广义差集矩阵理论和正交表构造

罗 纯 著

科学出版社

广义差集矩阵理论和正交表构造

罗　纯　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

广义差集矩阵理论是一种利用多边矩阵理论和矩阵象技术，对多维数组进行封闭的广义差运算，以此处理多指标复杂系统的关系结构和逻辑分析问题的方法体系. 本书系统地阐述广义差集矩阵理论及其应用. 全书共7章，内容包括广义差集矩阵的等价形式、原子形式、并列或标准混合形式、规范半混合形式、核形式的理论及其在混合水平正交表构造方面的应用结果.

阅读本书要求读者具有矩阵理论、集合理论、群论方面的数学基础知识. 本书可作为对多指标复杂系统的关系结构和逻辑分析问题感兴趣的科研人员及工程技术人员的参考书，也可以作为试验设计、矩阵理论、组合数学等研究方向的研究生教材.

图书在版编目(CIP)数据

广义差集矩阵理论和正交表构造/罗纯著. —北京：科学出版社，2015
ISBN 978-7-03-044289-5

I. ①广… II. ①罗… III. ①差集-矩阵-研究 ②正交阵列-研究 IV. ①O144 ②O157.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 100526 号

责任编辑：李静科 / 责任校对：张凤琴
责任印制：徐晓晨 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015年6月第 一 版 开本：720×1000 B5
2015年6月第一次印刷 印张：17 1/8
字数：328 000

定价：98.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

继皮尔逊 (Karl Pearson, 1857—1936) 之后, 开创现代统计学的无疑是费希尔 (Ronald Aylmer Fisher, 1890—1962). 他的开创性工作几乎涉及统计学的所有领域. 试验设计是费希尔的开创性工作之一. 1919 年至 1933 年费希尔在罗萨姆斯特 (Rothamsted) 农业试验站工作, 在那里费希尔为改进农艺工程做了大量的农业试验. 第一线的工作实践给了费希尔大量的试验数据与资料, 在此基础上他提出了一整套试验设计的思想, 其中有众所周知的试验设计的三大原则: 控制系统误差的分区组做试验的原则、区组内随机化原则、为减少试验误差的重复试验原则. 初版于 1935 年的费希尔的专著《试验设计》奠定了统计学中有极大实用价值的分支“试验设计”的基础, 是统计学的经典著作.

试验设计在工农业生产与科学实验方面有着极其广泛的应用, 其中尤以正交设计的应用为最甚. 正交设计根据正交表安排多个因素的试验设计与数据分析, 操作方便, 计算简单. 如果使用试验设计方法研究有多个因素的实际问题, 人们往往首选正交设计. 正交试验设计表 (简称正交表) 不仅在统计学上得到广泛应用, 还可应用于其他学科如数学中组合设计问题、物理学中对称性问题、化学中的晶体结构问题、生物学中基因组排列问题、计算机科学中编码理论与密码学等. 正交表的构造既是个热点问题, 也是个难点问题.

自从著名统计学家劳 (Calyampudi Radhakrishna Rao, 1920—) 于 1947 年提出了正交表的数学定义之后, 很多统计学家与组合数学家一直致力于研究不同类型正交表的各种构造方法. 利用差集矩阵构造正交表就是这些方法中比较重要的一个, 它对于构造有更多等水平列的正交表十分有效. 但是普通的差集矩阵由于受到行数和列数的限制, 目前所知的并不多, 构造差集矩阵是组合数学的一个难点问题. 实际问题错综复杂, 需要用到的正交表很可能不是等水平的. 如何构造混合水平的正交试验设计表是近年来很受统计界关注的一个问题.

为构造混合水平正交表, 人们将差集矩阵推广到广义差集矩阵, 并利用广义差集矩阵构造混合水平的正交表. 由于广义差集矩阵没有行数和列数的约束, 它推动了组合数学家关于普通差集矩阵理论的进一步研究. 罗纯博士的这本专著对广义差集矩阵的理论与应用进行了系统而深入地研究. 该专著以多边矩阵理论和矩阵象技术为基础, 系统而深入地研究了广义差集矩阵的等价形式、原子形式、并列或标准混合形式、规范半混合形式与核形式. 根据广义差集矩阵理论, 混合水平正交表可方便地构造出来, 并可以构造出无数个采用组合数学难以得到的混合水平正交表和

差集矩阵. 该专著附有许多广义差集矩阵的原子形式和核形式, 便于应用.

显然, 广义差集矩阵对组合数学有重要的学术价值. 组合数学不但关注有限空间的各种组合差集结构, 而且更加关注复杂系统的逻辑分析模型对应的组合差集结构. 因为每个复杂系统的逻辑分析模型都对应着一个有限空间的特殊组合差集结构, 并且更加有实用价值, 所以研究差集矩阵理论一直是组合数学的经典问题. 由于每个广义 (置换) 差集矩阵都对应一个复杂系统的逻辑分析模型, 而每个复杂系统的逻辑分析模型又对应着某种广义 (置换) 差集矩阵, 所以广义 (置换) 差集矩阵理论研究本身对复杂系统的研究也有着重要的学术价值. 这本专著既极富实用价值, 也有理论上的重要意义.

