新世纪

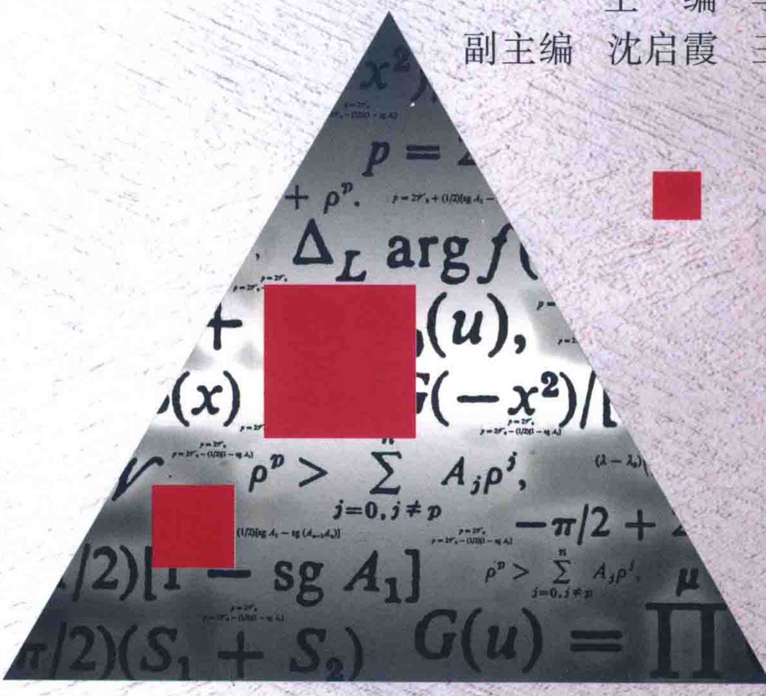
新世纪应用型高等教育基础类课程规划教材

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

主　编　李凌之

副主编　沈启霞　王　磊



大连理工大学出版社

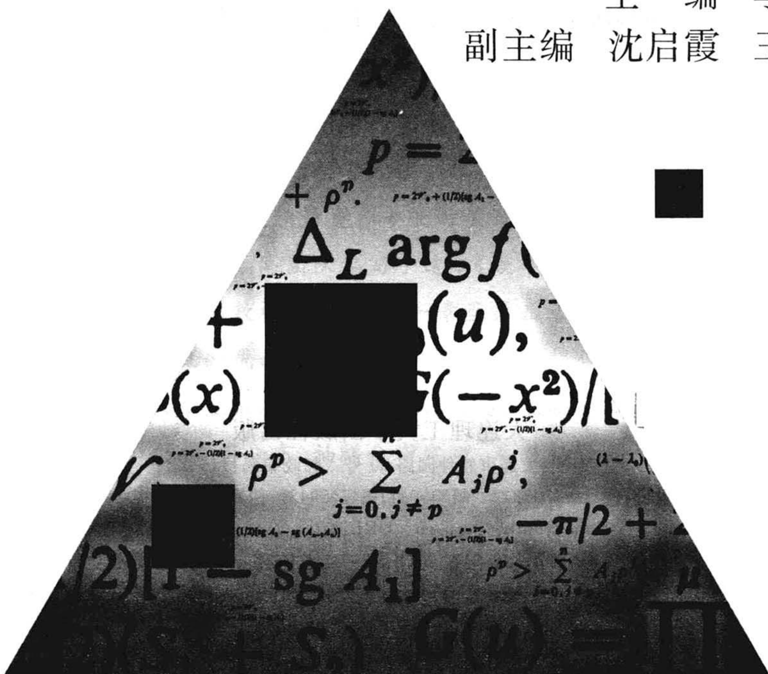
新世纪

新世纪应用型高等教育基础类课程规划教材

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

主　编　李凌之
副主编　沈启霞　王　磊



大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 李凌之主编. — 大连 : 大连理工大学出版社，2015.5
新世纪应用型高等教育基础类课程规划教材
ISBN 978-7-5611-9828-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 095141 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84708943　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连美跃彩色印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:13.25　字数:305 千字
印数:1～2000
2015 年 5 月第 1 版　　2015 年 5 月第 1 次印刷

