金牌奥赛

根据最新竞赛大纲编写

中小学学科奥赛编辑部编写

国际奥赛试题全解

数学

GUOJIAOSAI
SHITIQUANJIE

京华出版社

国际奥赛试题全解

数　学

丛书主编　项昭义
本册主编　项昭义
编　　者　项昭义　屠新民
杜　瑜　叶正道
李小斌　崔艳葵
高福国

京华出版社

责任编辑:王　建
封面设计:颜国森

图书在版编目(CIP)数据

国际奥赛试题全解．数学/项昭义主编．
-北京:京华出版社,2007.6
ISBN 978-7-80724-380-9

Ⅰ.国…　Ⅱ.项…　Ⅲ.理科(教育)-课程-高中-解题
Ⅳ.G634.75

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第080182号

著　　者	项昭义
出版发行	京华出版社(北京市安华西里1区13楼　100011)
经　　销	京华时代图书(北京)有限公司 (010)63607039　63993659
印　　刷	三河市华润印刷有限公司印刷
开　　本	880毫米×1230毫米　32开本
字　　数	250千字
印　　张	12.75印张
出版日期	2010年9月第2版　第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-80724-380-9
定　　价	16.80元

京华版图书,若有质量问题,请与本社联系

前　　言

中学学科竞赛是中学生最喜欢和参加最为广泛的课外活动之一,这项活动对激发学生的学习兴趣,开发智力和潜能,培养探索力、想像力和创造力,开阔视野有着非常积极的作用。

在所有的中学学科竞赛活动中,国际奥林匹克竞赛是国际上顶级的比赛,代表了中学各学科竞赛的最高水平,堪称竞赛园地里的阳春白雪。为了使大家对这项比赛内容有所了解,我们特组织了一批中学特、高级教师,部分奥林匹克竞赛高级教练员,编写出版了这套国际奥赛试题全解丛书。本丛书分数学、物理学、化学、生物学、信息学共五册,全书的编写体现了以下的风格和特点:

1. 重在参与,培养兴趣

我国能够参加国际奥林匹克竞赛的选手相对于全国众多的中学生来说可谓是凤毛麟角,但是这并不妨碍其他许许多多的同学对这项活动的关注。我们出版这套书的目的就是要给所有的同学提供一个窗口和平台,让大家去了解大赛的内容并参与其中,激发学习的兴趣。

2. 动手动脑,开发思维

相对来说,国际奥林匹克竞赛的试题都是“难题”,所谓“难”表现在两个方面,一是综合性强,一是与实际联系密切,应用性强。我们提供这样一套书,希望同学们通过对这些题的动手解答或是对书中解答过程的了解,可以让自己将以前学过的知识有机联系

在一起，并进行多学科的整合，从而锻炼自己的思维，提高综合素质能力。

3. 深入浅出，通俗易懂

全书在解答上力求用精练、通俗的语言将试题中各种深奥的问题、复杂的关系转化为各种基础知识点的综合处理，使你感到难题并不难。还教你学会综合整理各种信息，总结归纳出一定的规律。

我们的努力就是为了能给同学们提供有用的书籍，虽然我们力求做到精益求精，但是由于时间仓促及其他客观因素，书中难免会存在一些问题，希望大家能及时发现并来信指出，我们将不胜感激！

编者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

一、国际奥赛

二、各国数学竞赛

中国队蝉联第50届*IMO*团体总分第一名

2009年7月10至7月22日,在德国不莱梅进行的第50届中际数学奥林匹克竞赛中,代表中国参赛的6名队员全部获得金牌,蝉联团体总分第一名。

中国代表队的参赛成员及得分情况如下:

韦东奕	山东师大附中	42分	金牌
赵彦霖	吉林东北师大附中	38分	金牌
黄骄阳	成都七中	36分	金牌
林　博	北京人大附中	35分	金牌
郑　凡	上海中学	35分	金牌
郑志伟	浙江乐清公立学校	35分	金牌

获得本届国际数学奥林匹克赛团体总分前10名的国家队名单如下:

