GUAN ZHITANG 觀止堂 观止堂考点破解系列

中考数学

考点破解

【压轴题万能套路】

章一心 庞晓亮 李艳梅/著

▶ 探索压轴题命题原理和研究方法，传授解题万能套路，让考生不仅会解题更会出题。

▶ 实用、操作性强的解题工具展示，轻松解决大量繁琐计算，快速准确拿分。

▶ 注重思维发散和研究性学习，讨论探究形式，引导学生发现规律、掌握解题万能套路。

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

GUAN ZHITANG 觀止堂

观止堂考点破解系列

中考数学考点破解

【压轴题万能套路】

章一心 庞晓亮 李艳梅/著

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

中考数学考点破解（压轴题万能套路）/ 章一心，庞晓亮，李艳梅著.
—北京：中国经济出版社，2014.5
ISBN 978-7-5136-3038-2
Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①章… ②庞… ③李… Ⅲ. ①中学数学课—初中—题解—升学参考资料 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 001291 号

责任编辑 陈 骝
责任审读 霍宏涛
责任印制 马小宾
封面设计 任燕飞工作室

出版发行 中国经济出版社
印 刷 者 三河市佳星印装有限公司
经 销 者 各地新华书店
开 本 880mm×1230mm 1/16
印 张 13.25
字 数 409 千字
版 次 2014 年 5 月第 1 版
印 次 2014 年 5 月第 1 次
书 号 ISBN 978-7-5136-3038-2
定 价 35.00 元

中国经济出版社 **网址** www.economyph.com **社址** 北京市西城区百万庄北街 3 号 **邮编** 100037
本版图书如存有印装质量问题，请与本社发行中心联系调换（联系电话：010－68319116）

前　言

2015 年第一版

近年来，北京市中考数学试题产生了巨大的变化，北京中考数学卷的难度几乎是全国最大的。特别是试卷中最后三道压轴大题，命题人要求考生在掌握扎实基本功的前提下，进一步掌握许多巧妙灵活解题方法，理解某些较为高深的数学背景，并具有自主提出问题、研究问题并解决问题的能力；同时，许多难度不大的试题，也具有相当的计算量，来考验考生的计算能力，锻炼考生不怕困难的坚韧意志，以更好地适应高中的学习。这使得靠“题海战术”，甚至“押题”的考生摸不着头脑：“几何凭运气”、“代数靠死算”是许多初三考生，甚至成绩优秀，竞赛获奖的考生做中考数学试题的感受。许多考生甚至在练习压轴题时感觉“许多公式和方法没见过”、“许多内容课本上没有”、“看不懂答案”……，这些严重打击了考生的自信心，影响了考生学习数学的积极性。

实际上，北京中考试题的最后三道压轴题有着较为明显的命题和解题规律。本书第一章由章一心编写，介绍了平面几何试题（即北京中考第 24 或 25 题）的命题原理和研究方法、中考几何试题的原型与演变以及考生关心的平面几何试题的解题套路；本书第二章由李艳梅编写，介绍了函数综合题（即北京中考第 23 题）的万能解题套路；本书的第三章由庞晓亮和章一心编写，主要介绍了坐标系内的代数几何综合题（即中考第 25 题或 24 题）的万能解题套路；第四章由李艳梅编写，附录了十套模拟题，并附录详细的解题过程。

总的来说，本书对考生迅速、充分准备中考数学具有很强的实用价值：

亮点一：注重通性通法的探索

授人以鱼不如授人以渔，本书每个章节都不满足于只解决问题，更注重解题通性通法的探索，即使是解题方法和规律很难提炼的平面几何章节，都注重具有普遍性的解题方法和解题套路的探索和总结，使考生在考试中“有抓手”，“有牌可打”。

亮点二：注重思维的发散和研究性学习

本书不满足于只解决问题的另一个表现是注重考生研究数学问题的能力的培养。本书的许多例题源于中考，又高于中考。本书在解答完许多中考或“一模”和“二模”试题之后，又对这些试题的结论进行推广延伸或举一反三，来进一步建立和培养考生发散思维的能力，做到“永远比别人多想一步”。

亮点三:实用性和操作性强

本书的编写团队成员多年奋战在北京中考教学的第一线，更多地考虑了考生参加中考的实际情况，为考生提供了许多区别于参考答案的解法，这些解法更简洁，更符合通性通法，更有利于考生降低计算量或降低运算的复杂程度，以达到提高正确率和得分率的效果。