责任编辑:王晓历　　责任校对:姜丽丽
封面设计:张　莹

ISBN 978-7-5611-9828-5　　定　价:29.50 元

前　言

《概率论与数理统计》是新世纪应用型高等教育教材编审委员会组编的基础类课程规划教材之一。

概率论与数理统计是全国高等院校工科、理科(非数学专业)、经管类等专业一门重要的数学基础课,也是考研必考的课程。它是数学中与现实世界联系最密切、应用最广泛的学科之一。由于该课程概念抽象、思维独特,是数学界公认的一门学生最难学、教师最难教的数学基础课。

目前中学理科数学已经涉及了概率统计的内容,文科数学概率统计尚属空白。因此,大学课程如何与中学课程很好地衔接,如何让学生轻松地学,让教师自如地教,也是每位教师思考的问题。解决问题的最佳方法是加强基础,培养学生的概率论与数理统计的思考方法。编者根据长期的教学积累,并在充分调查工科、经管类各专业对该课程教学要求的基础上,带领一支优秀的编写团队编写了这本《概率论与数理统计》教材。

本教材共九章,第一章至第五章为概率论部分,以研究随机现象的统计规律性为主线,为读者提供了必要的理论基础。第六章至第八章为数理统计部分,主要介绍了数理统计的基本概念、常用分布、抽样分布定理、参数估计与假设检验。第九章是 Excel 在概率统计中的应用,现在的科学发展已经越来越离不开计算机的应用,而数理统计是基于数据的收集、整理、分析和推断的一门学科,因此更需要用计算机这一现代化的工具解决实际问题。目前有许多软件都已含有统计分析工具,编者选择了容易操作的 Excel。每章附有习题,同时涵盖了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中概率论与数理统计部分所有的知识点。

本教材由李凌之任主编,沈启霞、王磊任副主编,邱本花、王涛、杨帆参与了编写。具体编写分工如下:李凌之负责编写教材大纲、前言、第八章及全书统稿及定稿;沈启霞编写了第一章和第三章;王磊编写了第四章和第五章;邱本花编写了第二章、第七章及附表;王涛编写了第六章并负责文字输入工作;杨帆编写

了第九章并绘制了全书的插图。张建康审阅了全书并提出了宝贵的建议，在此谨致谢忱。

本教材在编写过程中，参考、借鉴了许多专家、学者的相关著作，向各位专家、学者表示由衷的感谢。

限于编者水平，书中也许仍有疏漏之处，敬请广大读者批评指正。

编 者

2015 年 5 月

所有意见和建议请发往：dutpbk@163.com

欢迎访问教材服务网站：http://www.dutpbook.com

联系电话：0411-84708462 84708445

参考文献

[1] 盛骤,谢式千,潘承毅. 概率论与数理统计. 4版. 北京:高等教育出版社,2008

[2] 贺才兴,童品苗,王纪林,李世栋. 概率论与数理统计. 北京:科学出版社,2001

[3] 同济大学数学系. 概率统计简明教程. 2版. 北京:高等教育出版社,2012

[4] 范大茵,陈永华. 概率论与数理统计. 2版. 杭州:浙江大学出版社,2003

[5] 王松桂,张忠占,程维虎,高旅端. 概率论与数理统计. 2版. 北京:科学出版社,2006

[6] 张继昌. 概率论与数理统计教程. 杭州:浙江大学出版社,2003

[7] 上海财经大学应用数学系. 概率论与数理统计. 2版. 上海:上海财经大学出版社,2007

[8] 宗序平. 概率论与数理统计. 3版. 北京:机械工业出版社,2013

[9] 郝志峰,谢国瑞,汪国强. 概率论与数理统计(修订版). 北京:高等教育出版社,2009

[10] 顾玉娣,杨纪龙. 概率论与数理统计. 北京:航空工业出版社,2002

[11] 欧贵兵,刘清国. 概率统计及其应用. 北京:科学出版社,2007

[12] 徐雅静. 概率论与数理统计. 北京:科学出版社,2009

[13] 龚小庆,王炳兴. 概率论与数理统计. 杭州:浙江大学出版社,2007

[14] 梁飞豹,刘文丽,吕书龙,薛美玉. 概率论与数理统计. 北京:高等教育出版社,2014

目 录

第1章

随机事件及其概率

在自然界和人类的社会生产实践中存在着各种现象，这些现象归纳起来分为两类：一类称为**确定性现象**，即在一定的条件下必然会出现的现象．例如，水一定从高处向低处流；两个同性电荷一定互斥；太阳一定会东升西落；冬天过去，春天就会到来，等等．另一类则与此不同，例如，在相同的条件下掷一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面向上，也可能是反面向上，且在每次掷硬币之前无法确定哪种结果会出现，但是人们从长期的实践中发现，在相同的条件下重复掷一枚硬币，正面向上与反面向上的可能性各占一半．这类在相同的条件下重复进行试验，每次试验的结果未必相同，但在大量重复试验中其结果呈现某种规律性的现象称为**随机现象**，这种规律性称为**统计规律性**．概率论正是研究随机现象统计规律性的一门数学学科．