1. 中国国家队221分,6金;
2. 日本代表队212分,5金1铜;
3. 俄罗斯代表队203,5金1银;
4. 韩国代表队188分,3金3银;
5. 朝鲜代表队183分,3金2银1铜;
6. 美国代表队183分,2金4银;
7. 泰国代表队181分,1金5银;
8. 土耳其代表队177分,2金4银;
9. 德国代表队171分,1金4银1铜;
10. 白俄罗斯代表队167分,1金4银1铜

第 50 届国际数学奥林匹克试题

(7 月 10 日至 7 月 22 日，德国)

第一天

1.（澳大利亚）设 n 是一个正整数，$a_1, a_2, \cdots, a_k\ (k \geqslant 2)$ 是集合 $\{1, \cdots, n\}$ 中的互不相同的整数，使得对于 $i = 1, \cdots, k-1$，都有 n 整除 $a_i(a_{i+1}-1)$. 证明：n 不整除 $a_k(a_1-1)$.

证明：用反证法.

假设 $n \mid a_k(a_1-1)$，则 $a_1a_k \equiv a_k \pmod n$.

由题设可知 $a_i \equiv a_ia_{i+1} \pmod n$，$i = 1, 2, \cdots, k-1$. 所以

$$a_1 \equiv a_1a_2 \equiv a_1a_2a_3 \equiv a_1a_2\cdots a_k \equiv a_1a_2\cdots a_{k-2}a_k \equiv a_1a_k \pmod n,$$

所以，

$$a_1 \equiv a_k \pmod n.$$

而 $0 < |a_1 - a_k| < n$，矛盾！

2.（俄罗斯）设 O 是三角形 ABC 的外心. 点 P 和 Q 分别是边 CA 和 AB 的内点. 设 K, L 和 M 分别是线段 BP, CQ 和 PQ 的中点，Γ 是过点 K, L 和 M 的圆. 若直线 PQ 与圆 Γ 相切，证明：$OP = OQ$.

证明：直线 PQ 与圆 Γ 相切的充分必要条件是 $\angle MLK = \angle QMK$.

因为 $MK /\!/ AB$，所以

$$\angle AQP = \angle QMK = \angle MLK,$$

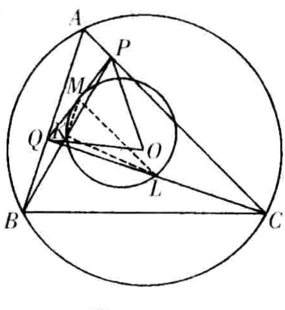

图 09-1

同理可得 $\angle APQ = \angle MKL$. 故 $\triangle APQ \backsim \triangle MKL$，所以

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{MK}{ML}=\frac{\frac{QB}{2}}{\frac{PC}{2}}=\frac{QB}{PC},$$

即 $$AP\cdot PC=AQ\cdot QB,$$

所以,点 P,Q 关于三角形 ABC 的外接圆的幂相等,从而 $OP=OQ$.

3.(美国)设 $s_1,s_2,s_3,\cdots$ 是一个严格递增的正整数数列,使得它的两个子数列

$$s_{s_1},s_{s_2},s_{s_3}\cdots\text{和}s_{s_1+1},s_{s_2+1},s_{s_3+1},\cdots$$

都是等差数列.证明:数列 $s_1,s_2,s_3,\cdots$ 本身也是一个等差数列.

证明:首先证明两个等差数列$s_{s_1},S_{s_2},s_{s_3},\cdots$和$s_{s_1+1},s_{s_2+1},s_{s_3+1},\cdots$的公差相等.由于 $s_1,s_2,s_3,\cdots$是一个严格递增的正整数数列,所以,对任意正整数 i,j,

$$|s_i-s_j|\geqslant|i-j|.$$

设等差数列$s_{s_1},s_{s_2},s_{s_3},\cdots$和 $s_{s_1+1},s_{s_2+1},s_{s_3+1},\cdots$的公差分别为 D,E,则由

$$s_{s_n}<s_{s_n+1}\leqslant s_{s_{n+1}}$$

可得 $$s_{s_1}+(n-1)D<s_{s_1+1}+(n-1)E\leqslant s_{s_1}+nD,$$

故 $$0<s_{s_1+1}-s_{s_1}+(n-1)(E-D)\leqslant D,$$

所以,$D=E$(否则,当 $n\to\infty$ 时,$s_{s_1+1}-s_{s_1}+(n-1)(E-D)$ 是无界的.)

