

 华版文化

主编 / 尔悦

衡水重点中学

状元

手
写
笔
记

HENG SHUI ZHONG DIAN ZHONG XUE
ZHUANG YUAN SHOU XIE BI JI

借鉴状元思维模式
分享状元学习方法
养成状元学习习惯

数 学

光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

状元手写笔记. 数学 / 尔悦主编. —北京: 光明日报出版社, 2015. 2

ISBN 978-7-5112-7858-6

I. ①状… II. ①尔… III. ①中学数学课—高中—升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 027021 号

状元手写笔记 数学

主 编: 尔 悦

责任编辑: 李 娟

封面设计: 华版美工

责任印制: 曹 净

策 划: 华版教育

责任校对: 张国新

出版发行: 光明日报出版社

地 址: 北京市东城区珠市口东大街 5 号, 100062

电 话: 010-67022197(咨询), 67078870(发行), 67078235(邮购)

传 真: 010-67078227, 67078255

网 址: <http://book.gmw.cn>

E-mail: gmcbcs@gmw.cn

lijuan@gmw.cn

法律顾问: 北京德恒律师事务所龚柳方律师

印 刷: 北京鹏润伟业印刷有限公司

装 订: 北京鹏润伟业印刷有限公司

本书如有破损、缺页、装订错误, 请与本社联系调换

开 本: 880×1230 1/16

字 数: 255 千字

印 张: 26.5

版 次: 2015 年 2 月第 1 版

印 次: 2015 年 2 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5112-7858-6

定 价: 59.90 元

他山之石，可以攻玉

高考是场战斗，从踏入高一的那一刻起，战斗就已打响。无论家长还是孩子都不想输在人生中最关键的时期。也正因为如此，如何抢得先机就变得尤为重要。

有道是“他山之石，可以攻玉”。为此，我们特别联合衡水重点中学倾力打造了这本《状元手写笔记》。本书从“状元”“学霸”的视角入手，在如何领会教材，把握学习规律、学习技巧和学习方法，以及如何积累学习中的经验等方面，给予广大学子切实有效的指导。