为了研究随机现象的统计规律性，下面介绍随机试验与样本空间的概念．

1.1 随机试验与样本空间

1.1.1 随机试验

我们把观察一定条件下发生的现象称为试验，如果试验满足以下三个条件：

(1)试验可以在相同条件下重复进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个；

(3)每次试验之前不能确定会出现哪一个结果，但知道它可能出现哪些结果．

那么称此试验为**随机试验**，简称**试验**，记为 E．

下面给出一些随机试验的例子．

E_1：掷一枚骰子，观察出现的点数．

E_2：一次掷两枚硬币，观察正反面出现情况．

E_3：在一批灯泡中任取一只，测试它的寿命．

E_4：记录某市 110 电话台一天内接到的呼叫次数．

E_5：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度．

1.1.2 样本空间

为了研究随机试验 E，首先需要知道 E 所有可能出现的结果，每一个可能出现的结

果称为样本点，记为 ω，由所有样本点组成的集合称为样本空间，记为 Ω.

【例 1】 写出 1.1.1 节随机试验 $E_i(i=1,2,3,4,5)$ 的样本空间.

解 $E_1:\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$.

$E_2:\Omega_2=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$.

$E_3:\Omega_3=\{\omega|\omega\geqslant 0\}$.

$E_4:\Omega_4=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

$E_5:\Omega_5=\{(x,y)|T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$.

这里 E_5 中 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区的温度不会小于 T_0，也不会大于 T_1.

1.2 随机事件和事件的关系与运算

1.2.1 随机事件

在一次随机试验中可能发生也可能不发生，但在大量重复试验中具有某种规律性的结果，称为**随机事件**，简称**事件**. 用大写的英文字母 A,B,C 等表示，随机事件是样本空间的一个子集，由每个样本点构成的集合称为**基本事件**；由部分样本点构成的集合称为**复合事件**.

在随机试验中，每次试验必然发生的结果称为必然事件，记为 Ω，显然 Ω 就是样本空间. 每次试验不可能发生的结果称为不可能事件，记为 $\varnothing$，而 $\varnothing$ 为空集，它不含任何样本点.

在一次试验中，如果事件 A 中包含的某个样本点出现，那么称事件 A 发生，否则称事件 A 不发生.

【例 1】 掷一枚骰子，观察出现的点数. 设事件 A 表示"出现奇数点"，事件 B 表示"出现偶数点"，事件 C 表示"出现四点或四点以上". 试用集合写出其样本空间和事件 A，B，C.

解 样本空间为

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\};$$

事件

$$A=\{1,3,5\};$$
$$B=\{2,4,6\};$$
$$C=\{4,5,6\}.$$

【例 2】 观察某医院一昼夜内 120 接到的急救电话次数. 设事件 A 表示"至少接到一次急救电话"，事件 B 表示"接到的急救电话次数不超过 5 次"，试用集合写出其样本空间、事件 A 和事件 B.

解 样本空间为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}.$$

事件

$$A=\{1,2,3,\cdots\};$$
$$B=\{0,1,2,3,4,5\}.$$

1.2.2　事件的关系与运算

事件是一个集合，因此事件之间的关系与运算就是集合之间的关系与运算．下面我们用概率论的语言描述事件之间的关系与运算．

设 E 是试验，Ω 为 E 的样本空间，$A,B,A_k(k=1,2,3,\cdots)$ 都是事件．

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$，几何表示如图 1-1(a)所示．若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$．

2. 事件的和

“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”这一事件称为事件 A 与 B 的和事件，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$，$A\cup B$ 的几何表示如图 1-1(b)所示．

显然，对任一事件 A，有 $A\cup\Omega=\Omega,A\cup\varnothing=A$．

事件的和可以推广到有限多个事件与可列无限多个事件的情形．

$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生．

$\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生．

3. 事件的积

“事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件称为事件 A 与 B 的积事件，记作 $A\cap B$ 或 AB，即 $A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$，$A\cap B$ 的几何表示如图 1-1(c)所示．