于是,$s_{s_n+1}-s_{s_n}=s_{s_1+1}-s_{s_1}$ 是一个常数.

因为 $D=s_{s_{n+1}}-s_{s_n}\geqslant s_{n+1}-s_n$,所以,记

$$m=\min\{s_{n+1}-s_n\,|\,n=1,2,\cdots\},M=\max\{s_{n+1}-s_n\,|\,n=1,2,\cdots\},$$

则对任意正整数 i,j,都有

$$m|i-j|\leqslant|s_i-s_j|\leqslant M|i-j|.$$

不妨设正整数 r,t 使得 $s_{r+1}-s_r=M,s_{t+1}-s_t=m$,则有

$$M|s_{r+1}-s_r|\geqslant s_{s_{r+1}}-s_{s_r}\geqslant s_{s_r+1}-s_{s_r}=D=E=s_{s_{r+1}+1}-s_{s_r+1}\geqslant m|s_{r+1}-s_r|,$$

此即 $$M^2=M(s_{r+1}-s_r)\geqslant D\geqslant m(s_{r+1}-s_r)=mM.$$

同样地,有

$$mM=M(s_{t+1}-s_t)\geqslant D\geqslant m(s_{t+1}-s_t)=m^2,$$

从上面两式可得 $D=mM$,且上面等号成立只能是$s_{s_r},s_{s_r+1},\cdots,s_{s_{r+1}}$是一个公差为 m 的等差数列,$s_{s_t},s_{s_t+1},\cdots,s_{s_{t+1}}$是一个公差为 M 的等差数列.故 $m=M$.

从而,数列 $s_1,s_2,s_3,\cdots$本身也是一个等差数列.

第二天

4.(比利时)在三角形 ABC 中,$AB=AC$,$\angle CAB$ 和 $\angle ABC$ 的内角平分线分别与边 BC 和 CA 相交于点 D 和 E.设 K 是三角形 ADC 的内心.若 $\angle BEK=$

45°,求∠CAB 所有可能的值.

解: 由于 CK 是∠ACB 的角平分线,所以,点 E 关于 CK 的对称点 F 在边 BC 上. 连接 IF,由对称性知∠$IFK=45°$. 连接 DK,因为 DK 是∠ADC 的角平分线,所以∠$IDK=45°$. 于是有如下两种情形:

①若点 F 与 D 不重合,如图 09-2,则 I,D,F,K 四点共圆,所以

$$\angle IKF=180°-\angle IDF=90°,$$

由对称性,∠$IKE=90°$,故∠$EIK=45°$,所以

$$45°=\angle EIK=\angle IBC+\angle ICB=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB,$$

所以∠ABC + ∠$ACB=90°$,从而∠$CAB=90°$.

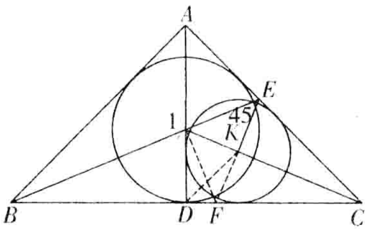

图 09-2

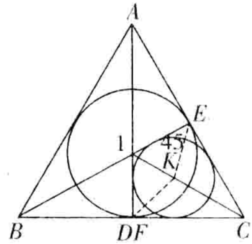

图 09-3

②若点 F 与 D 重合,如图 09-3,则∠IEC = ∠$IDC=90°$,此即∠ABC 的平分线也是边 AC 上的高,故 $AB=BC$. 所以,三角形 ABC 是正三角形,故∠CAB $=60°$.

当∠$CAB=90°$或者 $60°$时,容易验证∠$BEK=45°$.

综上所述,∠CAB 所有可能的值为 $90°$或者 $60°$.

5. (法国) 求所有从正整数集到正整数集上的满足如下条件的函数 f: 对所有正整数 a 和 b,都存在一个以

$$a,f(b)\text{和}f(b+f(a)-1)$$

为三边长的非退化三角形.