如果你是高一学生，你可以逐步领悟状元的思维模式，感受高考状元学习过程中的点点滴滴，养成自己良好的学习习惯，更好、更透彻地掌握学科知识。

如果你是高二学生，对于马上开始的一轮复习，状元笔记可以让你的知识更系统，以点带面，融会贯通。

如果你是高三学生，凭借状元对高考的理解，对知识点的系统总结，可以帮助你最后阶段更有力地冲刺，达到迅速提分的目的。

本书以“学”为切入点，科学学习。与状元对话，体会状元的学习方法、学习习惯，高效学习，快速增分。《状元手写笔记》一定会使你拨云见日，豁然开朗，翘首龙门。

取状元学习之精华
筑成功学习之阶梯

《状元手写笔记》编辑部

2015年2月1日

目

录

第一章 集合与函数的概念 1

§1 集合的含义与表示 1

§2 集合之间的关系 3

§3 集合之间的运算 5

§4 不等式的解法 10

§5 分式不等式 13

§6 高次不等式 14

§7 绝对值不等式 15

§8 一元二次不等式 15

第二章 函数 18

§1 函数的定义及表示方法 18

§2 区间 19

§3 函数的值域 20

§4 函数的解析式 24

§5 映射 26

§6 函数的单调性 28

§7 函数的奇偶性(对称性) 36

§8 指数 40

§9 指数函数 41

§10 图象的平移、对称、折置 47

§11 对数 48

§12 对数函数 50

§13 反函数 58

§14 幂函数 58

§15 函数的图象 61

§16 方程的根与函数的零点 63

§17 一元二次方程根的分 65

第三章 三角函数 67

§1 任意角 67

§2 弧度制 70

§3 任意角的三角函数 72

§4 诱导公式 76

§5 三角函数的图象和性质 78

第三章 不等式 88

§1 不等式的性质 88

§2 基本不等式(均值不等式) 92

第四章 空间几何体 98

§1 空间几何体的结构 98

§2 空间几何体的直观图画法 99

§3 空间点、直线、平面之间的位置关系 101

§4 直线 103

§5 直线与平面平行 106

§6 平面与平面平行 109

§7 直线与平面垂直 112

§8 直线与平面所成的角 115

§9 三垂线定理及逆定理 117

§10 二面角 118

§11 平面与平面垂直 121

第五章 直线与圆的方程 124

§1 直线的倾斜角和斜率 124

§2 直线的方程 124

§3 两条直线的位置关系 125

§4 直线的交点坐标、距离公式 130

§5 关于点、直线的对称 131

§6 线性规划 134

§7 圆 137

第六章 圆锥曲线 149

§1 曲线与方程 149

§2 椭圆 151

§3 椭圆的几何性质 153

§4 直线与椭圆的位置关系 155

针对性训练 158

§5 双曲线 160

§6 双曲线的几何性质 162

§7 直线与双曲线的位置关系 165

§8 抛物线 169

§9 抛物线的几何性质 171

针对性训练 173

§10 求轨迹的方程 174

§11 直线与圆锥曲线的交点及相关弦 179

§12 弦中点的问题 182

第七章 常用逻辑用语 184

§1 命题及其关系 184

§2 充分条件与必要条件 185

§3 逻辑联结词 186

§4 全称量词与存在量词 187

第八章 排列与组合、二项式定理 188

§1 两个计数原理 188

§2 排列 193

§3 组合 198

§4 二项式定理 203

§5 二项式定理的性质 208

第九章 概率 212

§1 随机事件的概率 212

§2 古典概型 213

§3 几何概型 215

§4 离散型随机变量及分布列 217

§5 二项分布及其应用 219

§6 均值与方差 223

§7 条件概率 225

第十章 函数的导数及其应用 228

§1 变化率与导数 228

§2 导数的计算 230

§3 导数在研究函数中的应用 231

§4 函数的极值与导数 232

§5 函数的最值与导数 236

§6 定积分的概念 241

§7 微积分的基本定理 244

§8 定积分在物理中的应用 245

第十一章 复数 246

第十二章 推理与证明 250

§1 分析法 254

§2 反证法 257

§3 数学归纳法 259

第十三章 算法初步 275

§1 算法与程序框图 275

§2 程序框图 276

§3 基本算法语句 279

§4 条件语句 280

§5 循环语句 281

第十四章 几何证明 282

§1 相似三角形的判定及有关性质 282

§2 直线与圆的位置关系 283

第十五章 坐标系及参数方程 286

§1 坐标系 286

§2 极坐标系 288

§3 极坐标方程 289

§4 参数方程 289

专题部分 集合与逻辑用语 291

函数 293

专题一 函数的定义域 293

专题二 函数解析式 294

专题三 函数的值域 295

专题四 函数的性质 298

专题五 指数、指数函数 302

专题六 对数、对数函数 306

专题七 幂函数、图象的变换 309

专题八 函数的应用 311

不等式 313

专题一 不等式性质 313

专题二 基本不等式及其应用 315

专题三 绝对值不等式的证明及

解法 317

专题四 不等式的证明(放缩法) 322

三角函数 324

专题一 任意角的三角函数 324

专题二 两角和(差)的三角函数 327

专题三 三角函数的图象和性质 329

专题四 解斜三角形 334

平面向量 337

数列 343

专题一 数列的概念及表示方法 343

专题二 等差数列 344

专题三 等比数列 347

专题四 数列的通项公式 350

立体几何 353

专题一 空间几何体的三视图和直

观图 353

专题二 空间点、线、面的位置关系 356

专题三 平行 357

专题四 垂直 359

专题五 空间角 361

解析几何 368

专题一 直线方程 368

专题二 距离、对称 371

专题三 圆锥曲线(圆) 374

专题四 圆锥曲线(椭圆) 378

专题五 圆锥曲线(双曲线) 384

专题六 圆锥曲线(抛物线) 389

排列、组合、二项式定理 397

专题一 排列与组合 397

专题二 二项式定理 399

概率 401

专题一 基本事件的概率 401

专题二 几何概率型及离散型随机
变量的分布列 404

专题三 正态分布 411

附:清华北大500学子学习方法分享

第一章 集合与函数的概念

§1 集合的含义与表示

一、集合：一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合 (Set) (简称为集)。

例如 a 是集合 A 的元素 就说 a 属于集合 A ，记作 $a \in A$ ，

a 不是 A 中的元素，就是说 a 不属于集合 A ，记作 $a \notin A$ 。

(1) 有限集 $\{1, 2, 3\}$ 列举法

无限集 $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ 列举法