显然，对任一事件 A，有 $A\cap\Omega=A,A\cap\varnothing=\varnothing$．

事件的积可以推广到有限多个事件与可列无限个事件的情形．

$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时都发生．

$\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots$ 同时都发生．

4. 事件的差

“事件 A 发生而 B 不发生”这一事件称为事件 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$（或 A/B），即 $A-B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$，几何表示如图 1-1(d)所示．

5. 互不相容关系

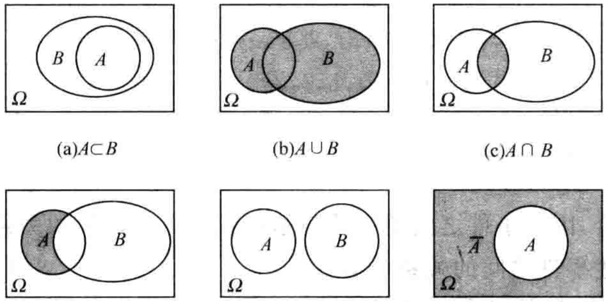
若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容（或互斥），几何表示如图 1-1(e)所示．

6. 对立事件

设 A 表示事件 A 发生，则 A 不发生称为事件 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$，几何表示如图 1-1(f)所示．显然 $A\cup\overline{A}=\Omega,A\cap\overline{A}=\varnothing,\overline{\overline{A}}=A$．

因此，对立事件一定是互不相容事件，但互不相容的两事件不一定是对立事件．

事件运算满足以下规律：



(a)$A\subset B$ (b)$A\cup B$ (c)$A\cap B$

(d)$A-B$ (e)$A\cap B=\varnothing$ (f)A与$\overline{A}$对立

图 1-1 事件的关系与运算图

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$

(2)结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3)分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4)对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

对偶律可推广到有限个事件或可列无限个事件.

【例 3】 设事件 A 表示“甲乙都成功”,则 $\overline{A}$ 表示什么?

解 若 B 表示“甲成功”,C 表示“乙成功”,则 $A=BC$,于是 $\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}$,即 $\overline{A}$ 表示“甲和乙至少有一个不成功”.

【例 4】 掷一枚骰子,设 A 表示“出现奇数点”,B 表示“出现的点数大于 3”,求 $A\cup B, AB, A-B, B-A, \overline{A}\cap\overline{B}$.

解 由题得

$$A=\{1,3,5\}, B=\{4,5,6\},$$

故

$$A\cup B=\{1,3,4,5,6\}, AB=\{5\}, A-B=\{1,3\},$$

$$B-A=\{4,6\}, \overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{2\}.$$

概率论中的事件与集合论中的集合以及他们的关系和运算一致,为了便于对照,现列表如下(表 1-1):

表 1-1 集合和事件的对应关系

符号	概率论	集合论
Ω	必然事件,样本空间	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	事件	集合
$\omega\in A$	事件 A 发生	ω 是 A 的元素
$A\subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与 B 相等	集合 A 与 B 相等

（续表）

符号	概率论	集合论
$A\cup B$	事件 A,B 至少有一个发生	集合 A 与 B 的并集
$A\cap B$	事件 A,B 同时发生	集合 A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	集合 A 与 B 的差集
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	集合 A 的补集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A,B 互不相容	集合 A 与 B 不相交

常用的运算关系有：

(1) $A\cup A=A, A\cap A=A, A\cup\Omega=\Omega, A\cap\Omega=A$.

(2) $A-A=\varnothing, A-B=A-AB=A\overline{B}(AB\subset B)$.

(3) $A=AB\cup A\overline{B}$，且 AB 与 $A\overline{B}$ 互不相容.

1.3　频率与概率的公理化定义

对于一个随机事件(必然事件和不可能事件除外)来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 在实际问题中我们常常希望知道某个事件或某些事件在一次试验中发生的可能性有多大.

例如，为了确定车辆的保险费，保险公司希望知道车辆发生交通事故的可能性大小. 我们希望用一个合适的数来描述事件在一次试验中发生的可能性大小，为此首先引入频率的概念.

1.3.1　频率与频率的稳定性

定义 1　设在相同的条件下，进行 n 次重复试验，设事件 A 在这 n 次试验中发生的次数为 n_A，则比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**，记为

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

事件 A 发生的频率反映了事件 A 在 n 次试验中发生的频繁程度，频率越大，表明事件 A 发生的可能性越大，且频率具有稳定性，即当试验次数 n 充分大时，频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定在某个常数附近，这个常数称为 $f_n(A)$ 的稳定中心.

