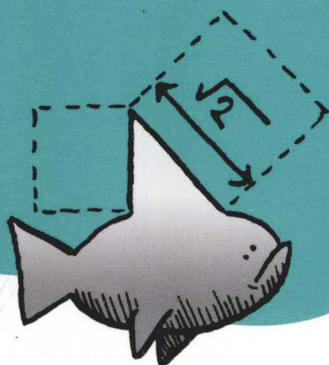


孟天——译





孟 天——译

图书在版编目(CIP)数据

数学世界漫游记 / (英)贝洛斯 (Bellos, A.) 著; 孟天译. —南京: 译林出版社, 2015.6

书名原文: Alex's adventures in numberland

ISBN 978-7-5447-5222-0

I. ①数… II. ①贝… ②孟… III. ①数学-普及读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字 (2014) 第313606号

Alex's Adventures in Numberland by Alex Bellos

Copyright © 2010 by Alex Bellos

Published by arrangement with Alex Bellos Ltd c/o Janklow & Nesbit (UK) Limited
through Bardon-Chinese Media Agency

All rights reserved including the rights of reproduction in whole or in part in any form.

Simplified Chinese translation copyright © 2015 by Yilin Press, Ltd.

著作权合同登记号 图字: 10-2011-308号

书 名	数学世界漫游记
作 者	[英国] 艾利克斯·贝洛斯
译 者	孟 天
责任编辑	宋 旸
原文出版	Bloomsbury
出版发行	凤凰出版传媒股份有限公司 译林出版社
出版社地址	南京市湖南路1号A楼, 邮编: 210009
电子邮箱	yilin@yilin.com
出版社网址	http://www.yilin.com
经 销	凤凰出版传媒股份有限公司
印 刷	江苏苏中印刷有限公司
开 本	718毫米×1000毫米 1/32
印 张	23.75
插 页	7
字 数	363千
版 次	2015年6月第1版 2015年6月第1次印刷
书 号	ISBN 978-7-5447-5222-0
定 价	48.00元

译林版图书若有印装错误可向出版社调换
(电话: 025-83658316)

序 言

1992年的夏天，我在布莱顿的《阿耳戈斯晚报》工作，是一名初出茅庐的记者。在那些日子里，我的任务是旁听有犯罪前科的青少年接受地方法院审讯，采访商家对经济衰退的看法，以及每周两次为报纸的信息目录页更新布卢贝尔铁路^①的开放时间。如果你是小偷或商家，那并不是一段美好的时光，可是对于我，这却是人生中快乐的篇章。

那时，约翰·梅杰^②刚刚再次当选首相。取得胜利后不久，他就颁布了任期内最令人难忘（也最遭人奚落）的一项政策举措。梅杰抱着政府首脑的严肃态度宣布要建立一条电话热线，供人们查询交通路锥的相关信息——这是一项无聊的提议，却被吹嘘得好像全世界的未来都系于此举。

不过，在布莱顿，交通路锥倒是个大新闻。驾车入城，你都不可能不碰上道路施工。从克劳利到普雷斯顿公园，这条自伦敦前往布莱顿的主要路线（A23公路）沿途摆布满了条纹图案的橙色路锥，堪称一条路锥长廊。《阿耳戈斯报》对首相的提议大肆挖苦，并向读者发起挑战，看谁能够猜出A23公路全程一个共放置了多少个路锥。高级编辑们为自己想出了如此精彩的点子而洋洋自得。这个充满乡村节日气息的竞猜活动不仅报道了新闻事件，还调侃了中央政府：多么完美的地方小报内容！

① Bluebell Railway，沿英格兰东西苏塞克斯分界的一条遗产铁路，全长约17.7公里，搭载蒸汽火车。

② 约翰·梅杰（John Major，1943—），保守党派，1990年接替撒切尔夫人当选英国首相，1992年再次当选，任期至1997年。

然而，竞猜才刚开始几个小时，报社便收到了第一份参赛答案，并且这位读者一下就猜中了路锥的正确数目。我记得那些高级编辑泄气地坐在新闻编辑室中一言不发，仿佛有本地重要议员刚刚过世一般。他们本来打算嘲弄一下现任首相，结果却发现自己弄得像傻子一样。

