宏鹏教育

教师资格证国家统一考试专用指导教材

数学学科知识与教学能力
（初级中学）

教师资格考试命题研究中心 组 编

Shuxue Xueke Zhishi Yu Jiaoxue Nengli

◉ 资深专家编写 ◉ 涵盖所有考点

◉ 名师精讲难点 ◉ 国考最佳选择

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

教师资格证国家统一考试专用指导教材

数学学科知识与教学能力
（初级中学）

教师资格考试命题研究中心　组　编

Shuxue Xueke Zhishi Yu Jiaoxue Nengli

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学学科知识与教学能力．初级中学/教师资格考试命题研究中心组编．—北京：北京师范大学出版社，2015.3

教师资格证国家统一考试专用指导教材

ISBN 978-7-303-18605-1

Ⅰ.数… Ⅱ.①教… Ⅲ.①中学数学课—教学法—初中—中学教师—资格考试—教材 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 038736 号

营 销 中 心 电 话　010-58802181　58805532
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com
电 子 信 箱　gaojiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社　www.bnup.com
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875

印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：203 mm×280 mm
印　　张：12
字　　数：362 千字
版　　次：2015 年 3 月第 1 版
印　　次：2015 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：27.00 元

策划编辑：郭兴举　　责任编辑：郭兴举　程龙云
美术编辑：焦　丽　　装帧设计：焦　丽
责任校对：王　婉　　责任印制：陈　涛

编写说明

为加快我国教师队伍建设，推进教育事业健康发展，严把教师从业资质，从2011年起，我国开始实行由国家统一命题的教师资格国家统一考试，并着手建立“国标、省考、县聘、校用”的教师职业准入和管理制度。

2011年10月，教育部师范教育司、教育部考试中心制定了《中小学和幼儿园教师资格考试标准（试行）》。该标准是教师职业准入的国家标准，是从事中小学和幼儿园教师职业的最基本要求，是进行中小学和幼儿园教师资格考试的基本依据。从2015年起，教师资格考试将打破各地自行考试的形式，在全国实施国家统一考试。

为了帮助广大考生把握考试要点，在短时间内有效提升考试成绩，北京师范大学出版社与宏鹏教育集团合作，组织教师资格考试命题专家、阅卷老师、相关学科专家及一线名师深入研究国家教师资格考试的命题趋势，紧扣考试大纲，在坚持实用性、科学性、灵活性的前提下精心编写了本套教材，旨在帮助考生用最少的时间，以最快的速度，较为全面地掌握国家教师资格统一考试所要求的基础知识，明确考试范围，掌握重点，突破难点，取得优异成绩。本书主要特点如下：

·考点覆盖全面，准确把握考情

教师资格证国家统一考试的过关秘籍在于知识全面性及准确性，考生要达到这点必须对考点有全面深刻的掌握。本书在研究考情及真题的基础上，对知识点进行了系统的梳理和归纳，使考生能自如地应对各地考试。

·重点清晰明了，建构科学合理

本书对重要知识点进行了重点阐述，对一般考点进行了合理阐述，让考生对知识点能做到心中有数。

·难点通俗易懂，便于理解记忆

教师资格国考之所以难度大，在于对考生的要求越来越高，导致考试内容较为偏僻生硬。为应对这种趋势，本教材结合近年来的考试真题，尽力让考生对难点也能掌握透彻，对偏僻考点也能应对。

由于时间和水平所限，本书的缺点和错误在所难免，对于书中的疏漏、错误之处，恳请读者登录我社网站（http：//gaojiao. bnup. com）和宏鹏教育网站（http：//www. hnhpjy. com）的论坛进行批评指正，我们愿意与广大考生一起学习、交流、相互促进与提高。

