高等数学

经管类

学习指导（上册）

西南财经大学高等数学教研室 编

科学出版社

高等数学(经管类)学习指导

（上册）

西南财经大学高等数学教研室　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是《高等数学(经管类)》(上册)的配套学习指导。本书按照教材体系逐章、逐节对应编写。每节内容由本节教材知识结构、学习要求、重点难点、疑难解答、典型题型分析、习题解析六个部分组成。每章开头增加了本章数学三考点和本章知识结构,每章结尾增加了本章教材总习题及解答、单元测试及其解答。全书分为上、下两册,本书为上册,共6章,分别是函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用。

本书既可以面向使用该教材的学生,也可作为讲授高等数学的教师的教学参考书,还可为学习高等数学的学生和报考经管类研究生的考生提供解题指导。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(经管类)学习指导.上册/西南财经大学高等数学教研室编.—北京:科学出版社,2015

ISBN 978-7-03-043354-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①西… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第030416号

责任编辑:李淑丽 李 萍 / 责任校对:李 影

责任印制:赵 博 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年6月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2015年6月第一次印刷 印张:20

字数:471 000

定价:40.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

高等数学是财经类院校大学本科生的基础课程，有着举足轻重的地位。它的内容丰富，既要为理、工、经、管等各专业后继课程提供必要的、基本的数学工具，又负有培养学生应用数学知识解决实际问题的思想与能力的任务。同时，它又是理、工、经、管各专业硕士研究生入学考试的课程之一。高等数学理论抽象，逻辑推理严密，读者刚从中学数学过渡到大学数学的学习，他们在学习这门课程时往往感到抽象晦涩难懂，不易把握这门课程的重点、难点，做习题也难以下手。为帮助读者解决这些问题，结合财经类院校的学科特点，我们组织编写了这套学习指导，希望它们能帮助广大读者弄清楚高等数学的教学基本要求、深入理解基本概念和基本理论、牢固掌握基本运算技能、引导学生顺利克服学习中的困难、避免一些易犯的错误，从而提高经管类高等数学的教学质量，对学生真正掌握微积分起到一种辅助作用。

本套书是与科学出版社出版的由朱文莉主编的《高等数学》(经管类)(上、下册)配套的学习指导书。本书按照教材体系逐章、逐节对应编写，每节内容由本节教材知识结构、学习要求、重点难点、疑难解答、典型题型分析、习题解析六个部分组成。每章内容编写之初，增加了本章数学三考点和本章知识结构两部分；每章内容编写完后，增加了本章教材总习题解答、单元测试及其解答两部分。“本章知识结构”或“本节教材知识结构”以图表的形式指出了各个知识点间的有机联系，帮助学生从总体上把握这一章的内容及结构。“学习要求”的提出和“重点难点”的归纳可以帮助读者把握对高等数学知识的掌握程度。“疑难解答”意在帮助读者释疑解难；“典型题型分析”主要对本章涉及的习题按内容划分为几个基本题型，这些题目基本上是源于全国硕士研究生入学统一考试的数学试题。通过这些例题讲解，探索主要解(证)题思路，提炼基本解(证)题方法和常用技巧，有的题目在解答之后，以注解的形式对该类题的解法做了归纳小结，有的题目还提供了常用的具有典型意义的多种解法。“习题解析”和“总习题及解答”对教材中的全部习题作了详细解答(请读者正确使用这部分内容)。“单元测试”是依据全国硕士研究生数学三入学统一考试大纲和教育部数学基础课程教学指导分委员会制定的经济类理科本科微积分课程教学基本要求而精心制作的单元测试题，“单元测试解答”为读者提供了详细的解题指导。

本套学习指导书为经济类高等数学教辅，条理清晰，体系结构完整，既可以面向使用该教材的学生(但与教材《高等数学》(经管类)具有相对的独立性)，还可作为讲授高等数学的教师的教学参考书，也可为学习高等数学的学生和报考经管类研究生的考生提供解题指导。