编辑们认为，猜出这条长达 20 多公里的高速公路上的路锥数量是不可能完成的任务。但是很明显，事实并非如此，而且我认为自己可能是报社所在那栋建筑物中唯一一个知道原因的人。假设这些路锥以同样的间隔放置，那么你所要做的不过是做个算术：

$$\text{路锥数量} = \text{道路长度} \div \text{路锥间的距离}$$

测量道路长度可以通过实地驾驶也可以阅读地图，而要计算路锥间的距离，你只需要一把卷尺。尽管路锥间的距离会有所偏差，估计的道路长度也存在一定误差，但是在很长的距离中，该公式计算所得结果的精确度已足以赢得地方报纸上的竞猜（或许交警在向报社提供正确答案之前也正是用这种方法来清点路锥数量的）。

我很清楚地记得这件事情，因为这是我在记者生涯中第一次意识到具备数学思维的价值所在。想到绝大多数的记者都不擅长与数字打交道，我不禁感到有些担忧。找出公路上放有多少个路锥并不是多么复杂的事情，但是对于我的同事们来讲，这道算术却是高不可及。

在那之前两年，我刚从数学与哲学专业毕业，这个学位一只脚在科学领域，另一只脚则踏在了人文学科领域。选择新闻行业意味着下定决心抛弃前者，投身后者，至少从表面上看是这样。在路锥竞猜遭遇滑铁卢后不久，我便离开了《阿耳戈斯报》，转投伦敦的报社。最终，我成为了驻里约热内卢的海外通讯记者。有时，我的数字才能挺有帮助，比如找出一个面积与最近惨遭砍伐的亚马逊丛林最为接近的欧洲国家，或是计算各类货币危机中汇率的变化。但其实我很清楚，数学早已被自己抛之脑后。

几年前，我回到英国，完全不知道接下来要做什么。我卖过巴西足球运动员的 T 恤，开过博客，也打过进口热带水果的主意，然而最终一事无成。在回顾和反思之中，我再度发现了这个曾在年少之时折磨我良久的主题。那一刻，我找到了

灵感的火花，并因此写了这本书。

成人进入数学世界的方式与孩童大不相同。要求考试合格意味着往往错过真正有意思的内容。现在，我能自由地漫步于各条大道，只因为它们听上去非常奇特有趣。我学习“民族数学”，研究不同文化如何解决数学问题，探究宗教如何塑造数学。行为心理学和神经科学的最新成果令我着迷，它们共同还原出大脑想起数字的原因与方法。

我意识到，自己的行为就像执行任务的海外通讯记者，只不过我前往的是一个抽象的国度——数字王国。

我的旅途很快与地理学发生了关联，因为我想体验数学在真实世界的应用。于是，我飞到了印度，想要了解这个国度如何发明出“零”这个人类历史上最伟大的智力突破之一。在美国里诺，我预约进入了大型赌场，亲眼见证概率的发生。在日本，我见到了世界上数学能力最好的黑猩猩。

随着研究的开展，我发现自己处于一个奇怪的位置：既是专家又是业余人士。在学校重新学习数学就像再会老友，只是彼时彼处会遇见许多从前不曾见过的朋友之友，而现在也有不少新面孔涌现出来。举几个例子，在我写这本书之前，我并不知道数百年来人们曾经多次想在十进制体系中引入两个新的数字。我也不知道为什么大不列颠会是第一个铸造七边形硬币的国家。同样，对于数独背后的数学原理，我也自觉一窍不通（因为在那个时候，这个游戏还没有被发明出来）。

我受指引行至意外之境，像是埃塞克斯郡的布雷茵特里镇，或美国亚利桑那州的斯克茨代尔市；也会被带到图书馆中一些意想不到的书架面前。我记得自己曾经花费一整天阅读一本关于环绕植物开展仪式的历史书籍，只为弄懂为什么人们说毕达哥拉斯是一位臭名昭著的挑剔食客。