每一位考生的时间都是宝贵的，希望我们这套教材能够帮助考生用最少的时间，做好最充分的准备，得到最丰厚的回报。

目 录

第一部分 学科知识

第二部分 课程知识

第三部分 教学知识

第四部分 教学技能

第一部分　学科知识

XUE KE ZHI SHI

考试目标

掌握大学专科数学专业基础课程的知识、中学数学的知识。具有在初中数学教学实践中综合而有效地运用这些知识的能力。

第一章　数与代数领域

考纲提要

1. 准确掌握基本定义，数系的扩充原则及每一次数系扩充的原因，各个数集的性质及数集里的各种代数运算，函数概念的三种定义及函数的相关性质，多项式的因式分解方法，不等式的有关性质及不等式的证明方法，一元三次方程和一元四次方程的解法，高次方程的根与系数的关系，方程组的解法，数列的求和方法，等差数列与等比数列所具有的性质等。

2. 了解数、函数、方程的发展史。

第一节　数系

"数"这个概念的历史几乎和人类的历史一样久远。人类在蒙昧时代就已经具有识别事物多寡的能力，从这种原始的"数觉"到抽象的"数"概念的形成，是一个缓慢的渐进的过程，"数"概念的形成可能与火的使用一样古老，大约可以追溯到30万年以前，而它对于人类文明的意义也绝不亚于火的使用，但是，人类对数系的研究，直到19世纪末、20世纪初才有了严格的基础。数系的扩充过程中，由计数产生了自然数，这也是人类最初认识的数；由分物产生了分数；由刻画相反意义的量产生负数；由线段不可公度引进无理数；后又因数学本身提出的问题，引进了虚数，使数系最后发展为复数系。

一、自然数系

自然数是最简单的、也是人类最早发现和使用的"数"。自然数是一切其他数系逐步扩充并得以实现的基础。

(一)自然数的定义

关于自然数，我们似乎很熟悉。如表示一个人的数是1，表示一辆汽车的数是1……那么究竟什么是1呢？下面借助集合给出1乃至任意自然数的定义。

一个集合若不能与其任一真子集建立一个双射，则称该集合为有限集，称非空有限集合的基数(即集合中元素的个数)为自然数。一切自然数组成的集合叫做自然数集，记为**N**。

若非空有限集合 A 没有非空的真子集，则称集合 A 的基数为1，即 $\overline{A}=1$。例如，若 $A=\{a\}$，则 $\overline{A}=1$。

有限集合 $\{a, b\}$ 的基数记做2；

有限集合 $\{a, b, c\}$ 的基数记做3；

……

"自然数"这一术语首先被罗马学者波伊修斯(A. Boethius)使用，但是早期所说的自然数只是正整数序列，无论是基数理论，还是序数理论，事实上都没有涉及0。皮亚诺公理(1)(见后文)告诉我们1是一个自然数，而公理(3)说1不是任何自然数的后继。因此，皮亚诺公理中1是最小的自然数，0不是自然数。

我国数学教材在20世纪90年代之前一直没有把0作为自然数，或者称其为"扩大的自然数

列”，自然数是从 1 开始的。但是 1993 年颁布的国家标准《物理科学和技术中使用的数学符号》(GB 3102.11—1993)中规定自然数包括 0。因此，近年编写的中小学数学教材中，都根据上述国家标准进行了修改，具体表述为：用“0”表示“一个物体也没有”所对应的计数，因而 0 从此也作为自然数。

但是直到现在，数学界有关于 0 是不是自然数的说法仍然存在争议。实际上，0 是否是自然数可以看作只是一个规定而已。由于皮亚诺公理中 1 是最小的自然数，为后文叙述方便，本书约定自然数从 1 开始。

(二)自然数几种运算

1. 自然数的加法定义

设非空有限集 A，B，C，其各自的基数分别为：a，b，c，且 $A\cap B=\varnothing$。

若 $C=A\cup B$，那么 c 叫做 a 与 b 之和，记做 $c=a+b$，其中 a 叫做被加数，b 叫做加数，求和的运算叫做加法。

根据集合运算的性质，容易证明自然数的加法满足交换律和结合律。

(1)加法交换律：$a+b=b+a$。

(2)加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$。

证　这里只证明加法结合律。

因为集合的并集运算满足结合律，即 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。这里 $A\cup B$ 的基数是 $a+b$，$(A\cup B)\cup C$ 的基数为 $a+b+c$，$B\cup C$ 的基数是 $b+c$，$A\cup(B\cup C)$ 的基数是 $a+b+c$，由两个等价集合的基数相同，即得 $a+b+c=a+b+c$。