本套学习指导书由西南财经大学高等数学教研室共同编写，其中朱文莉为主编，负责全书的统一协调、编纂与定稿。第一、八章由吴静编写，第二、五章由方敏编写，第三、七章由朱文莉编写，第四、九章由代宏霞编写，第六章由梁浩编写，第十、十一章由向开理编写；第一、四、九章的习题解析主要由代宏霞提供，第二、十、十一章的习题解析主要由向开理提供，第三、七、八章的习题解析主要由朱文莉提供，第五、六章的习题解析主要由谢果提供。林一多及多位研究生

对初稿进行阅读及校对，并提出了宝贵的建议，在此深表感谢！

最后向关心、支持本书出版的西南财经大学经济数学学院领导和全体老师，以及科学出版社表示衷心的感谢！本套书博采众家之长，参考了多本同类书籍和考研辅导书，吸取了不少养分，在此也向这些书籍的作者表示感谢。同时由于编者水平有限，难免有错误及不妥之处，欢迎广大读者给予批评指正。

编　者

2014 年 12 月

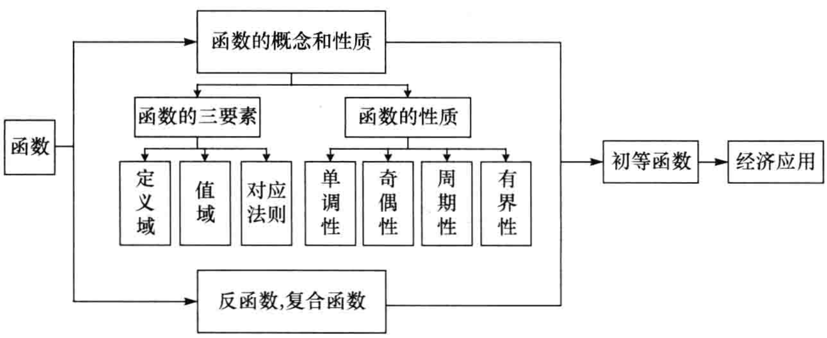
目　　录

第 1 章　函　　数

本章数学三考点

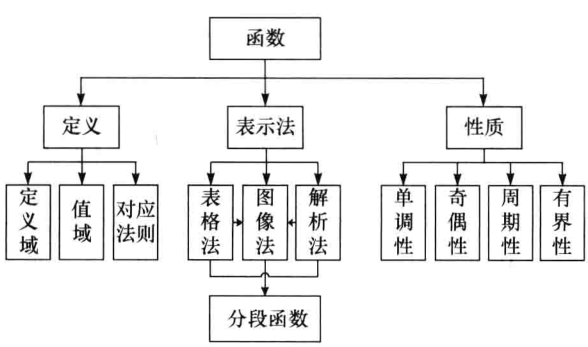
函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立.

本章知识结构



1.1　函数的概念和性质

本节教材知识结构



1.1.1　学习要求

1. 掌握去心邻域与邻域的区别和表示方法；
2. 深刻理解函数概念，掌握函数的表示法；
3. 深刻理解分段函数的概念及其表示法，掌握一些常用的分段函数，如绝对值函数 $y=|x|$，

取整函数 $y=[x]$,符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$,狄利克雷函数 $y=D(x)$等;

4. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

重点　函数的定义域,函数的性质,判别两个函数是否相同.

难点　函数有界性和周期性的讨论.

1.1.2　疑难解答

1. 函数 f 与函数值 $f(x)$有何区别与联系?

在函数定义中,函数 $f:X\longrightarrow Y(x,y\in R)$与函数值 $f(x)$是两个截然不同的概念.前者是集合 X 到 Y 的一个单值对应法则(即映射),后者是指在对应法则 f 的作用下,与 x 所对应的函数值 $f(x)$.但在高等数学中我们习惯用 $f(x)$表示函数 $f:X\longrightarrow Y$,所以需要读者注意的是,当遇到记号 $f(x)$时,要根据上、下文弄清楚它是表示函数值还是表示函数 $f:X\longrightarrow Y$.

2. 如何判断两个函数相同?