本书始于零章，因为我想要强调这里讨论的是前数学主题。第零章讨论的是数字的出现。在第一章之初，数字已经诞生，这样我们才能进入正题。从这里开始到第十一章的结尾，本书涉及了算数、代数、几何、统计和其他许多领域，我把这些内容压缩进了四百多页纸中。与此同时，我还试图将专业内容缩减到最小，但有时依然无法避免，只好拼出方程式并加以证明。如果你感到大脑疼痛，可以跳过，并从下一节开始，这样事情就会变得简单多了。本书独立成章，也就是说，要理解某一章的内容，你无须读完前面所有章节。你可以以任何顺序阅读，但我还是推荐从头到尾按顺序读完，因为它们大致还是按照观点的时间顺序组织起来

的,并且有时我会提及前面提到过的观点。本书的目标读者是缺乏数学知识的人群,内容囊括了从小学水平的数学问题到本科毕业时所能学到的数学概念。

在书中,我多多少少涉及了一些历史材料,因为数学也包含数学史。数学不会变老,这不同于人文学科或应用科学,前者总是处于永恒的再发明状态,用新的观点或思潮替代从前那些旧的,而在后者的领域中,理论总是持续不断地得以提炼。无论是在过去还是现在,欧几里德和毕达哥拉斯的定理都是适用的——这也说明了为什么他们会是学校教材中最古老的几个名字。普通中等教育证书教学大纲几乎不包含 17 世纪中期以后的数学内容;同样,高中课程也没有超出 18 世纪的范围。(在我的本科学习中,最现代的数学知识来自于 20 世纪 20 年代。)

在写作此书时,我的动机始终是要传达数学发现的激动和兴奋。(同时,我也想展示数学家是有趣的。我们是逻辑之王,这种说法本身的非逻辑性令我们的辨识度极高。)数学被认作是枯燥晦涩的,通常事实也的确如此,但数学同样也是启发思维的,能够为人们所领会,并拥有杰出的创造性。抽象数学思维是人类的伟大成就之一,称得上是所有人类进步的基础。

数学王国不可思议,我推荐你到此一游。

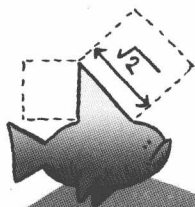
艾利克斯·贝洛斯

2010 年 1 月

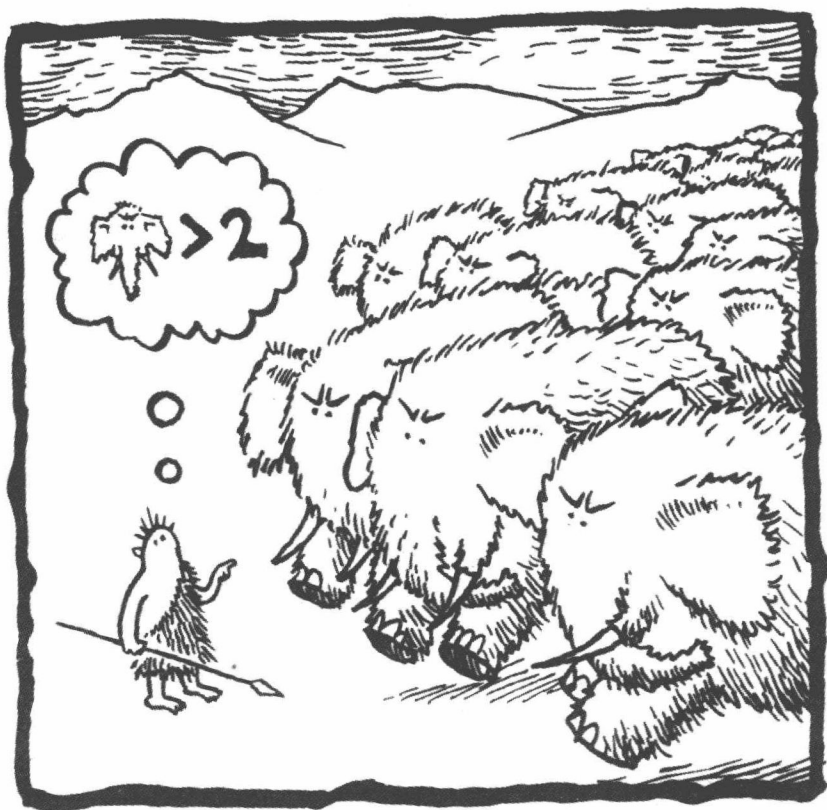
(杨逸 译)