2. 自然数减法的定义

设 a，b，c 是自然数，若 $c=a+b$，那么 a 叫做 c 与 b 的差，记做 $a=c-b$，c 叫做被减数，b 叫做减数，求差的运算叫做减法。

3. 自然数乘法的定义

设 b 个等势集合 A_1，A_2，…，A_b，其中任何两个集合的交集是空集。设

$$\overline{\overline{A_1}}=\overline{\overline{A_2}}=\cdots=\overline{\overline{A_b}}=a,$$

若

$$C=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_b,\ \overline{\overline{C}}=c,$$

那么 c 叫做 a 与 b 的积，记做 $c=ab$，其中 a 叫做被乘数，b 叫做乘数，求积的运算叫做乘法。

根据集合运算的性质，可以证明自然数的乘法满足以下运算律：

(1)乘法交换律：$mn=nm$。

(2)乘法对加法的分配律：$(a+b)c=ac+bc$。

(3)乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$。

4. 自然数的除法定义

设 a，b，c 是自然数，若 $a=bc$，那么 c 叫做 a 与 b 的商，记做 $c=\dfrac{a}{b}$ 或 $c=a\div b$，其中 a 叫做被除数，b 叫做除数，求商的运算叫做除法。

自然数可以进行加减乘除四则运算，加法和减法互为逆运算，乘法和除法互为逆运算。但是，在自然数集中，并不是任意两个自然数都能做减法或者除法运算的。

(三)自然数的序数理论

早期的自然数序数理论是意大利数学家皮亚诺 1889 年从“集合”“后继”等原始概念和 5 条公理出发，运用公理化方法建立起来的，即：任何一个非空集合 $\mathbf{N}$ 的元素叫做自然数，如果在这个集合里的某些元素之间有一个基本关系“后继”(用符号“$^+$”表示)，满足下面的公理：

(1)$1\in\mathbf{N}$。即 $\mathbf{N}$ 中存在一个元素 1。

(2) $\forall a\in \mathbf{N}$，有 $a^+\neq 1$。即 1 不是 $\mathbf{N}$ 中任何元素的后继。

(3) $\forall a\in \mathbf{N}$，则 $\exists a^+$，有 $a^+\in \mathbf{N}$。即对于 $\mathbf{N}$ 中的任何元素 a，在 $\mathbf{N}$ 中存在一个后继 a^+。

(4)若 $a^+=b^+(a,\ b\in \mathbf{N})$，则 $a=b$。即 $\mathbf{N}$ 中任何元素不能作为 $\mathbf{N}$ 中多于一个元素的后继。

(5)归纳公理　设 $\mathbf{N}$ 的一个子集 M 具有下列两个性质：

$1\in M$。

若 $a\in M$，则 $a^+\in M$。

那么，M 就含有一切自然数，即 $M=\mathbf{N}$。

上述公理系统通常称为皮亚诺公理系统。有了这组公理，就把自然数集里的元素完全确定下来。例如，从 1 出发，$1^+=2$，$2^+=3$，…，如此继续下去，便得到自然数列 1，2，3，4，…也可以用公理化方法来定义自然数的加法、乘法运算及顺序关系。

(四)自然数集的性质

性质 1　1 是自然数中最小的数，即对于任何自然数 a，有 $a\geqslant 1$。

证　若 $a\neq 1$，依皮亚诺公理(4)，a 必为某一自然数 b 的后继，因此

$$a=b^+=b+1=1+b>1。$$

性质 2(自然数集的离散性)　在任意两个相继的自然数 a 与 a^+ 之间不存在自然数 b，使 $a<b<a^+$。

证　若 $a<b$，则有 $k\in \mathbf{N}$，使 $b=a+k$，注意到 $k\geqslant 1$，即得 $b=a+k\geqslant a+1=a^+$。因此，b 不能小于 a^+。

性质 3　自然数集是有序集。

证　有序集即为这样的集合，在此集合中的任意两个元素之间存在着次序关系，并且具有全序性和传递性。自然数集中已经定义了次序关系，并知其满足全序性和传递性，因此，自然数集是一个有序集。