作者罗纯博士 1986 年于华东师范大学数学系本科毕业后, 即去上海应用技术学院理学院工作, 是具有 29 年教龄的资深教师. 他教学经验丰富, 教学效果优异, 获得过许多国家、地方与学校的教学奖项. 他先后于 2000 年与 2014 年在华东师范大学统计系获得硕士与博士学位. 罗纯博士是中国现场统计学会试验设计分会常务理事, 上海应用技术学院应用统计研究所所长, 美国 Bowling Green 州立大学高级研究学者. 他的研究领域除数理统计外, 还包括组合数学与系统科学等. 他主持或参与过多项国家级、省部级、校级科技发展基金项目、教改基金项目与高教研究课题, 近几年来已在国内外专业期刊上发表了 50 余篇研究论文. 罗纯博士既有扎实的理论素养, 又有丰富的实际应用与教学经验. 感谢他为我们提供了这本学术专著.

王静龙

2015 年 1 月 26 日于上海

前　言

广义差集矩阵理论是起源于《多边矩阵理论》[75] 的新理论, 自然第一个难点就是命名问题. 张应山教授在《多边矩阵理论》[75] 中提出这一理论是用于构造 2 水平的正交表, 因此他把这种构造方法称为“**布尔代数构造方法**”. 随后张应山教授在他的博士论文《正交表的数据分析及其构造》[52] 中, 把这种构造法相应的矩阵称为“**广义差集矩阵**”, 但他在*SCIENCE CHINA(Mathematics)*[76] 上使用的英文名字为“**generalized difference matrices**”. 如果直接翻译这个英文名字, 那么其名字似乎是“**广义差矩阵**”. 到底中文名字是采用“**广义差矩阵**”好呢? 还是采用“**广义差集矩阵**”的名字好呢?

要回答这个问题, 必须考虑在组合数学中差集矩阵的起源, 因为广义差集矩阵是差集矩阵的推广. 第一次使用差集矩阵的英文名字 (difference matrices) 的作者是 Bose 和 Bush[32]. 国内的试验设计前辈刘璋温[63]、蒋声[64]、项可风[65]、徐承绪[66] 等, 对这个英文名字的翻译是差集表, 强调这个表和差集有关系. 由于把英文 matrices 翻译为表, 在矩阵理论分析中不符合翻译的常规, 在应用中也有些不方便, 所以张应山教授、庞善起教授等把差集表中的“表”字改成英文 matrices 的直译“矩阵”, 使用“差集矩阵”的中文名字至今. 但是在组合数学中的差集 (difference set) 中的“差”和差集矩阵 (difference matrices) 的“差”定义是不一致的. 在组合数学中的差集 (difference set) 的“差”定义是群 G 上的一个集合 $\{x_1, \cdots, x_m\}$, 其所有两个不同元素 x_i 和 x_j 的群差 $x_i^{-1}x_j$ 中, 包含群 G 的每个非单位元素恰为 λ 次; 而差集矩阵 (difference matrices) 的“差”的定义是相应矩阵的任意不同两列各个行元素的对应群差中, 包含群 G 的所有元素 (包括单位元素) 恰为 λ 次. 尽管这两个定义不同, 但在广义差集矩阵的核形式的讨论中, 我们发现在组合数学中的差集 (difference set) 和广义差集矩阵的核形式有着紧密的联系, 并且差集矩阵中的差, 在中文语法中是动词, 容易被人理解为矩阵作差, 其不符合差矩阵的本意, 所以本书仍然使用“**广义差集矩阵**”的中文名字, 强调其矩阵和组合数学中的差集 (difference set) 有着紧密的联系, 而英文名字仍然使用“**generalized difference matrices**”. 本书的主要论述内容是广义差集矩阵理论, 但广义差集矩阵并非众多学者熟知的概念, 用这个书名将可能使得本书的阅读面偏窄. 考虑到差集矩阵和正交表是众多学者熟知的概念, 而广义差集矩阵理论是从差集矩阵和正交表概念中抽出的概念, 所以本书采用《广义差集矩阵理论和正交表构造》为书名, 目的是至少让对差集、矩阵、正交表构造感兴趣的读者能够阅读. 由于差集、矩阵、正交表的基础知识比较

多, 本书作为专著, 将尽可能叙述与其基础知识不同的最新结果, 一般只涉及广义差集矩阵、正交表构造、组合设计、试验设计、复杂系统等内容, 并且重点放在广义差集矩阵的基础理论和混合水平正交表的构造两方面.