(2) 描述法：用集合所含元素的共同特征表示集合的方法。

总结： $A = \{x | f(x) = 0\}$ 表示方程 $f(x) = 0$ 的解集

$B = \{x | f(x) \geq M\}$ 表示不等式 $f(x) \geq M$ 的解集

$C = \{x | y = f(x)\}$ 表示函数 $y = f(x)$ 自变量的取值范围。

$D = \{y | y = f(x)\}$ 表示函数 $f(x)$ 值的取值范围。

$E = \{(x, y) | y = f(x)\}$ 表示函数 $y = f(x)$ 的点集。

$F = \{(x, y) | \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}\}$ 表示方程组的解集。

$G = \{(x, y, z) | \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}\}$ 表示方程组的解集。

$H = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$
 $= \{x | x = 2(k-1), k \in \mathbb{Z}\}$ = 偶数集

$I = \{x | x = 2k-1, k \in \mathbb{Z}\}$
 $= \{x | x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$ = 奇数集

$$L = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x | x = 3k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$$

被 3 除余 1 的数

$$\{(x, y) | x + y = 5, x, y \in \mathbb{N}\} = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)\}$$

$$\{x | 4x - 1 \leq 0\} = \{x | x \leq \frac{1}{4}\}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

解集

$$\{(x, y) | \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}\} = \{(2, -1)\}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ z + x = 3 \end{cases}$$

解集

$$\{(x, y, z) | \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ z + x = 3 \end{cases}\} = \{(1, 0, 2)\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} | y = \sqrt{4 - 3x}\} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq \frac{4}{3}\} = \{x | x \leq \frac{4}{3}\}$$

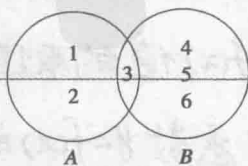
$$\{y \in \mathbb{R} | y = \sqrt{4 - 3x}\} = \{y | y \geq 0\}$$

$$A = \{(x, y) | y = \sqrt{4 - 3x}\}$$

$$(1, 1) \in A$$

$$(-2, 3) \notin A$$

补：表示方法 韦恩图



$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, 0 \in \mathbb{N}, \{2, 2\} = \{x | x^2 - 4 = 0\}$$

$$\{x | x > 3\} \supseteq \{x | x > 5\}$$

△ 集合 $A = \{x | mx^2 - 3x + 2 = 0, m \in \mathbb{R}\}$, 若 A 中元素至多一个, 求 m 的取值

范围. 1) 若 $A = \emptyset$ 时, $\Delta = 9 - 8m < 0, m > \frac{9}{8}$; 2) 若 $A \neq \emptyset$ 时.

① 若 $m = 0, A = \{\frac{2}{3}\}$ 或空. ② 若 $m \neq 0$ 时, $\Delta = 0, m = \frac{9}{8}$. m 的值为: 0, $m \geq \frac{9}{8}$.

§2 集合的关系

一. 子集: 若集合A中的每一个元素都属于集合B, 则称A是B的子集.

记作: $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

例: $R \supseteq Q \supseteq Z \supseteq N \supseteq N^*$.

(1) $A \subseteq B \quad B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

(2) $A \subseteq A$

(3) $\emptyset \subseteq \text{任何集合}$. $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 5\}$.

二. 真子集: A是B的子集, 且B中至少有一个元素不属于A, 则A是

B的真子集. 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

(4) $A \subset B \Rightarrow A \subseteq B$.

$A \subseteq B \Rightarrow A \subset B$ 或 $A = B$

$\left. \begin{matrix} A \subseteq B \\ A \neq B \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \subset B$

例: $R \supsetneq Q \supsetneq Z \supsetneq N \supsetneq N^*$ <写最准确的关系>

三. 相等: $\left. \begin{matrix} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow A = B$

两集合中元素完全相同, 顺序可以不同

△ 元素 $\in / \notin$ 集合

集合 $\subseteq / \subset / = / \neq$ 集合

规定: 空集是任何非空集合的真子集

公式: 集合中含有n个元素 子集有 2^n 个 真子集有 $2^n - 1$ 个.