由于时间仓促，作者水平有限，虽经反复修改，但书中仍难免有不足和疏漏之处，欢迎广大读者批评指正。

2014 年 3 月

目　　录

第一章　平面几何压轴大题

在中考数学中，平面几何压轴大题（一般为第 24 或第 25 题）是让考生感觉比较头疼的一道题. 历年来，许多在本题上得满分的考生都说，这道题得靠“感觉”才行，就连许多数学老师都说这道题的辅助线只能靠“试”，只能靠“凑”，再加点“感觉”才行. 果真如此？其实不然！实际上，平面几何有它独特的、区别于代数的研究方法，只要我们掌握了正确的研究方法，考试不仅不用靠“猜”，还能让平面几何大题变成中考三道压轴题中最简单的一道题！

第一节　平面几何大题命题原理

经研究发现，所有的中考平面几何题都是命题人根据课本习题或考生熟悉的习题根据一定的原理改编的，改编试题的原理恰是平面几何研究的四个重要原理中的两个：

一、平面几何图形的连续不变性

几何图形的某些性质，当这个图形（的位置、大小、形状等）发生连续变化时保持不变. 这时，相关命题仍然成立.

该原理是指：当图形发生连续变化时（如点在某条直线上连续运动，某个图形形绕一个定点旋转等），虽然最终结论会发生改变，但体现图形本质的结论不发生改变.

例如，E、F、G、H 分别为四边形 $ABCD$ 的四边中点，证明：四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

上述问题的证明很简单，只要连结 AC，利用中位线定理，那么 EH 和 FG 都平行且等于 AC，于是 EF 平行等于 FG，四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

固定点 A、B、C 的位置，将点 D 在平面上连续运动，如图 1－1(1)—(6) 所示，可以发现当 D 在平面上任意运动时，四边形 $EFGH$ 总为平行四边形，且都可以通过证明 EH 和 FG 都平行且等于 AC 得到. 这就是几何图形的连续不变性，这里，体现图形本质的结论就是 EH 和 FG 都平行且等于 AC.

命题人就是通过这种方法，以考生熟悉的习题为原型，利用连续不变性将图形进行变换，就成了复杂的中考题.

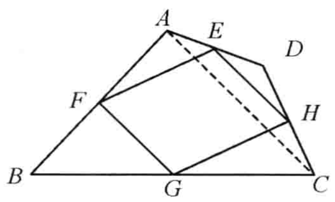

图 1—1(1)

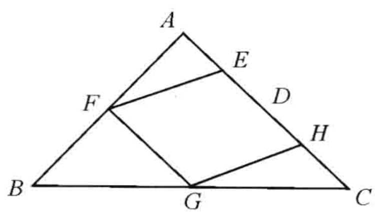

图 1—1(2)

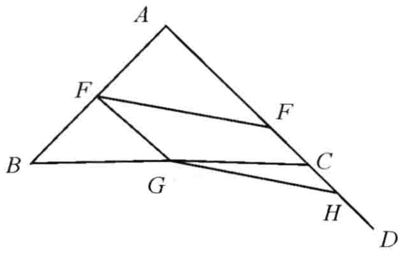

图 1—1(3)

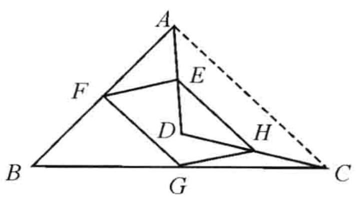

图 1—1(4)

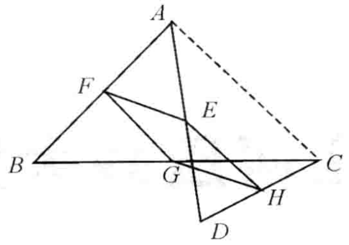

图 1—1(5)

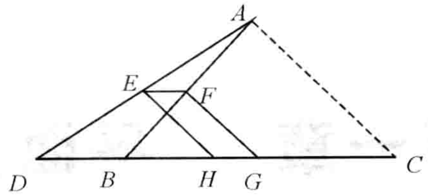

图 1—1(6)

二、普遍化条件

命题人将某些简单几何问题的条件一般化，就能将简单的几何问题推广或改编为复杂的几何问题.

例如，如图 1－2(1)，E 是正方形 $ABCD$ 的 BC 边上的任意一点，$AE \perp EF$ 且 $AE = EF$，证明：CF 平分 $\angle DCK$.