根据函数的定义,当两个函数的定义域 D_f 和对应法则 f 均相同时,表示两个函数相同.例如,$f(x)=1$,$g(x)=\sin^2x+\cos^2x$,因为 $f(x)$和 $g(x)$的定义域均是 $\mathbf{R}$,对应法则相同,则 $f(x)=g(x)$.

因为函数由其定义域和对应法则唯一确定,所以函数表示法中字母可以随意选择,$f(x)$,$f(y)$,$f(u)$表示同一函数,即一个函数只与它的定义域和对应法则有关,而与其自变量选用什么字母表示无关.

3. 有上界或下界的函数是否是有界函数?

不一定.有界函数是指既有上界又有下界的函数.仅有上界而无下界或仅有下界而无上界的函数是无界函数.$f(x)$无界是指:对任意 $M>0$,总存在 $x\in X$,使得 $|f(x)|\geqslant M$,即任何正数 M 都不可能是 $f(x)$的界.

4. 周期函数是否一定存在最小正周期?

不一定.一般将 $f(x)$的最小正周期简称为 $f(x)$的周期.例如,$y=\sin x$ 的周期为 2π,$y=\tan x$ 的周期为 π 等.但周期函数不一定有最小正周期.例如,常数函数 $f(x)=C$,狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 均为周期函数,但均不存在最小正周期.

5. 研究函数的特性时主要应注意什么问题?

对于函数的几种特性(单调性、有界性、奇偶性、周期性)并不是说每个函数都一定具有,一个函数可能具有其中一个或几个特性,也可能一个都不具备.

讨论函数的几种特性都必须与区间联系起来,即在一确定的区间上讨论.比如,$f(x)=x^2$ 在 R 上并不是单调的,但在 R 的部分区间$(-\infty,0]$或$[0,+\infty)$上都是单调的;又如 $f(x)=\tan x$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内无界,而在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$内有界.

1.1.3　典型题型分析

题型Ⅰ　判断函数的等价性

例 1　在下列各组函数中,找出两个函数等价的一组(　　).

(A) $y=x^0$ 与 $y=1$　　　　(B) $y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

(C) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}}{x}$ 与 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x^3}}$　　　　(D) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$ 与 $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$

解　选(C).

关于选项(A)：$y=x^0$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$；$y=1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故两函数不等价.

关于选项(B)：$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x|x\geqslant 0\}$；$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故两函数不等价.

关于选项(C)：两个函数定义域均为 $\{x|x\neq 0\}$ 且对应法则也相同，故两函数等价.

关于选项(D)：$y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$ 的定义域为 $\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\x-3>0,\end{cases}$ 即 $\{x|x>3\}$；$y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$ 的定义域为 $\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-3}\geqslant 0,\\x-3\neq 0,\end{cases}$ 即 $\{x|x>3$ 或 $x\leqslant 2\}$，两函数定义域不同，所以不等价.

题型Ⅱ　函数定义域的求法

例 2　求下列函数的定义域：

(1) $y=\ln(x+1)+2^{\frac{1}{x-1}}$；　　　　(2) $y=\sqrt{\sin x}+\log_2(16-x^2)$.

解　(1) 要使函数 y 有意义，必须有 $\begin{cases}x+1>0,\\x-1\neq 0,\end{cases}$ 即函数的定义域为

$$D_f=(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

(2) 要使函数 y 有意义，必须有 $\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\16-x^2>0,\end{cases}$ 即

$$\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi, \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\\-4<x<4,\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $D_f=(-4,-\pi]\cup[0,\pi]$.

注　"给定了函数"就意味着"给定了函数的定义域". 求函数的定义域时一般从简单函数的定义域出发，综合考虑后计算出结果. 我们常见简单函数的定义域如下：

(1) $y=\dfrac{1}{x}$，D_f：$\{x|x\neq 0\}$，$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

(2) $y=\sqrt[2n]{x}$，D_f：$\{x|x\geqslant 0\}$，$[0,+\infty)$；

(3) $y=\log_a x$，D_f：$\{x|x>0\}$，$(0,+\infty)$，其中 $a>0,a\neq 1$；

(4) $y=\tan x$，D_f：$\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}$，$k\in\mathbf{Z}$；

(5) $y=\cot x$，D_f：$\{x|x\neq k\pi\}$，$k\in\mathbf{Z}$；

(6) $y=\arcsin x$(或 $\arccos x$)，D_f：$\{x||x|\leqslant 1\}$，用区间表示为 $[-1,+1]$.