性质 4　自然数集是良序集。

证　若一个有序集 A 的任意非空子集都有首元素，那么这样的有序集叫做良序集。自然数集的良序性质可用最小数原理来表述，即“自然数集的任一非空子集中必存在一个最小数”。

设 $A\subseteq \mathbf{N}$，且 $A\neq\varnothing$。若 $1\in A$，根据性质 1，1 就是 A 的最小数。若 $1\notin A$，考虑所有不大于 A 中任何一个数的自然数构成的集合，即作集合

$$M=\{x\mid x\in \mathbf{N},\ x\leqslant b,\ \forall b\in A\}。$$

显然，$1\in M$，且 $M\subset \mathbf{N}$。M 中必存在自然数 a，使 $a^+\notin M$。因若不然，根据归纳公理就有 $M=\mathbf{N}$，这与 $M\subset \mathbf{N}$ 矛盾。按集合 M 的构成方法，必有 $a\leqslant 6(\forall b\in A)$，且 $a\in A$。事实上，若 $a\notin A$，则由 $\forall b\in A$，应有 $a<b$，从而 $a^+\leqslant b$，即 $a^+\in M$，与上面的结论矛盾。因此，a 是 A 的最小数。

性质 5(阿基米德性质)　设 a，b 为任意两个自然数，则存在自然数 n，使得 $na>b$。

证　因为 $a\geqslant 1$，取 $n>b$(如 $n=b+1$)，则 $na>ba\geqslant b\cdot 1=b$。

(五)数学归纳法

对于与自然数有关的命题，通常采用数学归纳法证明。而依据就是是自然数的定义及其性质，常用的有两种数学归纳法：第一数学归纳法和第二数学归纳法。

1. 第一数学归纳法

设 $P(n)$ 是关于自然数 n 的命题，若：

(1) $P(1)$ 成立。

(2)假设 $P(k)$ 成立，则 $P(k+1)$ 即 $P(k^+)$ 也成立。

那么，$P(n)$ 对任意自然数 n 都成立。

证　设 M 是使得命题成立的所有自然数的集合，则由(1)知，$1\in M$。又由(2)知，若 $k\in M$，

则 $k^{+}\in M$。于是，根据归纳公理，有 $M=\mathbf{N}$。即对于一切自然数 n，命题 $P(n)$都成立。

2. 第二数学归纳法

设 $P(n)$是关于自然数 n 的命题，若：

(1)$P(1)$成立。

(2)假设 $P(m)$对于所有适合 $m<k$ 的自然数 m 成立，则 $P(k)$成立。那么，$P(n)$对任意自然数 n 都成立。

证 假定 $P(n)$不是对所有自然数都成立，那么，使得 $P(n)$不成立的所有自然数的集合 A 非空。根据最小数原理，A 中必含有最小数 a。根据(1)，$P(1)$成立，所以 $1\notin A$，即 $a\neq 1$(或者说$a>1$)。这样对于所有适合 $1\leqslant m<a$ 的自然数 m，$P(m)$成立。所以由(2)知，$P(a)$成立，这与前面假设 a 是使 $P(n)$不成立的所有自然数的集合 A 中的最小数矛盾。这个矛盾证明了 $P(n)$对于任意自然数 n 都成立。

知识窗

扩大的自然数集——0 的加入

在基数理论中，通常把“0”定义为空集的基数；在序数理论中，把“0”作为唯一的“1”前面的数而引入自然序列。$\{0\}$与自然数集的并集，叫做扩大的自然数集，记做 $\mathbf{Z}^{+}$。扩大的自然数集中的任何元素，叫做非负整数。

在扩大的自然数集里，关于顺序关系和四则运算的定义，与原有的自然数集一样，并补充以下定义：

(1)0 小于任何自然数。

(2)$0+a=a+0(a\in\mathbf{N}$ 或 $a=0)$。

$a\cdot 0=0\cdot a=0(a\in\mathbf{N}$ 或 $a=0)$。

在扩大的自然数集里，原有的基本顺序律和基本运算律仍然成立，但有些也需作适当的改变。如 $a+b>a$ 应改为 $a+b\geqslant a$，$a>b\Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$ 应改为 $a>b\Rightarrow a\cdot c\geqslant b\cdot c$，等等。