【例 1】　考虑"掷硬币"试验，历史上，许多数学家都做过这一试验，若规定均匀硬币的某一面向上为事件 A 发生，有关数据如表 1-2 所示.

表 1-2　　**掷硬币试验数据表**

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
德・摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表1-2中不难发现：事件A在n次试验中发生的频率具有随机波动性，且当n较小时，随机波动的幅度较大；当n较大时，随机波动的幅度较小.随着n的增大，频率$f_n(A)$逐渐稳定于0.5附近，0.5就是频率$f_n(A)$的稳定中心.当n很大时，频率的稳定中心就是事件A发生的概率$P(A)$.本节是作为经验法则提出来的，它的理论证明将在第五章讲到.

频率的性质(设E为试验，Ω是试验E的样本空间，$A,B,A_k,k=1,2,\cdots,n$为事件)：

(1)$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2)$f_n(\Omega)=1$；

(3)若$A\cap B=\varnothing$，则$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

一般，若$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互斥，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n).$$

在实际问题中，我们不可能也没有必要对每个事件都做大量的试验，从中得到频率的稳定中心.为了便于理论研究，我们从频率的稳定性及频率的性质出发，给出概率的公理化定义.

1.3.2 概率的公理化定义

定义2 设E为随机试验，Ω是它的样本空间.对于E中的每一事件A，令其对应一个实数$P(A)$，如果$P(\cdot)$满足以下公理：

(1)非负性：$P(A)\geqslant 0$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性：若事件$A_1,A_2,\cdots$两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

那么称$P(A)$为事件A发生的**概率**.

以上公式被称为概率的公理化定义，是苏联数学家柯尔莫果洛夫在1933年提出的，由以上公理不难推出概率的以下性质.

1.3.3 概率的性质

性质1 (常理性)$P(\varnothing)=0$.

证明 因为$\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$，且$\varnothing$与$\varnothing$互不相容，由概率的可列可加性知

$$P(\varnothing)=P(\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

所以

$$P(\varnothing)=0.$$

性质2 (有限可加性)若事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容，则有

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证明 因为$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$，且右端各事件两两互不相容，由概率的可列可加性及$P(\varnothing)=0$，有

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3　对任意事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明　因为 $A \cup \overline{A}=\Omega$，且 A 与 $\overline{A}$ 互不相容，由性质 2 知
$$P(A)+P(\overline{A})=P(A \cup \overline{A})=P(\Omega)=1.$$
所以
$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 4　（可减性）设 A、B 为两事件，若 $A \subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$. 且 $P(A) \leqslant P(B)$.

证明　由 $A \subset B$，得 $B=A \cup (B-A)$，且 $A \cap (B-A)=\varnothing$. 由性质 2 可知
$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$
移项即得
$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$
又 $P(B-A) \geqslant 0$，故
$$P(A) \leqslant P(B).$$

性质 5　（加法公式）对于任意两事件 A 和 B，有
$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明　因为 $A \cup B=A \cup (B-AB)$，且 A 与 $B-AB$ 互不相容，所以有
$$P(A \cup B)=P(A \cup (B-AB))$$
$$=P(A)+P(B-AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB).$$

推论　设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为事件，则
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

【例 2】　已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，$P(A \cup B)=0.7$. 求 $P(AB)$，$P(\overline{A}B)$ 和 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解　由性质 5 可得
$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A \cup B)$$
$$=0.4+0.6-0.7=0.3;$$
$$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)\ (AB \subset B)$$
$$=0.6-0.3=0.3;$$
$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A \cup B})=1-P(A \cup B)=1-0.7=0.3.$$

【例 3】　据资料获悉某市居民私房拥有率为 63%，私车拥有率为 27%，而既无房也无车的占 30%，求任意抽查一户，恰为既有房又有车的概率.

解　设事件 A 表示“抽到的一户有房”，B 表示“抽到的一户有车”，则 AB 表示“抽到

的一户既有房又有车”.

由题设知 $P(A)=0.63$,$P(B)=0.27$,$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.3$,又

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B)&=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})\\
&=1-0.3=0.7.
\end{aligned}
$$

由性质 5 知

$$
\begin{aligned}
P(AB)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\
&=0.63+0.27-0.7=0.2.
\end{aligned}
$$

因此既有房又有车的概率为 0.2.