	子集	
$A = \emptyset$	$\emptyset$	$1 = 2^0$
$A = \{1\}$	$\emptyset, \{1\}$	$2 = 2^1$
$A = \{1, 2\}$	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$	$4 = 2^2$
$A = \{1, 2, 3\}$	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$	$8 = 2^3$
$A = \{1, 2, 3, 4\}$	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$	$16 = 2^4$

$$\triangle A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$B = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbb{Z}\}$$

A与B的关系是 $A \supset B$

$$\triangle A = \{0, 1\}, B = \{x \mid x \in A\}, C = \{x \mid x \subseteq A\}, A, B, C \text{ 关系 } A = B \subseteq C$$

$$\triangle A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, B = \{x \mid x^2 + ax + 1 = 0\} \text{ 若 } B \subseteq A, \text{ 求 } a \text{ 的取值范围}$$

解: $A = \{1, 2\}$. $\because B \subseteq A$. 若 $B = \emptyset$, $\Delta = a^2 - 4 < 0$, $-2 < a < 2$; 若 $B = \{1\}$, $x^2 + ax + 1 = (x-1)^2$, $a = -2$; 若 $B = \{2\}$, $x^2 + ax + 1 = (x-2)^2$ 不成立; 若 $B = \{1, 2\}$, $x^2 + ax + 1 = (x-2)(x-1)$, 不成立. 综上: $-2 \leq a < 2$.

$$\triangle M = \{2, a, b\}, N = \{2a, 2, b^2\}, M = N, \text{ 求 } a, b \text{ 的值.}$$

$$\text{由题意: } \begin{cases} a=2a \\ b=b^2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=b^2 \\ b=2a \end{cases} \therefore \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\triangle \{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ 满足集合 } A \text{ 的个数 } \underline{8} ?$$

$$\triangle M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, N \neq \emptyset, N \subseteq M \text{ 若 } a \in N, \text{ 则 } 8-a \in N.$$

则满足条件集合N的个数为 15. $2^4 - 1$.

§3 集合的运算

一. 交集: 由所有属于集合A且属于集合B的元素构成的新集合, 称为A.B的交集 记作 $A \cap B$

$$\triangle A = \{1, 3, 5, 7\} \quad B = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\} \quad A \cap B = \underline{\{3, 5\}}$$

$$\triangle A = \{x | 2 \leq x \leq 8\} \quad B = \{x | x < 5\} \quad A \cap B = \underline{\{x | 2 \leq x < 5\}}.$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

$$A \cap \phi = \phi; \quad A \cap A = A;$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A,$$

$$(A \cap B) \subseteq A \text{ (或 } B).$$

二. 并集: 由所有属于集合A或属于集合B的元素构成的新集合, 称作A.B的并集 记作 $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$$\triangle A = \{1, 3, 5, 7\}, \quad B = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}, \quad A \cup B = \underline{\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}}.$$

$$\triangle A = \{x | 2 \leq x \leq 8\} \quad B = \{x | x < 5\} \quad A \cap B = \{x | 2 \leq x < 5\}$$

$$A \cup B = \{x | x \leq 8\}$$

$$\triangle A = \{x | x < 10\} \quad B = \{x | x \geq 0\} \quad A \cap B = \{x | 0 \leq x < 10\}, \quad A \cup B = \{x | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

$$A \cup \phi = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B; \quad A \cup B \supseteq A, B \supseteq A \cap B.$$

容斥原理: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

三. 补集: 全集 U $A \subseteq U$.

在全集 U 中, 由所有不属于集合 A 的元素组成的新集合, 称做 A 在 U 中的补集. 记 $C_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

$$(C_U A) \cap A = \emptyset$$

$$(C_U A) \cup A = U$$

> 互补

$$C_U(C_U A) = A, \quad C_U \emptyset = U, \quad C_U U = \emptyset.$$

运算律: 交换律 $\begin{cases} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{cases}$