二、整数系

整数的全体构成整数集，整数集是一个数环。在整数系中，正整数统称为自然数，即 $\mathbf{Z}^{+}=\mathbf{N}$。

在自然数集中，总能进行两个基本运算：加法与乘法，但是其逆运算：减法与除法并不总是可行的。先看减法，在 $\mathbf{Z}^{+}$ 中方程 $a+x=b$ 就不是总能求解的，所以有必要把数集 $\mathbf{Z}^{+}$ 扩充到较大的整数集 $\mathbf{Z}$，即，必须引入负整数。

(一)整数的定义

在 $\mathbf{Z}^{+}\cdot\mathbf{Z}^{+}=\{(m,n)\mid m,n\in\mathbf{Z}^{+}\}$上定义一个关系 R：

$$(m_1,n_1)R(m_2,n_2)\Leftrightarrow m_1+n_2=m_2+n_1,$$

则 R 是一个等价关系。

证 所谓等价关系，即设 R 是集合 A 上的一个关系，它具有自反性、对称性和传递性，则称 R 为一个等价关系。下面证明 R 是一个等价关系，

自反性：$\forall(m,n)\in\mathbf{Z}^{+}\cdot\mathbf{Z}^{+}$，因为 $m+n=m+n$，故$(m,n)R(m,n)$。

对称性：若$(m_1,n_1)R(m_2,n_2)$，即有

$$m_1+n_2=m_2+n_1\text{，则 } m_2+n_1=m_1+n_2,$$

故$(m_2,n_2)R(m_1,n_1)$。

传递性：若$(m_1,n_1)R(m_2,n_2)$，$(m_2,n_2)R(m_3,n_3)$，由定义有

$$m_1+n_2=m_2+n_1,\ m_2+n_3=m_3+n_2,$$

两式相加可得

$$m_1+n_2+m_2+n_3=m_2+n_1+m_3+n_2,$$

由此得 $m_1+n_3=m_3+n_1$，即$(m_1, n_1)R(m_3, n_3)$，所以，R 是 $\mathbf{Z}^+\cdot\mathbf{Z}^+$ 中的一个等价关系。

由于 R 是 $\mathbf{Z}^+\cdot\mathbf{Z}^+$ 中的一个等价关系，因此可以用 R 把 $\mathbf{Z}^+\cdot\mathbf{Z}^+$ 分成等价类，从而可以得到商集 $\mathbf{Z}^+\cdot\mathbf{Z}^+/R$。此商集我们称之为整数集 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^+\cdot\mathbf{Z}^+/R$。

我们记$[m, n]=\{(k, l)\in\mathbf{Z}^+\cdot\mathbf{Z}^+ \mid (k, l)R(m, n)\}$，于是

$$\mathbf{Z}=\{[m, n] \mid (m, n)\in\mathbf{Z}^+\cdot\mathbf{Z}^+\}。$$

例如：

$$[2, 3]=\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), \cdots\},$$
$$[1, 5]=\{(0, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 7), \cdots\}。$$