目 录

序言	001
第〇章 数字之前	003
第一章 对立的文化	029
第二章 瞧!	059
第三章 “无”中生“有”	091
第四章 π 的“奇幻漂流”	119
第五章 未知数	149
第六章 游戏时间	179
第七章 连续的秘密	217
第八章 金手指	243



第九章 概率是好东西	262
第十章 日常情况	302
第十一章 线的终点	330
词汇表	353
附录	356
注释	362



第〇章

数字之前

走进皮埃尔·皮克巴黎狭窄的公寓，我怔住了，臭气熏天的驱蚊器，让我受不了。皮克刚刚从亚马逊热带雨林回来，在那里，他和印第安部落的朋友相处了五个月之久。现在，他正在给带回来的礼物消毒。书房的墙上，随处可见远古的部落面具、长毛头饰^①和花边竹篮。书架上堆满了专业学术的书籍。窗台上放着一个还没有解开的魔方。

我问，皮克，旅行如何？

“艰难。”他回答道。

皮克是一个语言学家。可能正是因为这一点，他说话时总是慢条斯理，过度咬文嚼字。虽然，他已经五十多岁，看上去还是很孩子气，他有一双明亮的蓝色眼睛，面色红润，有着一头柔软却凌乱的银发。他声音低沉，态度很热情。

师从美国杰出语言学家乔姆斯基，皮克现在为 ASU 法国国家科学研究中心工作。近十年来，他一直潜心研究蒙杜鲁库人。蒙杜鲁库人是南美洲印第安人的一支，一共约七千人，他们生活在亚马逊河流域，在巴西境内。他们所聚居的地方是雨林地区，面积为威尔士国土面积的两倍。蒙杜鲁库人聚居在绵延的小村落里，依靠狩猎和采集生活。皮克对蒙杜鲁库人的语言特别感兴趣。蒙杜鲁库人的语言没有时态，没有复数名词，也没有超过“5”的数字。为了实地考察，皮克开始了一段旅程，堪称一次伟大的探险。距离印第安部落最近的机场在 500 英里外的圣

^① 用鹰的羽毛做成美国印第安人打仗时戴的头饰。——译注

塔伦。从那里沿塔巴赫斯河航行 15 小时,大约 200 英里,才能到达蒙杜鲁库。这里是曾经让淘金者疯狂的小镇,也是皮克旅程的最后补给站。上一次,他在蒙杜鲁库租了一辆吉普车,带上必备的电脑、太阳能板、电池、书籍,还有 120 加仑汽油,沿着横贯亚马逊的高速路行驶。这条公路是 70 年代修筑的国道,非常华而不实,现在已经十分衰败,变成了一条不好走的泥泞小道。

皮克此行的目的地是杰可瑞卡加,那里距蒙杜鲁库有 200 多英里。我问他,开车去那要多久。“说不准,”皮克耸耸肩,说道,“可能要一辈子,也可能只要两三天。”

“那这次呢?”我追问道。

“你知道,你永远无法了解具体的时间,因为每次都不一样。如果一切顺利……在雨季,应该差不多十到十二小时吧。”

杰可瑞卡加位于蒙杜鲁库人群居区域的边缘地带。皮克在那等待印第安人,和他们协商是否可以用独木舟载他进入蒙杜鲁库人的领地。

我十分好奇,又询问道:“你等了多久?”

“我等了挺久的。不过还是一样,别问我具体多久。”

“所以你花了好几天时间?”我试探地询问道。

他皱了皱眉,迟疑片刻说道:“大概,两个星期吧。”

离开巴黎一个多月后,皮克终于到达了目的地。当然,我也很想知道,从杰可瑞卡加到那些印第安人的村落具体需要花费多少时间。

不过,皮克现在显然对我查户口式的提问很不耐烦:“我说过了,说不准!”