(称一个三角形为非退化三角形是指它的三个顶点不共线.)

证明: 三边长都为整数的三角形,如果有一条边长为 1,则另外两条边长一定相等. 因此,取 $a=1$,可得

$$f(b)=f(b+f(1)-1).\qquad (*)$$

首先,我们证明 $f(1)=1$.

事实上,若 $f(1)=1+m>1$,代入(*)式,得 $f(b)=f(b+m)$,故 f 是一个以 m 为周期的周期函数. 于是 f 的值域为有限个正整数,记值域中的最大数为 M. 令 $a>2M$,则

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$a > M + M \geqslant f(b) + f(b + f(1) - 1),$$

矛盾!

其次,我们证明 $f(f(n)) = n, n \in \mathbf{N}_+$.

令 $a = n, b = 1$,则由 $f(1) = 1$ 可得 $f(f(n)) = n, n \in \mathbf{N}_+$.

所以,f 是一个 $\mathbf{N}_+ \to \mathbf{N}_+$ 的双射.

由题设,令 $a = 2$,可得 $2, f(b), f(b + f(2) - 1)$ 可以构成一个三角形的三边长.由上面的讨论知,$f(2) \geqslant 2$,记 $f(2) - 1 = t$,由于 f 是一个 $\mathbf{N}_+ \to \mathbf{N}_+$ 的双射,所以

$$0 < |f(b) - f(b + t)| < 2.$$

因此,对任意正整数 b,都有 $f(b) - f(b + t) = \pm 1$.由数学归纳法易知

$$f(b + nt) = f(b) \pm n, n = 1, 2, \cdots,$$

由于 $f(b + nt) > 0$,所以只能是

$$f(b + nt) = f(b) + n, n = 1, 2, \cdots,$$

从而 $f(b + t) = f(b) + 1$ 对任意正数 b 都成立.

因此,$f(1) = 1, f(1 + t), f(1 + 2t), \cdots, f(1 + nt), \cdots$ 取遍全体正整数.

由于 f 是一个 $\mathbf{N}_+ \to \mathbf{N}_+$ 的双射,所以,$1, 1 + t, 1 + 2t, \cdots$ 也取遍所有的正整数,故 $t = 1$.

因此,$f(b + 1) = f(b) + 1, b = 1, 2, \cdots$.由 $f(1) = 1$,便知 $f(n) = n, n \in \mathbf{N}_+$.

又若 $f(n) = n, n \in \mathbf{N}_+$,则 $f(b) = b, f(b + f(a) - 1) = b + a - 1$,易知 $a, b, a + b - 1$ 可以为一个三角形的三边长.

综上所述,$f(n) = n, n \in \mathbf{N}_+$ 为本题的解.

6. (俄罗斯)设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相同的正整数. M 是有 $n - 1$ 个元素的正整数集,且不含数 $s = a_2 + a_2 + \cdots + a_n$. 一只蚱蜢沿着实数轴从原点 0 开始向右跳跃 n 步,它的跳跃距离是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的某个排列. 证明:可以选择一种排列,使得蚱蜢跳跃落下的点所表示的数都不在集 M 中.

证明:对正整数 n 用数学归纳法.当 $n = 1$ 时,$M = \varnothing$,结论当然成立.

当 $n = 2$ 时,M 只有一个数 $m(\neq a_1 + a_2)$,a_1, a_2 中必有一个不等于 m,把它放在第一步即可.

假设对于任意 $n < k(k \geqslant 3)$ 结论都成立.

不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$,令 $s_i = \sum\limits_{j=1}^{i} a_j$,则 $s_k = s$.

假设蚱蜢先按照 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的顺序来跳,如果 $(0, s] = (0, s_k]$ 中只有 $k - 2$ 个 M 中的数,那么依据归纳假设结论成立.以下设 $(0, s_k]$ 中有 $k - 1$ 个 M 中的数.这 $k - 1$ 个数为 $0 < m_1 < m_2 < \cdots m_{k-1} < s$.下面分两种情形:

情形 1　如果对于所有 $1 \leqslant i \leqslant k - 1$,都有 $s_i < m_i$,特别有 $s_{k-1} < m_{k-1}$.