结合律 $\begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{cases}$

分配律 $\begin{cases} (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{cases}$

$$(C_U A) \cup (C_U B) \cup (C_U C) = C_U(A \cap B \cap C).$$

$$\Delta U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}, \quad A = \{2, 3, 5, 8\} \quad B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$C_U A = \{\underline{1, 4}, 6, 7, 9, 10\}, \quad C_U B = \{\underline{2, 8, 9}, 10\}.$$

$$A \cap B = \{3, 5\} \quad A \cup B = \{\underline{1, 2, 3, 4}, 5, 6, 7, 8\}$$

$$(C_U A) \cap B = \{\underline{1, 4, 6, 7}\} \quad A \cup (C_U B) = \{\underline{2, 3, 5}, 8, 9, 10\}.$$

$$(C_U A) \cap (C_U B) = \{\underline{9, 10}\} \quad C_U(A \cup B) = \{\underline{9, 10}\}.$$

$$(C_U A) \cup (C_U B) = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad C_U(A \cap B) = \{\underline{1, 2, 4}, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\Delta U = \mathbb{R}, \quad A = \{x \mid 5 \leq x \leq 10\}, \quad B = \{x \mid x < 8\}$$

$$C_A = \{x \mid x < 5 \text{ 或 } x > 10\}, \quad C_B = \{x \mid x \geq 8\}$$

$$A \cap B = \{x \mid 5 \leq x < 8\}, \quad A \cup B = \{x \mid x \leq 10\}$$

$$(C_A) \cap B = \{x \mid x < 5\}, \quad A \cup (C_B) = \{x \mid x \geq 5\}$$

$$(C_A) \cap (C_B) = \{x \mid x > 10\}, \quad C(A \cup B) = \{x \mid x > 10\}$$

$$(C_A) \cup (C_B) = \{x \mid x < 5 \text{ 或 } x \geq 8\}, \quad C(A \cap B) = \{x \mid x < 5 \text{ 或 } x \geq 8\}$$

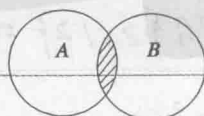
$$A \cup B = A \cap B \iff A = B$$

摩根运算律:

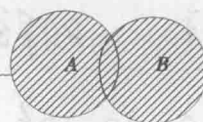
$$(C_A) \cap (C_B) = C(A \cup B)$$

$$(C_A) \cup (C_B) = C(A \cap B)$$

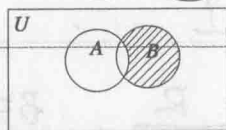
(韦恩图) Venn



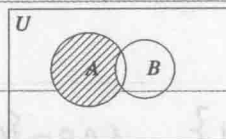
$A \cap B$



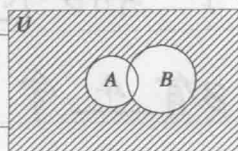
$A \cup B$



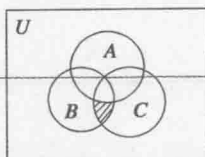
$B \cap (C_A)$



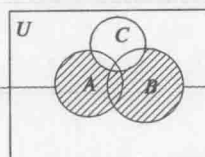
$A \cap (C_B)$



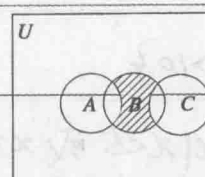
$C(A \cup B)$



$$B \cap C \cap (C \cup A)$$



$$(A \cup B) \cap (C \cup C)$$



$$B \cap (C \cup A) \cap (C \cup C) = B \cap C \cup (A \cap C)$$

△ U 为全集, $M \subseteq N \subseteq U$, 则下列结论正确的是 (B)

A $M \cup N = U$

B $(C \cup M) \cup N = U$

C $(C \cup M) \cup (C \cup N) = U$

D $(C \cup M) \cap (C \cup N) = N$

△ $U = \{ \text{小于100的正整数} \}$, $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $(C \cup A) \cap B = \{1, 9\}$, $A \cap B = \{2\}$

$$(C \cup A) \cap (C \cup B) = \{4, 6, 8\}, A = \{2, 3, 5\}, B = \{1, 2, 9\}$$

△ $P \cap \{4, 6\} = \{4\}$, $P \cap \{8, 10\} = \{10\}$, $P \cap \{2, 12\} = \{2\}$,

$$P \subseteq \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, P = \{4, 2, 10\}$$

△ $A = \{x | y = 2x + 1\}$, $B = \{y | y = x^2 + 1\}$, $A = \mathbb{R}$, $B = \{y | y \geq 1\}$.

$$A \cap B = \{y | y \geq 1\}$$

△ $A = \{(x, y) | y = 2x + 1\}$, $B = \{(x, y) | y = x^2 + 1\}$, $A \cap B = \{(0, 1), (2, 5)\}$

△ $\{1, 2\} \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则满足条件集合 B 有 4 个.