如图 1-1-1 所示，同一条线上的各点的坐标属于同一等价类，这个等价类表示一个整数。

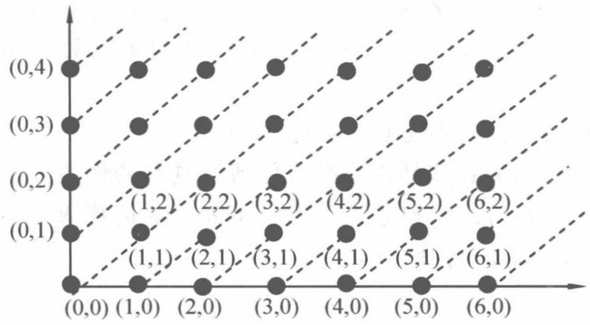

图 1-1-1

(二)整数的运算

1. 整数加法的定义

整数 $z=[m+p, n+q]$叫做整数 $z_1=[m, n]$与整数 $z_2=[p, q]$的和，即

$$[m, n]+[p, q]=[m+p, n+q]。$$

求两个整数和的运算叫做整数加法。

2. 整数乘法的定义

整数 $z=[mp+nq, mq+np]$叫做整数 $z_1=[m, n]$与整数 $z_2=[p, q]$的积，即

$$[m, n]\cdot[p, q]=[mp+nq, mq+np]。$$

求两个整数积的运算叫做整数乘法。

对于两个整数$[m, n]$和$[p, q]$，它们的乘积可以记做$[m, n]\cdot[p, q]$或$[m, n]\times[p, q]$或$[m, n][p, q]$。

上面定义的运算是对于等价类定义的运算。由于等价类是一个集合，而在实际运算中，我们只能在其中选取代表元进行计算。所以，上述类运算的结果与代表元的选择无关，并且整数的加法与乘法的结果存在且唯一。

3. 整数减法的定义

为了定义减法，先证明下面的定理。

定理　对于$[m, n]$，$[p, q]\in\mathbf{Z}$，存在唯一的$[x, y]\in\mathbf{Z}$，使

$$[m, n]+[x, y]=[p, q]。$$

证　首先证明存在性。

因为
$$[m, n]+[x, y]=[p, q]$$
$$\Leftrightarrow[m+x, n+y]=[p, q]$$

$$\Leftrightarrow m+x+q=n+y+p$$
$$\Leftrightarrow x+(m+q)=y+(n+p)$$
$$\Leftrightarrow [x, y]=[n+p, m+q]\in \mathbf{Z},$$

存在性得证。下面证明唯一性。

设$[k, l]\in \mathbf{Z}$，也满足$[m, n]+[k, l]=[p, q]$。如同上面的证明一样，有$[k, l]=[n+p, m+q]$，此即表明$[x, y]=[k, l]$，唯一性得证。

整数$[n+p, m+q]$叫做整数$[p, q]$与整数$[m, n]$的差，记做

$$[p, q]-[m, n]=[n+p, m+q]。$$

求两个整数差的运算叫做整数减法。

显然，减法运算在整数集 $\mathbf{Z}$ 中是封闭的。

4. 整数除法的定义

对于$[m, n]$，$[p, q]$，$[k, l]\in \mathbf{Z}(m\neq n)$，若$[m, n][k, l]=[p, q]$，则$[k, l]$叫做$[p, q]$与$[m, n]$的商，记做$[k, l]=[p, q]\div[m, n]$，$[p, q]$叫做被除数，$[m, n]$叫做除数，求商的运算叫做除法。

显然，在整数集中，除法运算并不是总可以施行的。

对于整数的四则运算，我们关心其是否具有自然数所具有的性质。

由整数的加减法的定义，容易证明整数的运算具备如下的运算律及性质：

(1)加法交换律：$[m, n]+[p, q]=[p, q]+[m, n]$。

事实上，有

$$[m, n]+[p, q]=[m+p, n+q]=[p+m, q+n]=[p, q]+[m, n]。$$

(2)加法结合律：$([m, n]+[k, l])+[p, q]=[m, n]+([k, l]+[p, q])$。

(3)存在零元：对整数加法来说，$\mathbf{Z}$ 有零元存在。

事实上，任意的整数$[p, q]$，有整数$[m, m]$，使得

$$[m, m]+[p, q]=[m+p, m+q]=[p, q]。$$

所以由相同自然数组成的数对$[m, m]$就是 $\mathbf{Z}$ 中零元的代表。

对于加法运算，在自然数集中，任一元素均无逆元；在扩大的自然数集 $\mathbf{Z}^{+}$ 中，仅数 0 存在逆元；但在整数集中，每个元素都有逆元，这里称其为负元素。

(4)存在负元素：对整数加法来说，$\mathbf{Z}$ 中的每一个元素都有负元素存在。

因为$[n, m]+[m, n]=[n+m, n+m]$是零元，所以$[n, m]$是$[m, n]$的负元素，或称为相反数，记做$[n, m]=-[m, n]$。$[n, m]$与$[m, n]$互为相反数。