【例 4】 设 $P(A)=0.4$,$P(B)=0.5$,若事件 A 与 B 互斥,则 $P(A\cup B)=$________;若 $A\subset B$,则 $P(A\cup B)=$________.

分析 因为事件 A 与 B 互斥,所以有 $AB=\varnothing$.由加法公式知

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.5=0.9.$$

若 $A\subset B$,则

$$P(A\cup B)=P(B)=0.5.$$

1.4 古典概型

本节我们介绍一类简单而又特殊的随机试验模型,该试验模型在概率论发展的早期颇受关注,它就是本节要介绍的古典概型(等可能概型).

若试验具有以下两个特征:

(1)试验的样本空间包含有限个基本事件;

(2)试验中每个基本事件出现的可能性相同.

则称此试验为**古典概型**.

定义 在古典概型中,对于任意事件 A,其概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 中包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中包含的样本点总数}}=\frac{k}{n} \tag{1-1}$$

古典概型的概率满足概率的公理化定义的三条公理,且具有概率的一般性质.

【例 1】 袋中装有 10 个红球,5 个白球,从袋中随机地摸出 4 个球,求:

(1)摸出的 4 个球都是白球的概率;

(2)摸出的 4 个球正好 2 红 2 白的概率.

解 易知本题为古典概型.设 A 表示“摸出的 4 个球都是白球”,B 表示“摸出的 4 个球正好 2 红 2 白”.

(1)Ω 中包含的样本点总数为 C_{15}^4,A 中包含样本点数为 C_5^4,因此

$$P(A)=\frac{C_5^4}{C_{15}^4}=\frac{1}{273}.$$

(2)Ω 中包含的样本点总数为 C_{15}^4,B 中包含样本点数为 $C_{10}^2C_5^2$.因此

$$P(B)=\frac{C_{10}^2C_5^2}{C_{15}^4}=\frac{30}{91}.$$

【例 2】 设有批量为 100 的同型号产品，其中有 40 件为一等品，60 件为二等品，现从中随机抽取 2 件. 求在下列两种方式下两次均取得一等品的概率. (1)有放回；(2)无放回.

解 设 A 表示"两次均取得一等品"，

(1)有放回情形

在两次抽取中每次抽取都有 100 种可能结果，Ω 中包含的样本点总数为 $100\times100=10\ 000$，事件 A 中包含的样本点数为 $40\times40=1\ 600$，因此

$$P(A)=\frac{40^2}{100^2}=0.16.$$

(2)无放回情形

此时第一次抽取有 100 种可能结果，而第二次抽取只有 99 种可能结果，因而 Ω 中包含的样本点总数为 100×99，A 中包含的样本点数为 40×39. 因此

$$P(A)=\frac{40\times39}{100\times99}=\frac{26}{165}.$$

【例 3】 某市的电话号码为八位数，且第一位为 6. 随机抽取一电话号码，求：(1)后四位的数字不重复的概率；(2)末位为 0 的概率；(3)0 恰好出现两次的概率.

解 易知本题为古典概型，Ω 中包含的样本点总数为 10^7.

(1)设 A 表示"抽取的电话号码后四位数字不重复".

A 中包含的样本点数为：$\mathrm{A}_{10}^4\cdot10^3$.

因此

$$P(A)=\frac{\mathrm{A}_{10}^4\cdot10^3}{10^7}=\frac{63}{125}.$$

(2)设 B 表示"抽取的电话号码末位数字为零".

B 中包含的样本点数为：10^6.

因此

$$P(B)=\frac{10^6}{10^7}=\frac{1}{10}.$$

(3)设 C 表示"抽取的电话号码 0 恰好出现两次".

C 中包含的样本点数为：$\mathrm{C}_7^2\cdot9^5$.

因此

$$P(C)=\frac{\mathrm{C}_7^2\cdot9^5}{10^7}=\frac{1\ 240\ 029}{10^7}.$$

【例 4】 把十本不同的书任意摆在书架上，求其中指定的三本书摆在一起的概率.

解 易知本题为古典概型. 设 A 表示"指定的三本书摆在一起". 则 Ω 中包含的样本点总数为：$10!$，A 中包含的样本点数为：$\mathrm{C}_8^1 7!\ 3!$.

因此

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_8^1 7!\ 3!}{10!}=\frac{1}{15}.$$

***【例 5】** (抽奖问题)设有 n 张奖券. 其中只有 1 张有奖，每位顾客抽 1 张，抽过的不再放回，求第 k 位顾客中奖的概率($k=1,2,\cdots,n$).