我执著地问:“那这次呢?”

他吞吞吐吐的回答:“我不知道呀。我想……可能……两天……一天一夜……”

我越是追问皮克具体的数字,他越是不情愿告诉我。我开始激动起来,不明白他极不情愿的态度是否潜藏着法国人特有的不妥协精神,或者说是一种学术的严谨性,要不只是一般的逆反心理。我不再询问,我们开始说点别的。几个小时之后,我们都谈到了一种感觉,那就像待在一个不明之地很长时间,突然回到家一样,忽然,皮克打开了话匣子:“当我从亚马逊回来的时候,我好像没有时间和数字的概念,甚至没有空间的感觉。”他说,回来之后他经常忘记各种约定,还会被简单的方向问题搞得晕头转向。“我很难再适应巴黎的生活了,城市中有各种转

角和直线，都让我难以适应。”皮克的叙述中没有任何定量的数据，他所产生的困扰一部分来自不同文化的冲击。在原始部落中，他长期和一些不会数数的人待在一起，使得他已经不能用数字来思考大千世界的万物。

虽然没有人知道确切的答案，但是，数字的存在不超过一万年的时间。这里，我所说的数字是关于数字的术语和符号。曾有理论认为，数字诞生于农业和通商，数字是通商中盘点货物所必须的工具，数字可以确保在买卖中不上当受骗。蒙杜鲁库的人都是自给自足的农民，几个村子刚刚开始流通货币，所以他们根本不会计算。而关于巴布亚新几内亚的土著部落，人们普遍认为数字的出现源于复杂的礼物交换传统。相对来说，亚马逊地区没有这样的传统习俗。千百万年前，早在数字出现的时期，我们的祖先早就有了“数”的概念，早已能够辨认出“一头猛犸象”和“两头猛犸象”的区别，也能意识到“一夜”和“两夜”的差别。有头脑的劳动者们已经逾越了认知两个具体事物的能力，并发明了一种符号或术语来指代抽象概念“2”，但这是需要很多年才能产生的结果。事实上，这正发生在亚马逊地区的某些地方。在这些部落里，只有为数不多的几个数字名词，比如“1”，“2”和“许多”。对于蒙杜鲁库人来说，能数到5就已经算是相对比较复杂的数字了。

在我们的日常生活中，数字无处不在，很难想象如果没有数字的存在，人们如何解决生活中的各种问题。然而，当皮埃尔·皮克来到蒙杜鲁库时，他轻易而又不知不觉地进入一种“无数字”的生存状态。晚上，他睡在吊床上，平时去打猎，每餐的食物是獾、犰狳、野猪。晴天的时候，他可以通过辨认太阳的位置测算时间。如果下雨，他就待在屋子里，晴天他就出门。所以，过着这样的生活，他根本不需要任何数字。

我仍然觉得很奇怪，为什么在亚马逊地区的人的日常生活中没有出现大于5的数字。我问皮克，为什么印第安人会“六条鱼”。比如说，某个人为六个人准备一顿饭，而且准备食物的人希望每个人都可以吃到一条鱼。

“这是不可能的，”皮克说，“在他们的生活中，根本就没‘我想为六个人准备鱼’这句话。”

那么，如果你问一个有六个孩子的蒙杜鲁库人“你有几个孩子”呢？

皮克的回答如出一辙：“他会说‘我不知道’。因为，他们根本就不知道如何表达。”

然而，皮克补充道，你的问题和文化相关。你可能想象这样一种场景：蒙杜鲁库人点着自己的孩子说，这是第一个，那是第二个，第三个，第四个，第五个，然后挠挠头，因为他不知道如何继续数下去。但是，这种事根本就不会发生。对于蒙杜鲁库人，数孩子这件事本身就很可笑。事实上，计数的观念对于他们来说，相当荒唐。

皮克感到疑惑，反问我，为什么蒙杜鲁库人要数自己的孩子呢？他说，孩子们都由部落群体里的成年人照顾，没有人会分辨哪个孩子是自己的。他将这种情形比作一句法语“我们来自一个大家庭”。“当我说‘我有一个大家庭’的时候，就是告诉你，我不知道具体的家庭成员，也不知道我或别人的家庭成员应该从哪开始算起，完全不知道，没有人对此深究过，没人告诉我具体数字。”同样的，你问一个蒙杜鲁库人，你负责照顾多少个孩子？其实，这个问题也没有准确的答案。“他会说‘我不知道’，事实上就是这样。”