广义差集矩阵理论的第二个难点是阅读比较困难. 张应山教授的《多边矩阵理论》[75] 中包含了许多中国传统科学的象数学[83] 思维. 象数学的立论原则是认为象或者道与人类的行为无关, 强调对任何研究对象要从整体到局部思维分析问题 (Global-Local Thinking), 不考虑研究对象的实质内容, 仅仅考虑研究对象的关系. 特别是强调阴阳五行思维, 把研究对象分成五类, 研究它们的关系, 此思维方法也称为**比类取象**方法, 相应的逻辑也称为**不自生逻辑**. 因为目前许多读者对这种思维不熟知, 所以许多学者阅读《多边矩阵理论》感到比较困难, 从而阅读本书也会感到困难. 按象数学思维, 因为一个复杂系统应包含对称 (相生) 和正交 (相克) 两种关系才能够稳定, 并且稳定的系统存在其相应的对称和正交子系统, 而数学中考虑对称问题经常使用群, 考虑正交问题经常使用内积 (向量内积为零即正交), 所以我们把群元素 ω_x 和正交向量 a_i 组成的二元数组 (ω_x, a_i) 作为我们的研究对象. 另外, 象数学不关心研究对象的实际含义, 只关心研究对象的化合关系. 一个群的化合关系相当于群差 $\omega_x^{-1}\omega_y = \omega_z$, 这里群元素 ω_z 是两个群元素 ω_x, ω_y 化合需要的关系成本. 具有相同关系成本的关系集合为象数学逻辑经常考虑的关系, 并且主要研究所有可能关系组成关系族上的关系运算. 在给定的关系族中, 如果关系成本比较容易获得, 称相应的关系化合成本比较低. 自然界所有关系化合, 都遵循化合成本比较低的原则进行化合. 于是广义差集矩阵理论也只关心研究对象整体的广义二元数组的群差关系 $(\omega_x, a_i)^{-1}(\omega_y, a_j) = (\omega_x^{-1}\omega_y, a_i^{-1}a_j) = (\omega_z, \delta_{ij})$, 其中 $a_i^{-1}a_j$ 是正交关系, 可以使用**Kronecker**记号 δ_{ij} 来表达, 当 a_i 和 a_j 不同时, 称其为正交, 记为 0; 而当 a_i 和 a_j 相同时, 称其为向量规范化, 记为 1. 向量也可以抽象成字母. 这里 (ω_z, δ_{ij}) 相当于这两个广义二元数组 $(\omega_x, a_i), (\omega_y, a_j)$ 的化合需要的关系成本. 如果关系成本 (ω_z, δ_{ij}) 比较容易获得, 那么相应的广义关系化合成本比较低. 广义差集矩阵的每两列的正交关系, 保证了对这两列因子的各种关系的观测公平. 于是分析这个广义差形成的矩阵的关系结构的各种形式, 特别是五行结构形式, 就得到了广义差集矩阵的等价形式、原子形式、并列或标准混合形式、规范半混合形式、核形式的理论, 并且可以思维这些五行结构的邻相生间相克的关系. 因为象数学处理问题的主要手段是找到相应问题的象或者道, 然后按象或者道的规律办事, 所以本书也从广义差集矩阵相应的正交表的矩阵象出发, 来研究广义差集矩阵的各种规律. 如此说来, 第一次阅读本书的读者, 可以不关心每个篇章的细节, 不懂的地方可以先跳过去, 在掌握了本书的主题思想以后, 再来看相应的篇章细节, 就比较容易阅读本书. 这种阅读方式也是象数学强调的从整体到局部的阅读方式 (Global-Local Reading).

广义差集矩阵理论的第三个难点是应用问题. 首先, 因为广义差集矩阵理论是从正交表构造理论中抽象出来的, 所以广义差集矩阵理论的直接应用仍然是正交表构造, 特别是混合水平正交表的构造. 目前发现这些理论在广义正交表的构造、对称表的构造中, 也有着比较大的用途, 相应的结论也是比较多的. 由于篇幅问题, 我们无法在本书中详细论述. 希望对设计表构造有兴趣的试验设计工作者, 不妨在这个研究方向上, 做一些工作, 相信会有一些收获. 其次, 广义差集矩阵理论是组合数学中的差集矩阵的直接推广, 而组合数学中差集矩阵构造是比较经典的问题, 由于对普通差集矩阵的行列限制, 目前很难再得到新的普通差集矩阵的结论. 如果对差集矩阵有兴趣的数学工作者, 转向研究广义差集矩阵理论, 那么将会得到许多意想不到的结果. 这是因为广义差集矩阵对行列没有限制, 在理论上存在的广义差集矩阵是相当多的, 构造和研究都相对比较容易. 另外, 广义差集矩阵的研究对象主要是象数学的广义差关系, 对中国传统文化 —— 象数学有兴趣的读者, 可以采用广义差集矩阵的关系结构对复杂系统进行逻辑分析, 因为每个广义差集矩阵都对应着一个复杂系统的关系结构分析的逻辑模型.

本书共 7 章. 第 1 章介绍研究背景和研究现状、总体阐述本书主要工作. 第 2~7 章是本书的主要内容, 分别研究广义差集矩阵的等价形式、原子形式、并列形式、半并列形式、核形式的理论. 第 2 章广义差集矩阵的等价形式中包括广义差集矩阵的计算机编程构造问题. 第 3 章广义差集矩阵的原子形式中包括从正交表的结构中抽出广义差集矩阵的构造方法, 利用计算机构造出了许多广义差集矩阵的原子形式, 放在附录 A 之中. 第 4 章广义差集矩阵的并列或标准混合形式中包括利用普通差集矩阵构造广义差集矩阵的并列或标准混合形式的计算机构造方法. 第 5 章广义差集矩阵的规范半混合形式中包括利用普通半混合差集矩阵构造广义差集矩阵的规范半混合形式的计算机构造方法, 并利用其结论构造了许多新的混合水平正交表. 第 6 章广义差集矩阵的核形式中包括从广义差集矩阵的原子形式中抽出广义差集矩阵的核形式的构造方法, 利用计算机, 构造出了许多广义差集矩阵的核形式放在附录 B 之中. 在第 7 章中, 对全文进行了总结, 并提出了广义差集矩阵和正交表构造理论的后续的研究问题和未来的一些设想, 给出了广义置换差集矩阵的概念.