题型Ⅲ　函数奇偶性的判断

例 3　判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}\sin x$；　　　　(2) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$ $(a>0,a\neq 1)$.

解　(1) 因为 $\sin x$ 为奇函数，x^2 为偶函数，所以 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}\sin x$ 为奇函数.

(2) 因为

$$f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{1+x^2})=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=-\log_a(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $f(x)$为奇函数.

注　判别给定函数的奇偶性,主要是根据奇偶性的定义讨论 $f(-x)$与 $f(x)$间的关系,有时也用运算性质和其他一些有效方法:

(1) 两个奇函数的代数和仍为奇函数;两个偶函数的代数和仍为偶函数.

(2) 偶数个奇函数(或偶函数)之积为偶函数;奇数个奇函数之积为奇函数.

(3) 一个奇函数和一个偶函数的乘积为奇函数.

(4) $f(x)+f(-x)=0$ 可以用来判别 $f(x)$为奇函数.

(5) 函数的奇偶性是相对函数的定义域而言,若定义域关于原点不对称,则该函数就是非奇非偶函数,既不是奇函数,也不是偶函数.

题型Ⅳ　函数周期性的判断

例 4　设函数 $y=f(x)$,$x\in(-\infty,+\infty)$的图形关于 $x=a$,$x=b$ 均对称($a<b$),求证:$y=f(x)$是周期函数,并求其周期.

证　若函数 $f(x)$的图形关于直线 $x=a$ 对称,则 $f(a+x)=f(a-x)$. 由题设可知

$$f(a+x)=f(a-x),\quad f(b+x)=f(b-x),$$

所以

$$f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)$$
$$=f[b+(2a-x-b)]=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)].$$

故 $f(x)$是周期函数,其周期 $T=2(b-a)$.

题型Ⅴ　函数有界性的判断

例 5　设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$是(　　).(考研题)

(A) 偶函数　　(B) 无界函数　　(C) 周期函数　　(D) 单调函数

解　选(B).

令 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{4}(n=1,2,3,\cdots)$,则

$$f(x_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\to\infty\quad(n\to\infty),$$

所以 $f(x)$是无界函数. 故选(B).

例 6　函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$在定义域内为(　　).

(A) 有上界无下界　　(B) 有下界无上界

(C) 有界,且 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$　　(D) 有界,且 $-2\leqslant\frac{x}{1+x^2}\leqslant 2$

解　选(C).

因为 $|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$,所以 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$. 故选(C).

注 判别函数有界性时，放缩法是常用的方法.

题型Ⅵ 函数单调性的判断

例 7 试讨论函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在区间 $[-1,1]$ 上的单调性.

解 设 $x_1,x_2\in[-1,1]$ 且 $x_1<x_2$，即 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$. 由于

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}=\frac{(1-x_1^2)-(1-x_2^2)}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}},$$

又因为 $x_2-x_1>0$，$\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}>0$，所以

(1) 当 $x_1>0,x_2>0$ 时，$x_2+x_1>0$，有 $f(x_1)>f(x_2)$；

(2) 当 $x_1<0,x_2<0$ 时，$x_2+x_1>0$，有 $f(x_1)<f(x_2)$.

故函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在区间 $[-1,0]$ 上是增函数，在区间 $[0,1]$ 上是减函数.

例 8 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，对 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x)>0$，且 $f(10)=1$. 试讨论函数 $F(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ 的单调性.

解 在 $\mathbf{R}$ 上任取 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，则 $f(x_2)>f(x_1)$，且

$$\begin{aligned}F(x_2)-F(x_1)&=\left[f(x_2)+\frac{1}{f(x_2)}\right]-\left[f(x_1)+\frac{1}{f(x_1)}\right]\\&=[f(x_2)-f(x_1)]\left[1-\frac{1}{f(x_1)f(x_2)}\right].\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且 $f(10)=1$，所以，当 $x<10$ 时 $0<f(x)<1$；而当 $x>10$ 时 $f(x)>1$.