在历史长河中，蒙杜鲁库并不是唯一一个不计算部落人数的群体。当大卫国王试图计算他的臣民的时候，整个国家遭受了三天的瘟疫，死亡人数达到七万七千多。而犹太人则用一种间接的方式计算犹太人的数量。这就是为什么在犹太会堂中，必须会有十个人组成的祈祷班，念十个字的祈祷词，按顺序每个人算一个祈祷字，用这种方式计算参加祈祷的人数。计算人数被认为是一种将人孤立起来的方法，这样个体更易受到来自外界不良的影响。如果你询问一个正统的拉比“有几个孩子”，你差不多会得到和蒙杜鲁库人一样的回答。

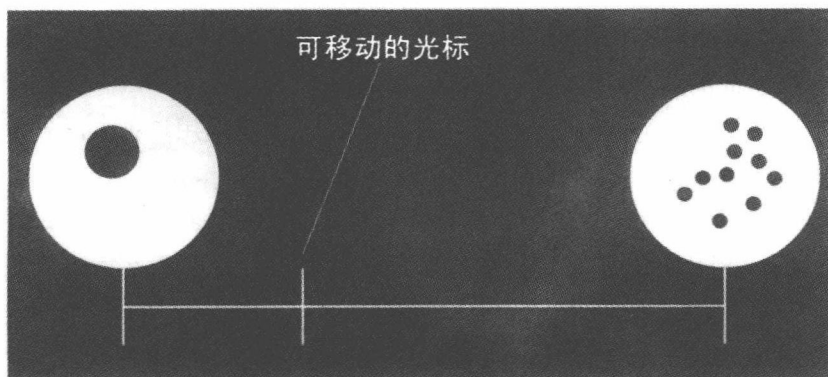
我曾有机会和一个巴西教师交谈，她曾经在土著社区中工作过很长时间。她说印第安人觉得被外族不停地询问“有多少孩子”，对于他们来说是一种特别不愿意回答的问题，尽管有时候到访者只是随便问问，表示礼貌而已。她说，这种问题让印第安人感到很疑虑，询问孩子的数目到底有什么目的呢？

蒙杜鲁库人第一次出现在文字记载中是在1768年，当时有一个殖民者在河岸边看到了几个蒙杜鲁库人。一百多年后，圣方济各会的传道士们在蒙杜鲁库的土地上建立了一个基地。在19世纪末的时候，当地的橡胶产业十分兴盛，当橡胶锥遍布蒙杜鲁库地区的时候，外界和蒙杜鲁库人的交流也越来越多。大多数蒙杜鲁库人仍然过着一种相对与世隔绝的生活，但像很多别的印第安人的部落一样，他们和外界长期联系，渐渐地开始穿着西方的服饰，比如：T恤衫和短裤。显而易见，很多现代生活中的物质慢慢地进入他们的生活中，比如：电和电视机。当然，其中

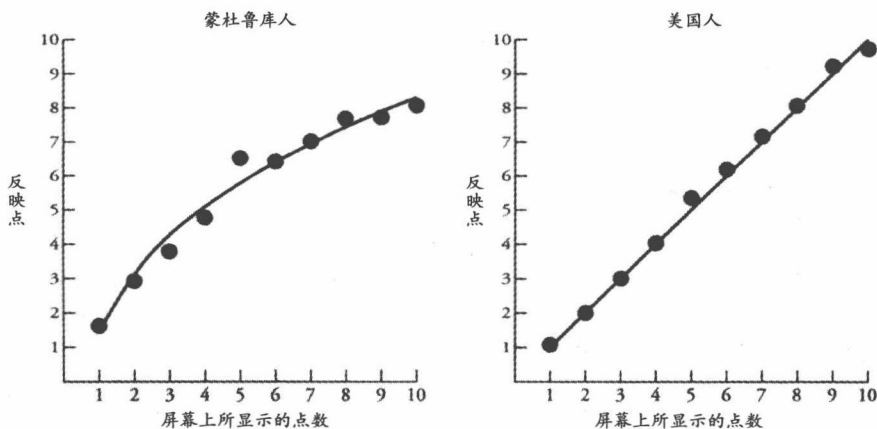
也有数字。事实上，一些蒙杜鲁库人住在他们领地的边缘地带，已经学会了巴西的国语葡萄牙语，能够用葡萄牙语计数。“他们可以数‘一、二、三’，一直到上百呢，”皮克说，“然后你问他‘顺便问问五减三是多少？’。”他滑稽地耸耸肩。他们根本就不知道答案。