本书的编写得到了华东师范大学张应山教授的大力帮助. 广义差集矩阵的许多思维方法是从他那里学到的, 关于广义差集矩阵的原子形式和核形式的构造软件, 都是由他提供的, 并且他对构造出的广义差集矩阵的原子和核的矩阵形式都做了逐一验证, 列在本书的附录之中. 可以这样说, 本书的字里行间都倾注了他的心血. 科学出版社李静科编辑为本书的出版做了大量的编辑工作. 华东师范大学王静龙教授、吴贤毅教授和汤银才教授等, 上海师范大学岳荣先教授, 美国 Bowling Green 州立大学陈汉峰教授, 上海财经大学王黎明教授, 复旦大学朱仲义教授, 河南师范大

学庞善起教授等, 给作者提出了许多建议和意见. 还有山西大学的张晓琴博士、中央财经大学王晓迪博士、东南大学陈雪平博士等, 均在广义差集矩阵理论及其正交表构造中作出贡献, 在此一并表示衷心感谢.

现在看来, 广义差集矩阵是一种数学基础理论, 类似于差集矩阵, 可以用到多个数学学科, 如试验设计、组合设计、离散数学、有限群论、复杂系统、数理逻辑、人工智能等, 可以预见到: 广义差集矩阵理论是一种富有潜力的关系结构分析的有效工具, 是一个可供人们开发利用的处女地. 作者在此将并不完全成熟的广义差集矩阵理论及其在正交表构造方面的某些应用整理成册, 献给读者.

由于作者学术水平有限, 不妥之处在所难免, 敬请有关专家和读者不吝赐教, 进一步完善这一新理论.

作　者

2015 年 3 月 11 日于上海

主要符号对照表

$\mathbf{1}_p$ 是元素全为 1 的 p 维列向量. 此记号也经常在有限乘法群上使用, 使用时 1 为单位元素.

$\mathbf{0}_p$ 是元素全为 0 的 p 维列向量. 此记号也经常在有限加法群上使用, 使用时 0 为单位元素.

$(\boldsymbol{p}) = (0, 1, \cdots, p-1)^{\mathrm{T}}$, 其中记号 T 表示矩阵的转置. 此记号也经常在有限加法群上使用, 使用时 0 为单位元素.

$[\boldsymbol{p}] = (1, 2, \cdots, p)^{\mathrm{T}}$, 其中记号 T 表示矩阵的转置. 此记号也经常在有限乘法群上使用, 使用时 1 为单位元素.

$\boldsymbol{e}_i(p) = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}_{p\times 1}$ 表示 p 维向量空间 $\mathbf{R}^p$ 的标准基向量, 即第 i 个元素是 1, 其余元素是 0 的 p 维列向量, 形成的矩阵为 $p \times 1$.

$\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 而 $\boldsymbol{A}^{-}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵.

$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

$\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ 是非负定的.

$\boldsymbol{I}_p$ 是 p 阶单位矩阵.

$\boldsymbol{J}_{p\times q}$ 是元素全为 1 的 $p \times q$ 矩阵, 当 $p = q$ 时, 记为 $\boldsymbol{J}_p = \boldsymbol{J}_{p\times q}$.

$\boldsymbol{P}_p = \dfrac{1}{p}\boldsymbol{J}_p = \dfrac{1}{p}\mathbf{1}_p\mathbf{1}_p^{\mathrm{T}}$ 是秩为 1 的特殊投影矩阵.

$\boldsymbol{\tau}_p = \boldsymbol{I}_p - \boldsymbol{P}_p$ 是秩为 $p-1$ 的特殊投影矩阵.

$m(H)$ 表示设计 H 的矩阵象.

$|T|$ 表示集合 T 的元素个数.

$\boldsymbol{C} = \mathrm{design}(\boldsymbol{a})$ 表示自然数组成的向量 $\boldsymbol{a}$ 的关联矩阵.

$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})^{-}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 表示由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 生成的投影矩阵.

$\mathrm{mod}(x, p)$ 表示模 p 的同余数运算.

$\boldsymbol{K}(p, q) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(\boldsymbol{e}_i(p)\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}(q)) \otimes (\boldsymbol{e}_j(q)\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}(p))$ 表示换位置换矩阵.

$\boldsymbol{N}_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(\boldsymbol{e}_i(p)\boldsymbol{e}_{\mathrm{mod}(i+1,p)}(p))$ 表示循环置换矩阵.

$\overset{k}{\otimes}$ 表示由映射 $k(i, j)$ 确定的矩阵广义 Kronecker 积运算.

$\otimes$ 表示由映射 $k(i, j) = ij$ 确定的矩阵广义 Kronecker 积运算为普通矩阵的 Kronecker 积运算. 乘法群的广义 Kronecker 积运算也用此记号表示.

$\oplus$ 表示由映射 $k(i, j) = \mathrm{mod}(i + j, p)$ 确定的矩阵广义 Kronecker 积运算为 Kronecker 和运算. 加法群的广义 Kronecker 积运算也用此记号表示.

$\overset{h}{\circ}$ 表示由映射 $h(i,j)$ 确定的矩阵广义 Hadamard 积运算.