(1) 若 $x_1<x_2<10$，则 $0<f(x_1)<f(x_2)<1$，可知

$$0<f(x_1)\cdot f(x_2)<1，即\ 1-\frac{1}{f(x_1)f(x_2)}<0,$$

所以 $F(x_2)<F(x_1)$；

(2) 若 $x_2>x_1>10$，则 $f(x_2)>f(x_1)>1$，可知

$$f(x_1)\cdot f(x_2)>1，即\ 1-\frac{1}{f(x_1)f(x_2)}>0,$$

所以 $F(x_2)>F(x_1)$.

综上所述，$F(x)$ 在 $(-\infty,10)$ 为减函数，在 $(10,+\infty)$ 为增函数.

1.1.4 习题 1.1 解析

1. 用区间表示下列点集：

(1) $\{x\mid x\neq 0\}$； (2) $\{x\mid |x-4|<5\}$；

(3) $\{x\mid |x+1|>0\}$； (4) $\{x\mid x^2+5x+6<0\}$.

解 (1) 由于实数全体为 $(+\infty,-\infty)$，因此

$$\{x\mid x\neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

(2) 由 $|x-4|<5$,有 $-1<x<9$,因此

$$\{x \mid |x-4|<5\}=(-1,9).$$

(3) 由 $|x+1|>0$,有 $x>-1$ 或 $x<-1$,因此

$$\{x \mid |x+1|>0\}=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty).$$

(4) 由 $x^2+5x+6<0$,有 $-3<x<-2$,因此

$$\{x \mid x^2+5x+6<0\}=(-3,-2).$$

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{2+x-x^2}}{\ln\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}+\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$;

(3) $y=\begin{cases} x, & x>1, \\ 1-x, & |x|\leqslant 1. \end{cases}$

解　(1) 要使函数有定义,必须 $\begin{cases} x\neq 0, \\ 1-x^2\geqslant 0, \end{cases}$ 即 $x\in[-1,0)\cup(0,1]$,所以函数的定义域为

$$x\in[-1,0)\cup(0,1].$$

(2) 使得函数有意义的数集满足以下不等式组

$$\begin{cases} 2+x-x^2\geqslant 0, \\ x+\dfrac{1}{2}>0, \\ x+\dfrac{1}{2}\neq 1, \\ \left|\dfrac{3x-1}{2}\right|\leqslant 1, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 2, \\ x>-\dfrac{1}{2}, \\ x\neq\dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{3}\leqslant x<\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1, \end{cases}$$

所以函数的定义域为 $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right]$.

(3) 分段函数的定义域为各段函数定义域的并,所以函数的定义域为 $[-1,+\infty)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ -2, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 求下列函数的定义域:

(1) $f(x+3)$;　　(2) $f(2x)$.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 2$,所以

(1) $f(x+3)$ 的定义域为 $0\leqslant x+3\leqslant 2$,即 $-3\leqslant x\leqslant -1$.

(2) $f(2x)$的定义域为 $0\leqslant 2x\leqslant 2$，即 $0\leqslant x\leqslant 1$.

4. 求下列函数的值：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$，求 $f(2)$，$f(2+h)$，$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，其中 h 为常数且 $h\neq 0,-4$；

(2) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1,\\ 2x+3, & x>1,\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f(1.5)$，$f(1+h)$，其中 h 为常数.

解　(1) 当 $x=2$ 时，$f(2)=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$；

当 $x=2+h$ 时，$f(2+h)=\dfrac{1}{2+h+2}=\dfrac{1}{4+h}$；

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\dfrac{1}{x+h+2}-\dfrac{1}{x+2}}{h}=\frac{-1}{(x+h+2)(x+2)}.$$

(2) 当 $x=0$ 时，$f(0)=0+1=1$；

当 $x=1.5$ 时，$f(1.5)=2\times 1.5+3=6$；

当 $x=1+h<1$，即 $h<0$ 时，$f(1+h)=2+h$；

当 $x=1+h>1$，即 $h>0$ 时，$f(1+h)=2h+5$.