(5)在整数加减法运算中，减去一个整数等于加上这个整数的相反数。

事实上，有

$$[p, q]-[m, n]=[n+p, m+q]=[p, q]+[n, m]=[p, q]+(-[m, n])。$$

进一步地，由$[m, n]=-(-[m, n])$，我们有

$$[p, q]+[m, n]=[p, q]+(-(-[m, n]))=[p, q]-(-[m, n])。$$

对于乘法，容易证明整数的运算具备如下的运算律及性质：

(1)交换律：$[m, n]\cdot[p, q]=[p, q]\cdot[m, n]$。

(2)结合律：$([m, n]\cdot[k, l])\cdot[p, q]=[m, n]\cdot([k, l]\cdot[p, q])$。

(3)乘法对于加法的分配律：$[m, n]([k, l]+[p, q])=[m, n][k, l]+[m, n][p, q]$。

(4)存在单位元：在整数中存在$[1, 0]$，使得对于任意的整数$[m, n]$，有$[m, n][1, 0]=[m, n]$。

(5)$(-[m, n])[p, q]=-([m, n][p, q])$，

$(-[m, n])\cdot(-[p, q])=[m, n][p, q]$，
$-(-[k, l])=-[l, k]=[k, l]$。

知识窗

数集扩充的原则

我们知道数集是从自然数集逐步扩充到复数集的。在每一次扩充中，人们都遵循了如下的几条原则：

(1)扩充的目的：在原数集中某种运算不封闭，在扩充后的新数集中该运算封闭。

(2)扩充后的集合要扩大：进行的每一次扩充总是从一个较小的原数集扩充到一个较大的新数集，且使得原数集是新数集的一部分。

(3)保持原有的运算：进行扩充时，要使原数集中所能够进行的运算在新的数集中有意义，并且当把原数集中的数看成新数集中的数进行运算时，其结果应与它们在原数集中所得到的结果完全相同。

(4)扩充的最小性与唯一性：要使扩充后的新数集是原数集满足以上(1)、(2)、(3)三条原则的最小扩充，并且该扩充是唯一的。

就扩充的要求来说，从自然数系 **N** 扩充到整数系 **Z**，**Z** 具有对减法封闭的特性，即任何元有加法逆元。但 **Z** 失去了 **N** 的良序性质，即 **N** 中任何子集都有最小元素，**Z** 却无此性质。由 **Z** 扩充到有理数 **Q** 后，**Q** 中任何非零元都有关于乘法的逆元，**Q** 是包含 **Z** 的最小的阿基米德全序体。但是 **Z** 中元素都有左、右邻接元，**Q** 中却没有此性质。当 **Q** 扩充到实数系 **R** 时，我们要求 **R** 构成完备的阿基米德有序域，使极限运算可以封闭。但是 **Q** 所具有的“可数性”，**R** 却不再有了。由 **R** 扩充到复数系 **C**，**C** 是代数闭域，即任何代数方程必定有根，这是 **R** 所不具有的。可是 **R** 是全序域，**C** 只能成为半序域了，即 **C** 中元素不一定能比较大小。

三、有理数系

(一)有理数的定义

在整数集中，不是任何两个数都可以做除法运算的，所以为了使除法运算总能够实施，要将整数集进一步扩充。令

$$\mathbf{Z}^{+}=\{b \mid b\in Z, b\neq 0\}, \mathbf{Z}\cdot\mathbf{Z}^{+}=\{(a, b) \mid a\in\mathbf{Z}, b\in\mathbf{Z}^{+}\},$$

在 $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{Z}^{+}$ 中定义一个关系 R：$(a, b)R(c, d)\Leftrightarrow ad=bc$。

下面证明关系 R 是一个等价关系。

(1)反身性：$(a, b)R(a, b)$的成立是显然的。

(2)对称性：若$(a, b)R(c, d)$，则 $ad=bc$，亦即 $cb=da$，所以$(c, d)R(a, b)$。

(3)传递性：若$(a, b)R(c, d)$，$(c, d)R(e, f)$，则有 $ad=bc$，$cf=de$，所以有 $adf=bcf$ 且 $bcf=bde$，于是有 $adf=bde$。由于 $d\neq 0$，故有 $af=be$，也就是$(a, b)R(e, f)$，故 R 具有传递性。