$\circ$ 表示由映射 $h(i,j)=ij$ 确定的矩阵广义 Hadamard 积运算为普通矩阵的 Hadamard 积运算. 乘法群的广义 Hadamard 积运算也用此记号表示.

$\diamondsuit$ 表示由映射 $h(i,j)=(i,j)$ 确定的矩阵 Hadamard 积运算为 Hadamard 叠和运算.

$\square$ 表示由映射 $k(i,j)=iq+j$ 确定的矩阵 Hadamard 积运算为 Hadamard 合并列运算.

$\bowtie$ 表示交互作用运算.

$\boldsymbol{A}^s=\{a_1,\cdots,a_s\}$ 表示 s 个指标的正交集合.

$\boldsymbol{A}_1^s=\{1,\cdots,s\}$ 表示 s 个指标的正交集合的数码简写形式.

$\boldsymbol{G}^g=\{\omega_0,\cdots,\omega_{g-1}\}$ 表示 g 阶有限乘法群, 其中 $\omega_0=1$ 是单位元.

$\boldsymbol{G}_1^g=\{1,\cdots,g\}$ 表示 g 阶有限乘法群的数码简写形式, 其中 1 是单位元.

$\boldsymbol{G}_0^g=\{0,\cdots,g-1\}$ 表示 g 阶有限加法群, 其中 0 是单位元.

$\boldsymbol{\Gamma}_{g,s}=\boldsymbol{G}^g\times\boldsymbol{A}^s=\{(\omega_x,a_i)|\omega_x\in\boldsymbol{G}^g,a_i\in\boldsymbol{A}^s\}$ 表示两指标集合.

$\boldsymbol{\Gamma}_{(g_1,\cdots,g_m),s}=\boldsymbol{G}^g\times\boldsymbol{A}^s=\{((\omega_{x_1}^1,\cdots,\omega_{x_m}^m),a_i)|(\omega_{x_1}^1,\cdots,\omega_{x_m}^m)\in\boldsymbol{G}^g,a_i\in\boldsymbol{A}^s\},\boldsymbol{G}^g\subset\boldsymbol{G}^{g_1}\times\cdots\times\boldsymbol{G}^{g_m},g_0=g$ 表示并列运算的多指标集合.

$\boldsymbol{\Gamma}_{(g_1,\cdots,g_{m+1}),s}=\boldsymbol{G}^g\times\boldsymbol{G}^{g_{m+1}}\times\boldsymbol{A}^s=\{((\omega_{x_1}^1,\cdots,\omega_{x_{m+1}}^{m+1}),a_i)|(\omega_{x_1}^1,\cdots,\omega_{x_{m+1}}^{m+1})\in\boldsymbol{G}^g\times\boldsymbol{G}^{g_{m+1}},a_i\in\boldsymbol{A}^s\},\boldsymbol{G}^g\subset\boldsymbol{G}^{g_1}\times\cdots\times\boldsymbol{G}^{g_m},g_0=g\cdot g_{m+1}$ 表示半混合运算的多指标集合.

$R((\omega_x,a_i),(\omega_y,a_j))=(\omega_x^{-1}\omega_y)\delta_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{\Gamma}_{g,s}$ 上的关系运算.

$R(((\omega_{x_1}^1,\cdots,\omega_{x_m}^m),a_i),((\omega_{y_1}^1,\cdots,\omega_{y_m}^m),a_j))=((\omega_{x_1}^1,\cdots,\omega_{x_m}^m)^{-1}(\omega_{y_1}^1,\cdots,\omega_{y_m}^m))\delta_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{\Gamma}_{(g_0,\cdots,g_m),s}$ 上的并列关系运算.

$R(((\omega_{x_1}^1,\cdots,\omega_{x_{m+1}}^{m+1}),a_i),((\omega_{y_1}^1,\cdots,\omega_{y_{m+1}}^{m+1}),a_j))=((\omega_{x_1}^1,\cdots,\omega_{x_{m+1}}^{m+1})^{-1}(\omega_{y_1}^1,\cdots,\omega_{y_{m+1}}^{m+1}))\delta_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{\Gamma}_{(g_0,\cdots,g_{m+1}),s}$ 上的半混合关系运算.

$\boldsymbol{\pi}(\omega_x)$ 表示 g 阶有限乘法群 $\boldsymbol{G}^g$ 的元素 ω_x 对应的置换矩阵.

$\boldsymbol{L}_n(g^k)$ 表示对称正交表.

$\boldsymbol{L}_n(g_1^{k_1}\cdots g_r^{k_r})$ 表示混合水平正交表.

$\boldsymbol{L}_n^{(-)}(g_1^{k_1}\cdots g_r^{k_r})$ 表示由正交表 $\boldsymbol{L}_n$ 删除某些列得到的正交表.

$\boldsymbol{L}_g(g_1\cdots g_m)=[\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_m]$ 表示基于 g 阶有限乘法群或者加法群的标准正交表.

$\boldsymbol{L}_{\mu g}(g^s)=[\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_s]$ 表示正交集合 $\boldsymbol{A}^s=\{a_1,\cdots,a_s\}$ 对应的正交表.

$\boldsymbol{D}(p,m;g)$ 表示 p 行、m 列、水平数为 g 的普通差集矩阵.