5. 下列各题的两个函数是否相同？为什么？

(1) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}$；　　(2) $y=\sqrt{1+\cos 2x}$ 与 $y=\sqrt{2}\cos x$；

(3) $y=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $y=x\sqrt[3]{x-1}$；　　(4) $y=1$ 与 $y=\cos^2 x+\sin^2 x$.

解　(1) 不相同. 因为对应法则不同，所以不是同一函数.

(2) 不相同. 因为

$$y=\sqrt{1+\cos 2x}=\sqrt{2\cos^2 x}=\sqrt{2}\,|\cos x|,$$

它们对应法则不同，所以不是同一函数.

(3) 相同. 因为 $y=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 和 $y=x\sqrt[3]{x-1}$ 的定义域都是一切实数，且对应法则相同，所以是相同函数.

(4) 相同. 因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$，所以是相同函数.

6. 判断下列函数的单调性：

(1) $y=1-x^2$；　　(2) $y=x+\ln x$.

解　(1) 因为 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，而在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，所以 $y=1-x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，而在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

(2) 因为函数 $y=f(x)=x+\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\ln x_1-x_2-\ln x_2=x_1-x_2+\ln\frac{x_1}{x_2}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单增函数.

7. 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$ 在其定义域内是有界的.

证　因为 $x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geqslant 4$，所以

$$0<\frac{1}{x^2+2x+5}\leqslant\frac{1}{4},$$

故函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$在其定义域内是有界的.

8. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=3x^2-x^3$;　　(2) $y=x(x-1)(x+1)$;

(3) $y=\sin x-\cos x+1$;　　(4) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解　(1) $y=f(x)=3x^2-x^3$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,是对称区间,又

$$f(-x)=3\,(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3,$$

则 $f(-x)\neq f(x)$且 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)$既非偶函数又非奇函数.

(2) $y=f(x)=x(x-1)(x+1)$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,是对称区间,又

$$f(-x)=-x[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以 $f(x)$为奇函数.

(3) $y=f(x)=\sin x-\cos x+1$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,是对称区间,又

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1,$$

则 $f(-x)\neq f(x)$且 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)$既非偶函数又非奇函数.

(4) $y=f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,是对称区间,又

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x),$$

所以 $f(x)$为偶函数.

9. 下列函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

(1) $y=\cos(x-2)$;　　(2) $y=1+\sin\pi x$;

(3) $y=x\sin^2 x$;　　(4) $y=|\cos 3x|$.

解　(1) 是周期函数,周期为 2π.

(2) 是周期函数,周期为 2.

(3) 不是周期函数.

(4) 是周期函数,周期为$\dfrac{\pi}{3}$.

10. 当 k 为何值时,函数 $f(x)=\dfrac{x+k}{kx^2+2kx+2}$的定义域是$(-\infty,+\infty)$?

解　当 $k=0$ 时,$f(x)=\dfrac{x}{2}$,此时函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$;

当 $k\neq 0$ 时,只要 $kx^2+2kx+2\neq 0$,即

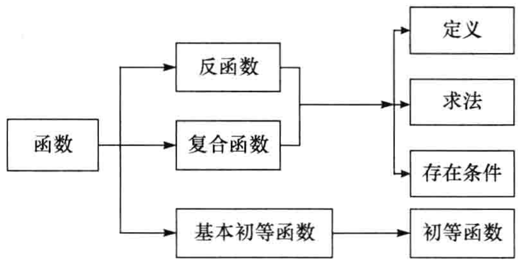
$$\Delta=(2k)^2-4\times 2k<0,$$

也就是当 $0<k<2$ 时,函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$;

故当 $0\leqslant k<2$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{x+k}{kx^2+2kx+2}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

1.2　反函数　复合函数　初等函数

本节教材知识结构



1.2.1　学习要求

1. 理解复合函数概念，了解反函数的概念；
2. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

重点　反函数与复合函数的求法；熟记基本初等函数的图形、性质.

难点　分段函数的反函数以及分段函数的复合函数的求法.