在热带雨林里，皮克用太阳能充电的手提电脑开展研究。由于温度和湿度的因素，保护设备硬件往往是件很头痛的事，但是，有时最大的挑战却是如何将参加研究的土著人聚集起来。有一次，一个村落的首领要求皮克生吞下一只又大又红的南美蚂蚁，之后才允许他采访一个部落里的孩子。当时，这位学术上极其勤奋的语言学家一脸苦相，嚼了嚼，便把蚂蚁给吞了下去。

世界上有一群人，他们的算术能力不超过数自己一只手的手指。研究这群人的目的就是发现人类原始的“数的直觉”。皮克想通过研究了解到底哪些是人类共有的，哪些是通过文化塑造而形成的。他的所有试验中，最为有趣的一个是研究印第安人对数学空间的理解。当数字分布在一条直线上，他们是如何想象这些数字和线条呢？在现代文明世界里，我们常常用到——卷尺、直尺、图表，以及一条街道上的一座座房屋。既然蒙杜鲁库人没有数的概念，皮克用一个一个小圆点放在屏幕上，代替数字使用。每个志愿者都能看到标有数字的背面，也就是一条没有数字标识的直线。在线的左端有一个圆点，右端有十个圆点。然后，研究者在一到十的圆点中随机选择，每个参加测试的志愿者根据所设定的点数，在直线上指出具体的位置。如果他认为应该落在直线上某个点，皮克就移动光标，点击这个点，记录下来。经过多次点击后，皮克发现了蒙杜鲁库分隔一到十的数字的规律。



皮克在美国做了同样的实验,参加测试的成年人将给出的点数均匀地分布在直线上。他们再现了我们在学校里所学的实数直线。在实数直线上,相邻的数字之间距离均等,就像被尺子量过了一样。然而,蒙杜鲁库人对实验的反应却大相径庭。他们认为,刚开始数字之间的距离较大,随着数字的递增,数字间的距离逐渐变小。比如,1个点数和2个点数之间、2个点数和3个点数之间的距离,比7个点数和8个点数之间、8个点数和9个点数之间的距离大得多。我们可以很清晰地看到以下两个图示的区别。



我们发现,两次实验的结果完全不同。现在普遍认同一个真理:数字是均匀分布的。我们在学校里学的就是这样,所以,我们很容易地接受了这个事实,这是一切测量和科学的基础。但是,蒙杜鲁库人却不这样看待事物。没有计数和数学专业词汇的帮助,他们从完全不同的角度认识“数”。

当数字均匀地分布在一把尺子上时,所反映出来的刻度是线性的。随着数字的递增,数字间的间距变小,所反映出来的刻度是对数形式的^①。研究者发现,不只是亚马逊地区的印第安人运用对数的方法,我们生来就是用这种方法思考数字的。2004年,罗伯特西格勒和朱莉布思在宾夕法尼亚州的卡内基梅隆大学,给一组学生做了同样的数字一线的试验,参加测试的学生来自幼儿园(平均年龄5.8岁)、一年级(平均年龄6.9岁)、二年级(平均年龄7.8岁)。试验结果展示了在现代文明中掌握计数影响人类的直觉发展的缓慢过程。幼儿园的学生没有接受过

① 事实上,在对数的刻度上,随着数字的递增,数字间的间距会变近。更详细的讨论,请看第189页。——原注(本书注释若无特别说明,均为原注。)