$\boldsymbol{D}^0(p,l;g)$ 表示 p 行、l 列、水平数为 g 的普通原子差集矩阵.

$\boldsymbol{D}=[\boldsymbol{D}_0,\cdots,\boldsymbol{D}_m]=\boldsymbol{D}(p,(k_0,k_1,\cdots,k_m);(g_0,g_1,\cdots,g_m))$ 表示 p 行, 而 D_j 的列数为 k_j, 水平数为 g_j 的普通并列差集矩阵, 或者普通标准混合差集矩阵, $j=0,\cdots,m$.

$\boldsymbol{D}^0=[\boldsymbol{D}_0,\cdots,\boldsymbol{D}_m]=\boldsymbol{D}^0(p,(k_0,k_1,\cdots,k_m);(g_0,g_1,\cdots,g_m))$ 表示 p 行, 而 D_j 的列数为 k_j, 水平数为 g_j 的普通并列原子差集矩阵, 或者普通标准混合原子差集矩阵, $j=0,\cdots,m$.

$\boldsymbol{D}=[\boldsymbol{D}_0,\cdots,\boldsymbol{D}_{m+1}]=\boldsymbol{D}_h(p,(k_0,k_1,\cdots,k_{m+1});(g_0,g_1,\cdots,g_{m+1}))$ 表示 p 行, 而 D_j 的列数为 k_j, 水平数为 g_j 的普通规范半混合差集矩阵, $j=0,\cdots,m+1$.

$\boldsymbol{D}^0=[\boldsymbol{D}_0,\cdots,\boldsymbol{D}_{m+1}]=\boldsymbol{D}_h^0(p,(k_0,k_1,\cdots,k_m);(g_0,g_1,\cdots,g_{m+1}))$ 表示 p 行, 而 D_j 的列数为 k_j, 水平数为 g_j 的普通规范半混合原子差集矩阵, $j=0,\cdots,m+1$.

$\boldsymbol{D}^{[d]}(p,m;g)$ 表示 p 行、m 列、水平数为 g 的普通核差集矩阵.

$\boldsymbol{D}^{[d]0}(p,m;g)$ 表示 p 行、m 列、水平数为 g 的普通完全规范的核差集矩阵.

$\boldsymbol{D}^{(d)}(p,m;g)$ 表示 p 行、m 列、水平数为 g 的普通原子核差集矩阵.

$\boldsymbol{D}^{(d)0}(p,m;g)$ 表示 p 行、m 列、水平数为 g 的普通完全规范的原子核差集矩阵.

$\boldsymbol{D}(p,m;g,s)$ 表示 p 行、m 列、水平数为 g、具有 s 个指标的广义差集矩阵.

$\boldsymbol{D}^f(p,l;g,s)$ 表示 p 行、l 列、水平数为 g、具有 s 个指标的广义原子差集矩阵.

$\boldsymbol{D}^0(p,l;g,s)$ 表示 p 行、l 列、水平数为 g、具有 s 个指标的广义完全原子差集矩阵.

$\boldsymbol{D}=[\boldsymbol{D}_0,\cdots,\boldsymbol{D}_m]=\boldsymbol{D}(p,(k_0,k_1,\cdots,k_m);(g_0,g_1,\cdots,g_m),s)$ 表示 p 行, s 个指标, 而 D_j 的列数为 k_j, 水平数为 g_j 的广义并列差集矩阵, 或者广义标准混合差集矩阵, $j=0,\cdots,m$.

$\boldsymbol{D}^f=[\boldsymbol{D}_0^f,\cdots,\boldsymbol{D}_m^f]=\boldsymbol{D}^f(p,(k_0,k_1,\cdots,k_m);(g_0,g_1,\cdots,g_m))$ 表示 p 行, s 个指标, 而 D_j 的列数为 k_j, 水平数为 g_j 的广义并列原子差集矩阵, 或者广义标准混合原子差集矩阵, $j=0,\cdots,m$.

$\boldsymbol{D}^0=[\boldsymbol{D}_0^0,\cdots,\boldsymbol{D}_m^0]=\boldsymbol{D}^0(p,(k_0,k_1,\cdots,k_m);(g_0,g_1,\cdots,g_m))$ 表示 p 行, s 个指标, 而 D_j 的列数为 k_j, 水平数为 g_j 的广义并列完全原子差集矩阵, 或者广义标准混合完全原子差集矩阵, $j=0,\cdots,m$.

$\boldsymbol{D}=[\boldsymbol{D}_0,\cdots,\boldsymbol{D}_{m+1}]=\boldsymbol{D}_h(p,(k_0,k_1,\cdots,k_{m+1});(g_0,g_1,\cdots,g_{m+1}),s)$ 表示 p 行, s 个指标, 而 D_j 的列数为 k_j, 水平数为 g_j 的广义规范半混合差集矩阵, $j=0,\cdots,m+1$.

$\boldsymbol{D}^f=[\boldsymbol{D}_0,\boldsymbol{D}_1^f,\cdots,\boldsymbol{D}_m^f,\boldsymbol{D}_{m+1}]=\boldsymbol{D}_h^f(p,(k_0,k_1,\cdots,k_{m+1});(g_0,g_1,\cdots,g_{m+1}),s)$ 表示 p 行, s 个指标, 而 D_j 的列数为 k_j, 水平数为 g_j 的广义规范半混合原子差集矩阵, $j=0,\cdots,m+1$.