①如果 $s_{k-1}\notin M$，那么由归纳假设可以对前 $k-1$ 步重新调整，使得蚱蜢没有遇到 M 中的数；

②如果 $s_{k-1}\in M$，对于任意 $1\leqslant i\leqslant k-1$，都有 $s_{k-1}-a_i<s_{k-1}<s_k-a_i$，由于除了 s_{k-1} 之外只有 $k-2$ 个 M 中的数，因此存在一个 i_0，使得 $s_{k-1}-a_{i_0}$，$s_k-a_{i_0}$ 都不属于 M. 我们将 a_{i_0} 换到最后一步，a_k 为倒数第二步，这样从目的地倒退两步都没遇到 M 中的数，由于 $s_k-a_k-a_{i_0}<s_{k-1}\leqslant m_{k-2}$，由归纳假设可以调整前 $k-2$ 步使得蚱蜢没遇到 M 中的数.

情形 2　存在一个 i 使得 $s_i\geqslant m_i$，假设 t 是满足这样条件的最小下标.

①如果 $t=1$，也即 $s_1=a_1\in M$，由于 $|M|<k$，因此必有一个 $a_{i_1}\notin M$，我们将 a_{i_1} 调整到第一步，由于 $m_1\leqslant a_1\leqslant a_{i_1}$. 由归纳假设可以调整后 $k-1$ 步使得蚱蜢没遇到 M 中的数；

②如果 $t>1$，由 t 的最小性可知 $s_{t-1}<m_{t-1}$，由归纳假设可以调整前 t 步的顺序使得它们得以避开 M 中的前 $t-1$ 个数，而且同情形 1 中的②，我们还可以使得 a_t 位于第 t 步或第 $t-1$ 步，故调整后前 $t-2$ 步所走距离 $<s_{t-1}<m_{t-1}$，因此前 $t-2$ 步也不可能遇到 M 中后 $k-t$ 个数.

如果第 $t-1$ 步也没有走到 M 中的数上，由归纳假设可以调整后 $k-t+1$ 步使得它们避开 M 中后 $k-t$ 个数. 由于后面的步长都大于 a_t，因此调整后后面的 $k-t+1$ 步也不会遇到 M 中的前 $t-1$ 个数，因此就避开了所有 M 中的数.

如果第 $t-1$ 步恰好走到 M 中的数上，由于已经避开了 M 中的前 $t-1$ 个数，因此这个数属于 M 中后 $k-t$ 个数，这从另一方面说明了此时的 $t-1$ 步所走的总距离 $>m_{t-1}$，且由此知 a_t 必须位于第 $t-1$ 步. 此时后面的 $k-t$ 步中的任意第 r 步都比第 $t-1$ 步长，因此将第 r 步和第 $t-1$ 步对换位置之后也肯定避开了 M 中的前 $t-1$ 个数. 由于此时第 $t-1$ 步已经遇到了 M 中后 $k-t$ 个数中的一个数，因此肯定可以选到后 $k-t$ 步中的一步，使得它与第 $t-1$ 步对换之后，第 $t-1$ 步没有遇到 M 中的后 $k-t$ 个数，故此时前 $t-1$ 步都成功避开了 M 中的所有数，并且此时 $t-1$ 步所走总距离 $>m_{t-1}$，也即至少已经跨越了前 $t-1$ 个 M 中的数. 后一段最多还有 $k-t$ 个 M 中的数，由归纳假设可以对后 $k-t+1$ 步进行调整，使得它们可以避开所有 M 中的数.

综上所述，结论成立.