△ $M \subseteq \{1, 2, 3\}$, 且 $M \subseteq \{1, 2, 4, 5\}$, 则集合 M 的个数 4.

△ $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, A, B 共有 18 组.

内心 —— 内切圆圆心 —— 内角平分线的交点

重心 —— 三条中线的交点 —— 分线段所成比为 2:1

垂心 —— 三条高线的交点

$\Delta A = \{x | x^2 - mx + m^2 - 19 = 0\}$, $B = \{y | y^2 - 5y + 6 = 0\}$, $C = \{z | z^2 + 2z - 8 = 0\}$, 是否存在实数 m , 使 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ 同时成立?

解: $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, -4\}$ $\therefore 3 \in A$

$$\therefore 9 - 3m + m^2 - 19 = 0$$

$$m^2 - 3m - 10 = 0$$

$$m = 5 \text{ 或 } -2$$

当 $m = 5$ 时, $A = \{2, 3\}$, $A \cap B \neq \emptyset$ $A \cap C \neq \emptyset$ 不成立 (舍)

当 $m = -2$ 时, $A = \{-5, 3\}$ $A \cap B \neq \emptyset$ $A \cap C = \emptyset$ 成立

综上 $m = -2$ 时, 成立

$\Delta A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$ $B = \{x | 2a < x < a+1\}$ 且 $B \subseteq A$ 求 a 的范围

解: 1) $B \neq \emptyset \therefore B = \{x | 2a < x < a+1\} \subseteq A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$

$$B = \{y | y^2 - 5y + 6 = 0\}$$

$$\therefore \begin{cases} 2a < a+1 \\ a+1 \leq -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2a < a+1 \\ 2a \geq 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a < 1 \\ a \leq -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a < 1 \\ a \geq \frac{1}{2} \end{cases} \therefore a \leq -2 \text{ 或 } \frac{1}{2} \leq a < 1$$

2) 当 $B = \emptyset$ 时, $2a \geq a+1$, $a \geq 1$ 综上 $a \leq -2$ 或 $a \geq \frac{1}{2}$

$\Delta A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\}$

且 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$ 求 a 及 m 的取值范围

解: $A = \{1, 2\}$

1) ① $B = \emptyset$ 时, $\therefore \Delta = a^2 - 4a + 4 < 0 \therefore (a-2)^2 < 0$, 不成立.

② $B \neq \emptyset$ 时, $1 \in B$ 或 $2 \in B$

当 $1 \in B$ 时, $1 - a + a - 1 = 0$ 不成立; 当 $\Delta = 0$ 时, $a = 2$, 成立.

当 $2 \in B$ 时, $4 - 2a + a - 1 = 0$, $a = 3$. $\therefore B = \{1, 2\}$.

2) ① $C = \emptyset$ 时, $\Delta = m^2 - 4 \times 2 < 0 \therefore m^2 < 8$, $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

② $C \neq \emptyset$ 时, $1 \in C$ 或 $2 \in C$.

$1 \in C$ 时, $1 - m + 2 = 0$, $m = 3$. $C = \{1, 2\}$

$2 \in C$ 时, $4 - 2m + 2 = 0$, $m = 3$ $C = \{1, 2\}$

$\therefore a = 3$ 或 2 .

$m = 3$ 或 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

§4. 不等式的解法

$$\Delta \quad x^2 - x - 6 \leq 0$$

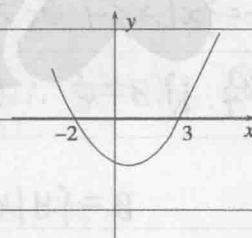
$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x_1 = 3, x_2 = -2$$

$$y = x^2 - x - 6$$

$$\therefore \{x | -2 \leq x \leq 3\}$$



$$\Delta \quad 4x - x^2 > 0$$

$$4x - x^2 = 0$$

$$x(4-x) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$\therefore \{x | 0 < x < 4\}$$

$$\Delta \quad 2x^2 - x + 3 < 0$$

$$2x^2 - x + 3 = 0$$

$$\therefore x \in \emptyset$$

$$\Delta < 0 \quad y = 2x^2 - x + 3$$

