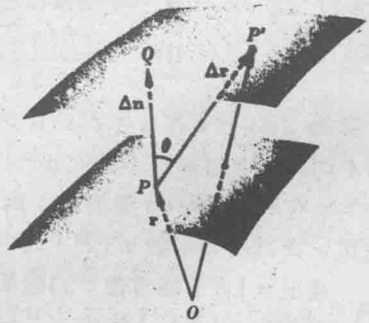


圖 2

6－2 純量與向量函數的連續性，梯度

我們考慮在某區域R內的純量點函數$u(P)$或向量點函數$\mathbf{v}=\mathbf{v}(P)$。如果有

$$\lim_{P'\to P} u(P')=u(P) \quad 與 \quad \lim_{P'\to P}\mathbf{v}(P')=\mathbf{v}(P)$$

則$u(P)$與$\mathbf{v}(P)$在P點連續＊。若函數在區域中的每一點都連續，則函數在此區域內連續。

若$u(P)$是某區域內的連續純量函數，我們可以在此區域內選定一點O爲位置向量。$\mathbf{r}\equiv\overrightarrow{OP}$的始點。若$P'$是$P$近旁的一點，以$\overrightarrow{OP'}$代表$\mathbf{r}$並記作（見圖1）

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$$

除式

$$\frac{u(P')-u(P)}{|\Delta\mathbf{r}|}\equiv\frac{u(P')-u(P)}{\Delta s} \qquad (2-1)$$

其中$|\Delta\mathbf{r}|=\Delta s$，此式提供了$u(P)$在空間的改變速率，我們可使$P'$趨近於$P$來研究（2－1）的極限值。如果選擇$P'$使$\Delta\mathbf{r}$與某固定向量$\mathbf{t}$平行，並$\Delta\mathbf{r}\to 0$。在極值存在時我們可以寫出

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{u(P')-u(P)}{\Delta s}=\frac{du}{ds} \qquad (2-2)$$

而稱du/ds爲u在t方向的方向導式(directional derivative)。對擇不同的$\mathbf{t}$可以得到不同的$\Delta\mathbf{r}$，並在P點得到不同値的du/ds。若P點的所有導式du/ds都連續，則$u(P)$在P連續可微分。除非有特別敍述，我們將視函數$u(P)$對它所定義之區域R內的每一點P都連續。

滿足$u(P)$爲常數c的點集合稱爲等量表面(level surface)S，一般記作$u(P)=c$。

現在我們考慮一組平面S與S'，分別代表$u=c$與$u=c+\Delta c$，其

＊比較第4章第7節

中$\triangle c$是c的小變化量（見圖2）。若P是S上一點，P'是S'上一點，則$\triangle u = u(P') - u(P)$爲$\triangle c$，這與$P'$在$S'$上的位置無關。但是空間變化率的平均值

$$\frac{u(P') - u(P)}{|\triangle \mathbf{r}|} \equiv \frac{\triangle u}{\triangle s} \tag{2-3}$$

顯然會隨$\triangle \mathbf{r}$變化。如果延著固定方向$\triangle \mathbf{r} = k\mathbf{t}$使$\triangle|\mathbf{r}$趨近於零，此時比率式就代表（2-2）的方向導式，而且此時$\triangle c \to 0$。可知在P'位於曲面s之法線$\overrightarrow{PQ} \equiv \triangle \mathbf{n}$上時，$n$有最大空間變化率（見圖2），因爲$P'$在這個位置時（2-3）的分母$|\triangle \mathbf{r}|$有極小值$|\triangle \mathbf{n}|$。事實上

$$\triangle \mathbf{n} \doteqdot \triangle \mathbf{r} \cos\theta \tag{2-4}$$

其中θ爲s之法線$\overrightarrow{PQ}$與$\overrightarrow{PP'}$的夾角

由（2-4）知

$$\frac{du}{dn} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{du}{ds} = \frac{du}{ds}\cos\theta \tag{2-5}$$

等量表面u＝常數的法線方向導式du/dn稱爲$u(P)$的「**法導式**」（normal derivativs）。

若$\mathbf{n}$是p點的單位向量，在$\triangle u > 0$的方向，我們可以定一種向量

$$\text{grad}\,u \equiv \mathbf{n}\frac{du}{dn} \tag{2-6}$$

表示u的梯度（gradient of u）。這個向量在$du/dn \neq 0$時時代表$u(P)$最大空間增率的方向與大小，（2-6）的梯度向量顯然與座標系選定無關是一種不變量。

由物理的觀點來看。若$u(P)$表示溫度場，則梯度向量位於等溫面$u = c$的法線方向，而它代表溫度增率最大的方向。

如果將$u(P)$表成笛卡兒座標$u(x, y, z)$，由$u(P)$在R中連續可微分知偏導式u_x, u_y, u_z連續。於是我們可以記作（見第5章第4節）。

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y+\epsilon_3\Delta z \quad (2\text{-}7)$$

其中 ϵ_1，ϵ_2，ϵ_3 在 Δx，Δy，$\Delta z\to 0$ 時會趨近零。(2-7)除上 $\Delta s\equiv\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，再令 $\Delta s\to 0$，因為在 $\Delta s\to 0$ 時，ϵ_1，ϵ_2，ϵ_3 趨近於零，我們得到(比較第5章第5節)

$$\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds} \quad (2\text{-}8)$$

顯然 $dx/ds=\cos(x,s)$，$dy/ds=\cos(y,s)$，$dz/ds=\cos(z,s)$ 是對應於 $d\mathbf{r}$ 之單位向量 $\mathbf{t}$ 的方向餘弦(見圖3)。因為 P 點的位置向量 $\mathbf{r}$ 為 $\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$

$$\mathbf{t}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\mathbf{i}\frac{dx}{ds}+\mathbf{j}\frac{dy}{ds}+\mathbf{k}\frac{dz}{ds} \quad (2\text{-}9)$$

於是(2-8)可以視為向量

$$\nabla u=\mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z} \quad (2\text{-}10)$$

與(2-9)中單位向量 $\mathbf{t}$ 的內積。即

$$\frac{du}{ds}=\nabla u\cdot\mathbf{t} \quad (2\text{-}11)$$

在 du/ds 有最大值時，$\mathbf{t}$ 的方向即等量表面 u = 常數之法向量 $\mathbf{n}$ 的方向。可知此時

$$\nabla u=\operatorname{grad} u \quad (2\text{-}12)$$

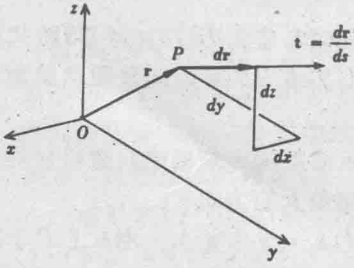


圖3

因為(2-11)的右邊可以視為向量 ∇u 在 $\mathbf{t}$ 方向的分量，而最大分量是