$\boldsymbol{D}^0=[\boldsymbol{D}_0,\boldsymbol{D}_1^0,\cdots,\boldsymbol{D}_m^0,\boldsymbol{D}_{m+1}]=\boldsymbol{D}_h^0(p,(k_0,k_1,\cdots,k_{m+1});(g_0,g_1,\cdots,g_{m+1}),s)$ 表示 p 行, s 个指标, 而 D_j 的列数为 k_j, 水平数为 g_j 的广义规范半混合完全原子差集矩阵, $j=0,\cdots,m+1$.

$\boldsymbol{D}^{[d]}(p,m;g,s)$ 表示 p 行、m 列、水平数为 g、具有 s 个指标的广义核差集矩阵.

$\boldsymbol{D}^{[d]f}(p,m;g,s)$ 表示 p 行、m 列、水平数为 g、具有 s 个指标的广义规范的核差集矩阵.

$\boldsymbol{D}^{[d]0}(p,m;g,s)$ 表示 p 行、m 列、水平数为 g、具有 s 个指标的广义完全规范的核差集矩阵.

$\boldsymbol{D}^{(d)}(p,m;g,s)$ 表示 p 行、m 列、水平数为 g、具有 s 个指标的广义原子核差集矩阵.

$\boldsymbol{D}^{(d)f}(p,m;g,s)$ 表示 p 行、m 列、水平数为 g、具有 s 个指标的广义规范的原子核差集矩阵.

$\boldsymbol{D}^{(d)0}(p,m;g,s)$ 表示 p 行、m 列、水平数为 g、具有 s 个指标的广义完全规范的原子核差集矩阵.

$A//B$ 表示矩阵 A 和 B 的纵向连接.

目　录

第 1 章 绪 论

1.1 研究背景和意义

20 世纪 20 年代现代统计学的主要奠基者之一费希尔在英国 Rothamsted 农业试验站工作时, 从田间试验设计研究入手, 发展了试验设计与分析的基本思想与方法. 试验设计发展至今, 已形成广泛的理论和应用体系. 其理论涉及数学的多个分支, 除了概率论与数理统计基础以外, 还涉及数论、有限代数、射影几何、组合理论、代数几何、信息论、编码理论、运筹学、计算数学以及计算机科学等各个分支. 其应用也十分广泛, 初期主要应用于农业, 后来深入到几乎各个领域, 包括工业、农林业、生物、医学、工程、物理、化学、环保以及社会经济、天文等. 归结为一句话, 凡是要进行科学实验的地方, 特别是在科技研发中, 都要用到试验设计和数据分析.

试验方案安排得是否合理, 采用的数据分析方法是否恰当, 会直接影响到最终的研究结果是否正确. 因此对试验的设计和分析, 在科技研发中起着举足轻重的作用. 尤其是在市场竞争激烈的今天, 产品质量成为企业的生命, 使得试验设计成为产品质量工程的重要组成部分而受到特别重视, 应用十分广阔. 著名统计学家 BOX G E P 曾经这样描述: 假如有 10%的工程师使用各种试验设计方法, 产品的质量和数量会得到很大提高. 质量工程学创始人田口玄一 (Taguchi G) 强调: 不懂试验设计的工程师只能算半个工程师. 试验设计与分析是使用频率最高的统计方法之一.

试验设计的方法很多, 如单因子试验、多因子试验、随机化完全区组试验、平衡不完全区组设计、链式区组设计、正交设计、拉丁方设计、饱和设计、超饱和设计、参数设计、容差设计、回归设计、均匀设计、混料设计、最优设计、响应曲面设计、扩充设计、空间填充设计、筛选设计、非线性设计和定制设计等. 西方企业对于试验设计的应用早已大规模开始, 比如美国航天航空设计的顶尖单位乔治亚宇航设计中心, 在开发导弹、战斗机等美国绝密武器系统的时候, 无一例外地使用了试验设计. 在民用领域, 如 INTEL、惠普、苹果等公司在产品研发和质量提升阶段都使用了各种试验设计方法. 文献 [1]—[80] 都是这方面的相对经典的知识, 这些知识是本书研究的基本前提.

当前, 不但各种各样新的试验设计正在快速出现, 而且各种各样经典的试验设计也在焕发青春. 在试验设计领域, 正交设计在诸多试验设计的方法中最为流行, 之

所以流行是因为它是研究多因素多水平的一种设计方法，该方法从全面试验中挑选出部分有代表性的点进行试验，具有“均衡分散，整齐可比”的特点，而且高效、快速、经济. 由于正交设计基本上是通过正交表来安排试验的，因此关于正交表的研究一直是试验设计研究领域中经久不衰的热门课题. 近年来，关于高强度正交表的研究[1]、关于近似正交表的研究[2−5]、关于正交表的存在性研究[6, 7]、关于回避多个不可实施因子水平组合的正交表的构造研究[8, 9]、关于产生具有相同结构正交表的研究[10]、关于广义正交表的研究[11−14]、关于对称正交表的研究[15]、关于正交表交互作用的研究[16−18]、关于满意正交表的研究[19, 20]、关于 schematic 正交表的研究[21]、关于利用正交表构造正交频率方的研究[22, 23]、关于混合水平混合强度正交表的研究[24, 25, 95, 97] 等在不断深化.