中国队获第 49 届 IMO 团体总分第一名

2008 年 7 月 10 日 ~7 月 22 日,在西班牙马德里举行了第 49 届国际数学奥林匹克赛,来自 103 个国家及地区的 549 名学生参加了这次比赛,中国队以 217 分获得团体总分第一名。

中国队共取得金牌 5 枚,银牌地 1 枚,六名队员分别是来自上海市上海中学的牟晓生,来自山东省山师大附中的韦东奕,来自北京市人大附中的张瑞祥,来自上海市东师大二附中的张成,来自湖北省华中师大一附中的陈卓,来自浙江省嘉兴一中的吴天翼。他们的参赛成绩分别为:

韦东亦	山东师大附中(高一)	42 分	金牌
牟晓生	上海中学(高二)	42 分	金牌
张瑞成	人大附中(高三)	35 分	金牌
张　成	华东师大二附中(高三)	35 分	金牌
陈　卓	华中师大一附中(高三)	35 分	金牌
吴天翼	嘉兴一中(高三)	28 分	银牌

获得本届比赛总分前十名的代表队分别是:

中国国家队　总分 217 分,第 1 名;
俄罗斯队　总分 199 分,第 2 名;
美国代表队　总分 190 分,第 3 名;
韩国代表队　总分 188 分,第 4 名;
伊朗代表队　总分 181 分,第 5 名;
泰国代表队　总分 175 分,第 6 名;
朝鲜代表队　总分 173 分,第 7 名;
土耳其队　总分 170 分,第 8 名;
中国台湾队　总分 168 分,第 9 名;
匈牙利队　总分 165 分,第 10 名。

第 49 届国际数学奥林匹克试题

（7 月 10 日至 7 月 22 日，西班牙）

第一天

1.（俄罗斯）已知 H 是锐角三角形 ABC 的垂心，以边 BC 的中点为圆心，过点 H 的圆与直线 BC 相交于两点 A_1,A_2；以边 CA 的中点为圆心，过点 H 的圆与直线 CA 相交于两点 B_1,B_2；以边 AB 的中点为圆心，过点 H 的圆与直线 AB 相交于两点 C_1,C_2. 证明：六点 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 共圆.

证明：B_0,C_0 分别是边 CA,AB 的中点，设以边 B_0 为圆心，过点 H 的圆与以 C_0 为圆心，过点 H 的圆的另一交点为 A'，则 $A'H\perp C_0B_0$. 由于 B_0,C_0 分别是边 CA,AB 的中点，所以 $C_0B_0/\!/BC$，从而 $A'H\perp BC$，于是点 A'在 AH 上.

如图 08－1，由切割线定理知：

$$AC_1\cdot AC_2=AA'\cdot AH=AB_1\cdot AB_2,$$

所以，B_1,B_2,C_1,C_2 四点共圆.

分别作 B_1B_2,C_1C_2 的垂直平分线，设它们相交于点 O，则 O 是四边形 $B_1B_2C_1C_2$ 的外接圆圆心，也是$\triangle ABC$ 的外心，且

$$OB_1=OB_2=OC_1=OC_2.$$

同理可得，$OA_1=OA_2=OB_1=OB_2$，所以，A_1，A_2,B_2,B_2,C_1,C_2 六点都是在以 O 为圆心，OA_1 为半径的圆上，故六点 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 共圆.

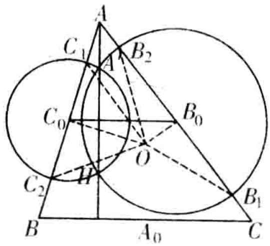

图 08-1

2.（奥地利）(a) 设实数 x,y,z 都不等于 1，满足 $xyz=1$，求证：

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqslant 1.$$

(b) 证明：存在无穷多组三元有理数组 (z,y,z)，x,y,z 都不等于 1，且 $xyz=1$，使得上述不等式等号成立.

证明：(a) 令 $\frac{x}{x-1}=a,\frac{y}{y-1}=b,\frac{z}{z-1}=c$，则

$$x=\frac{a}{a-1},y=\frac{b}{b-1},z=\frac{c}{c-1}.$$

由题设条件 $xyz=1$ 得，

$$abc=(a-1)(b-1)(c-1),$$

即 $$a+b+c-1=ab+bc+ca,$$

所以 $$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=(a+b+c)^2-2(a+b+c-1)\\&=(a+b+c-1)^2+1\geqslant 1,\end{aligned}$$

从而 $$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqslant 1.$$

证明:(b)令$(x,y,z)=\left(-\frac{k}{(k-1)^2},k-k^2,\frac{k-1}{k^2}\right)$,$k$ 是正整数,则(x,y,z)是三元有理数组,x,y,z 都不等于 1,且对于不同的正整数 k,三元有理数组(x,y,z)是互不相同的. 此时

$$\begin{aligned}&\frac{x_2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\\&=\frac{k^2}{(k^2-k+1)^2}+\frac{(k-k^2)^2}{(k^2-k+1)^2}+\frac{(k-1)^2}{(k^2-k+1)^2}\\&=\frac{k^4-2k^3+3k^2-2k+1}{(k^2-k+1)^2}=1,\end{aligned}$$

从而命题得证.