1.2.2　疑难解答

1. 单调函数必有反函数，不单调的函数一定没有反函数吗？

不一定. 一个函数是否存在反函数，取决于其对应法则 f 在定义域与值域之间是否构成一一对应关系. 如果是一一对应，则必有反函数，否则就没有反函数. 单调函数只是一种特殊的一一对应关系，只是存在反函数的充分条件，而非必要条件.

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在区间[0,2]上不单调(图 1.2.1)，但它存在反函数(图 1.2.2)

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x+1, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

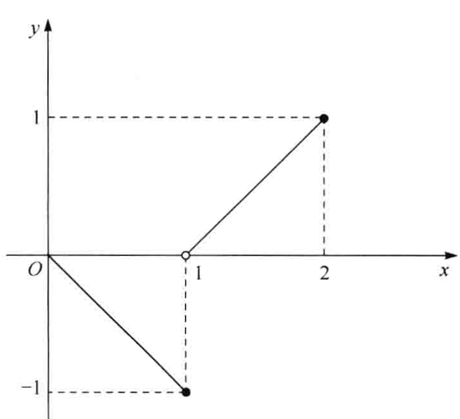


图 1.2.1

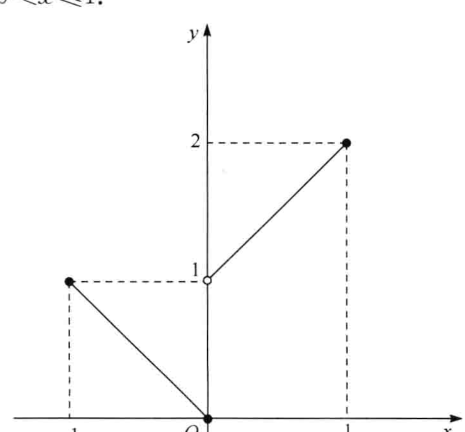


图 1.2.2

2. 两个函数能构成复合函数的条件是什么?

函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 能构成复合函数的条件是:内函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 R_φ 与外函数 f 的定义域 D_f 相交非空,否则不能构成复合函数.

例如,$y=f(u)=\sqrt{u}$ 的定义域为 $D_f=[0,+\infty)$,$u=\varphi(x)=-x^2-1$ 的值域为 $R_\varphi=(-\infty,-1]$,显然 $R_\varphi\cap D_f=\varnothing$,此时函数 f 和函数 g 不能构成复合函数.

3. 初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算构成并用一个式子表示的函数,那么分段函数一定不是初等函数吗?

不一定. 大部分的分段函数都不是初等函数,但是有些函数形式上是分段函数,而实质上是初等函数. 例如,

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

因为在 $[0,2]$ 上,$f(x)=1-|x-1|=1-\sqrt{(x-1)^2}$,所以 $f(x)$ 是初等函数.

又如,

$$g(x)=\begin{cases}2, & x<1,\\ 4, & x>1\end{cases}=3+\begin{cases}-1, & x<1,\\ 1, & x>1\end{cases}=3+\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}\quad(x\neq 1)$$

也是初等函数. 但是 $h(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 却不是初等函数.

1.2.3 典型题型分析

题型Ⅰ 反函数的求法

例 1 求函数 $y=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 的反函数.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,有 $-1\leqslant y=x^2-1\leqslant 0$,解得 $x=\sqrt{1+y}$;

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时,有 $0\leqslant y=x^2\leqslant 1$,解得 $x=-\sqrt{y}$.

因此反函数为

$$x=\varphi(y)=\begin{cases}\sqrt{1+y}, & -1\leqslant y\leqslant 0,\\ -\sqrt{y}, & 0<y\leqslant 1,\end{cases}$$

习惯上交换 x,y,写成

$$y=\varphi(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

注 求分段函数的反函数,必须分段进行处理.

题型Ⅱ 复合函数的求法

例 2 设 $f\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)=\csc^2 x-\cos^2 x$,求 $f(x)$.

解 因为

$$f\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{1}{\sin^2 x}+\sin^2 x-1=\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)^2-3,$$