目前已经发现：正交表的形式和存在性与相当多的学科领域内的未解决问题有关. 例如，在数学领域，BIB 设计的构造、有限射影平面的构造、正交拉丁方系的构造、Hadamard 矩阵的构造、有限群的表示、正交幂等特征标的构造等都与正交表有关. 又如在物理学中，关于对称性问题的研究；在化学中，关于晶体结构的研究；在生物学中，关于基因组排列的研究；在计算机科学中，关于编码理论和密码学的研究等，也与正交表有关. 因此，如何构造更多的正交表，尤其是对混合水平正交表的构造，一直是试验设计领域内的一个重要问题，有着重要的理论意义和应用价值.

但是，对正交表研究又是一个很困难的问题. 制约正交表研究普及和发展的一个重要原因是：现在已知的正交表，尤其是已知的混合水平正交表并不多. 由于实际问题是千变万化的，因此其需要的正交表也是多种多样的. 故在应用中，各种各样的正交表都可能是需要的. 但是现在对许多实际问题，很难找到与其适合的正交表.

1.2 正交表构造的研究现状

正交表的数学定义是 Rao C R[26] 在 1947 年提出的，近 70 年来，许多组合数学家和统计学家一直致力于研究不同类型的正交表的各种构造方法. 早在 1975 年杨子胥在其专著《正交表的构造》[27] 中对此问题进行了探讨；1981 年马希文在其专著《正交设计的数学理论》[28] 中对正交表的构造方法进行了概括和整理；1999 年 Hedayat 等在他们的专著 *Orthogonal Arrays: Theory and Applications*[29] 中列出了正交表研究的最新动态、大量的研究成果、待解决的问题、可以使用的正交表及丰富的参考文献，为正交表的研究作出了重要的贡献. 2000 年吴建福等在他们的专著 *Experiments Planning, Analysis, and Parameter Design Optimization*[30] 中归纳了构造混合水平正交表的几种新方法，其中文译本《试验设计与分析及参数优化》[31]

由张润楚教授等于 2003 年完成.

概括来讲, 目前关于正交表的构造主要思路和成果包括利用有限域构造[32, 33], 利用拉丁方构造[34−37,94], 利用编码构造[38], 利用有限几何构造[39], 利用 Hadamard 矩阵构造[29, 40, 41], 利用扩张性替换方法 (expansive replacement method) 构造[42−45], 利用压缩性替换方法 (contractive replacement method)[46−48] 构造, 利用矩阵象构造 (matrix image construction)[49−52], 利用正交表的分层加法构造[52−54], 利用正交表的分层减法构造[52, 55], 利用正交表的乘法构造[52, 56], 利用正交表的除法构造[52, 55], 利用差集矩阵构造[29−31,43−45,57,58], 利用计算机搜索方法构造[5,59−62]. 另外, 文献 [80]—[117] 涉及这方面的成果, 本书关于正交表构造的研究都涉及相关内容. 在上述这些结果中, 以矩阵象构造正交表的理论影响最大.

从这些结果可以看出：正交表构造理论的研究进展较快, 相应的结果较多, 构造出的新正交表也比较丰富. 而这种现象出现的突出标志是张应山教授的矩阵象理论被引入到了正交表构造, 使得统计学者可以利用普通的投影矩阵分解技术, 研究正交表构造的复杂问题.

1.3 差集矩阵理论的研究现状

正交表构造理论中用到的一个重要技术是差集矩阵理论. 差集矩阵本身也具有很强的组合设计意义. Bose R C 和 Bush K A 于 1952 年率先提出了差集矩阵的概念[32], 近年来国内外许多学者对此进行研究, 取得了大量的成果. 刘璋温[63]、蒋声[64]、项可风[65] 构造了一些普通差集矩阵, 徐承绪[66]、Beth T 等[57]、Wang J C 等[45], Wu C F J 等[47]、Dey A 等[91], Hedayat A S 等[29]、Ryser H J[80] 利用普通差集矩阵构造了许多正交表, Kuhfeld W. F[96] 利用计算机搜索方法找出了一些普通差集矩阵.

在此基础上, Wang J C[92] 利用混合差集矩阵构造了一些新的混合水平正交表; 张应山等[67] 研究了广义差集矩阵及其应用; 庞善起[51] 提出了标准混合差集矩阵的定义, 并利用其构造了一些新的混合水平正交表; 张应山[52] 研究了原子差集矩阵、广义差集矩阵及其等价性质; 席金彦[55] 利用广义差集矩阵给出了一种构造正交表的简便除法; 庞善起等[69] 通过利用差集矩阵和投影矩阵的正交分解之间的关系提出了构造小的标准混合差集矩阵的一般方法, 同时也给出了通过小的标准混合差集矩阵构造阶数较大的标准混合差集矩阵的一般方法; 胡恒璐[70] 利用差集矩阵构造了部分 Cartesian 认证码; 杨巧盈[71] 利用差集矩阵构造了部分 schematic 正交表; 陈奇等[72] 研究了原子差集矩阵和正交表的一个基本的等价关系; 罗纯等[73] 探讨了广义差集矩阵和混合水平正交表以及普通差集矩阵的等价关系.