3.(立陶宛)证明:存在无穷多个正整数 n,使得 n^2+1 有一个大于 $2n+\sqrt{2n}$的质因子.

证明:设 $m(\geqslant 20)$是一个整数,p 是$(m!)^2+1$ 的一个质因子,则 $p>m\geqslant 20$.

令整数 n 满足 $0<n<\frac{p}{2}$,且 $n\equiv\pm m!\pmod p$. 于是 $0<n<p-n<p$,且

$$n^2\equiv-1\pmod p. \tag{1}$$

因此 $$(p-2n)^2=p^2-4pn+4n^2\equiv-4\pmod p,$$

所以 $$(p-2n)^2\geqslant p-4,$$

$$p\geqslant 2n+\sqrt{p-4}\geqslant 2n+\sqrt{2n+\sqrt{p-4}-4}>2n+\sqrt{2n}. \tag{2}$$

由上式(1)、(2)便知,命题成立.

第二天

4.(韩国)求所有的函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$,满足对所有的正实数 $w,x,y,z,wx=yz$,都有

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

解:令 $w=x=y=z=1$,得 $(f(1))^2=f(1)$,所以 $f(1)=1$.

对任意 $t>0$. 令 $w=t,x=1,y=z=\sqrt{t}$,得

$$\frac{(f(t))^2+1}{2f(t)}=\frac{t^2+1}{2t},$$

去分母整理得 $$(tf(t)-1)(f(t)-t)=0,$$

所以,对每个 $t>0$,

$$f(t)=t,\text{或者} f(t)=\frac{1}{t}. \tag{3}$$

如果存在 $b,c\in(0,+\infty)$,使得 $f(b)\neq b,f(c)\neq\frac{1}{c}$,则由(3)知,$b,c$ 都不等于 1,且 $f(b)=\frac{1}{b},f(c)=c$,令 $w=b,x=c,y=z=\sqrt{bc}$,则

$$\frac{\frac{1}{b^2}+c^2}{2f(bc)}=\frac{b^2+c^2}{2bc},$$

所以 $$f(bc)=\frac{c+b^2c^3}{b(b^2+c^2)}.$$

因为 $f(bc)=bc$,或者 $f(bc)=\frac{1}{bc}$. 若 $f(bc)=bc$,则

$$bc=\frac{c+b^2c^3}{b(b^2+c^2)},$$

得 $b^4c=c,b=1$,矛盾! 若 $f(bc)=\frac{1}{bc}$,则

$$\frac{1}{bc}=\frac{c+b^2c^3}{b(b^2+c^2)},$$

得 $b^2c^4=b^2,c=1$,矛盾!

所以,或者 $f(x)=x,x\in(0,+\infty)$,或者 $f(x)=\frac{1}{x},x\in(0,+\infty)$.

经检验,$f(x)=x,x\in(0,+\infty)$ 和 $f(x)=\frac{1}{x},x\in(0,+\infty)$ 都满足要求.

5.(法国)设 n 和 k 是正整数,$k\geqslant n$,且 $k-n$ 是一个偶数. $2n$ 盏灯依次编号为 $1,2,\cdots,2n$,每盏灯可以“开”和“关”,开始时,所有的灯都是“关”的,对这些灯可进行操作,每次操作只改变其中的一盏灯的开关状态(即“开”变成“关”,“关”变成“开”),我们考虑长度为 k 的操作序列,序列中的第 i 项就是第 i 次操作时被改变开关状态的那盏灯的编号.

设 N 是 k 次操作后使得 $1,\cdots,n$ 是“开”的,灯 $n+1,\cdots,2n$ 是“关”的状态的所有不同的操作序列的个数.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com