综上所述，关系 R 是等价关系。

由于 R 是等价关系，所以可以用关系 R 将 $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{Z}^{+}$ 分成等价类，我们把(a, b)关于 R 的等价类记做$\frac{a}{b}$，称$\frac{a}{b}$为一个有理数，而商集合 $\mathbf{Q}=\mathbf{Z}\cdot\mathbf{Z}^{+}/R$ 称为有理数集。

我们也称有理数$\frac{a}{b}$为分数，读做“b 分之 a”，其中 a 叫做分数的分子，b 叫做分数的分母。有理数为整数和分数的统称。有理数集与整数集的一个重要区别是，有理数集是密集的，而整数集不是稠密的。将有理数依大小顺序排定后，任何两个有理数之间必定还存在其他的有理数，这就是稠密性。整数集没有这一特性，两个相邻的整数之间就没有其他的整数了。

(二)有理数的运算

1. 有理数的加法定义

设$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$是两个有理数，那么有理数$\frac{ad+bc}{bd}$叫做$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$的和，记做$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$。求有理数和的运算叫做有理数的加法。

2. 有理数的乘法定义

设$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$是两个有理数，那么有理数$\frac{ac}{bd}$叫做$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$的积，记做$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$。求有理数积的运算叫做有理数的乘法。

3. 有理数的减法定义

若有理数$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$与$\frac{x}{y}$满足关系式$\frac{c}{d}+\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$，那么称$\frac{x}{y}$是$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$的差，记做$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$。求有理数差的运算叫做有理数的减法。

4. 有理数的除法定义

若有理数$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$与$\frac{x}{y}$满足关系式$\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y}=\frac{a}{b}(c\neq 0)$，那么称$\frac{x}{y}$是$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$的商，记做$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$。求有理数商的运算叫做有理数的除法。

由以上定义可知，有理数集是整数集的扩张。在有理数集内，加法、减法、乘法、除法(除数不为零)4种运算通行无阻。有理数的4则运算相当于等价类的运算，这些运算应该与等价类的代表元素的选取无关。两个有理数的和、差、积、商在有理数集中是唯一存在的，即关于加、减、乘、除运算，有理数集是封闭的。

对于有理数的加法，容易证明满足如下的运算律和性质(a，b，$c\in\mathbf{Q}$)：

(1)加法交换律：$a+b=b+a$。

(2)加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$。

(3)$\mathbf{Q}$中存在唯一数$0=\frac{0}{k}$(k是一个非零有理数)，使得$a+0=a$。

(4)$\forall a\in\mathbf{Q}$，存在$-a\in\mathbf{Q}$，使$a+(-a)=0$。称$-a$为a的相反数。

对于有理数的乘法，也很容易验证其满足以下运算律和性质(a，b，$c\in\mathbf{Q}$)：

(1)乘法交换律：$ab=ba$。

(2)乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$。

(3)乘法对加法的分配律：$(a+b)c=ac+bc$。

(4)$\mathbf{Q}$中存在数$1=\frac{m}{m}$，使$\forall a\in\mathbf{Q}$，有$a\cdot 1=a$。

(5)$\forall a\in\mathbf{Q}$，$a\neq 0$，存在$a^{-1}=\frac{1}{a}\in\mathbf{Q}$，使$a\cdot a^{-1}=1$。

四、实数系

(一)实数的定义

我们已经知道，有理数集$\mathbf{Q}$对于四则运算是封闭的，但是对于极限运算则不然。在给实数下定义之前，下面先给出极限和基本列的定义。

极限　对于数列$\{a_n\}$，$a_n\in\mathbf{Q}$，若存在$a\in\mathbf{Q}$，使得对于任意的有理数$\varepsilon>0$，存在自然数N_0，当$n>N_0$时，有$|an-a|<\varepsilon$，则称数列$\{a_n\}$以a为极限，记做$\lim\limits_{n\to\infty}an=a$。