这是一道很常见的习题，解题方法是在 AB 上取 $BE = BG$，结合 $AB = BC$，则 $AG = CE$；利用 $AE \perp EF$ 和等腰 $Rt\triangle BGE$，可得 $\angle FEC = \angle EAG$，那么利用$\begin{cases} AE = EF \\ \angle FEC = \angle EAG \\ AG = CE \end{cases}$可得 $\triangle AGE \cong \triangle BCF$，所以 $\angle FCE = \angle AGE = 135°$，进而得：$\angle FCK = \angle DCF = 45°$，$CF$ 平分 $\angle DCK$.

在上述问题中，正方形 $ABCD$ 可以看成为正四边形，$\angle AEF$ 的度数可以看成正四边形 $ABCD$ 的内角度数，如图 1－2(2) 至 1－2(4)，可以将正方形 $ABCD$ 变换为正三角形、正六边形、正 n 边形，本题可变换为：

(1) 在正 $\triangle ABC$ 中，E 为 BC 上任意一点，$\angle AEF = 60°$ 且 $AE = EF$，证明：CF 平分 $\angle ACK$.

(2) 在正六边形中，E 为 BC 上任意一点，$\angle AEF = 120°$ 且 $AE = EF$，证明：CF 平分 $\angle DCK$.

(3) 在正 n 边形中，E 为 BC 上任意一点，$\angle AEF = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ 且 $AE = EF$，证明：CF 平分 $\angle DCK$.

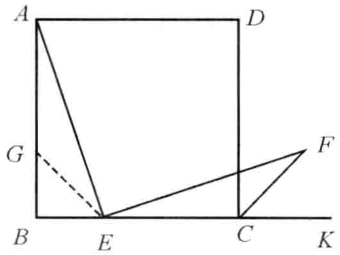

图 1—2(1)

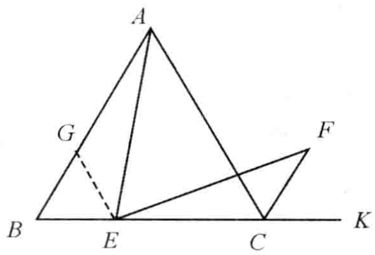

图 1—2(2)

从上述图形中给出的辅助线可以发现，经过变换后，虽然图形变得越来越复杂，但解法是一致的，都是在 AB 上截取 $BG = BE$，构造 $\triangle AGE \cong \triangle EFC$ 来证明，且图 1－2(1)—(3) 所示的图形都是图 1－2(4) 图中，$n = 4$、$n = 3$ 和 $n = 6$ 的特殊情况.

命题人就是使用上述两种方法，将考生熟悉的母题改编成中考几何大题的.

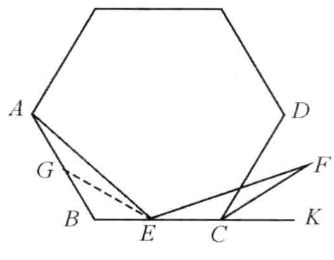

图 1—2(3)

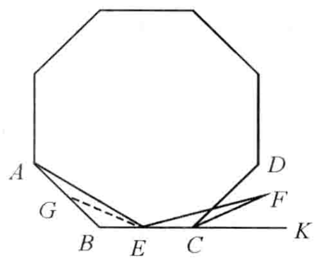

图 1—2(4)

练习1 如图 1－3(1)—(3)，已知等边 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别为边 AB、AC、BC 的中点，M 为直线 BC 上一动点，$\triangle DMN$ 为等边三角形(点 M 的位置改变时，$\triangle DMN$ 也随之整体移动).

(1) 如图 1－3(1)，当点 M 在点 B 左侧时，请你连结 EN，并判断 EN 与 MF 有怎样的数量关系?点 F 是否在直线 NE 上?请写出结论，并说明理由；

(2) 如图 1－3(2)，当点 M 在线段 BC 上时，其它条件不变，(1) 的结论中 EN 与 MF 的数量关系是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请说明理由；

(3) 如图 1－3(3)，若点 M 在点 C 右侧时，请你判断(1) 的结论中 EN 与 MF 的数量关系是否仍然成立？若成立，请直接写出结论；若不成立，请说明理由.

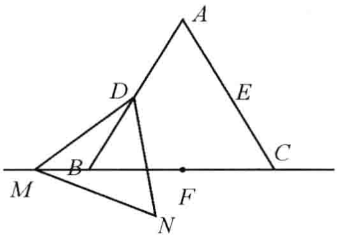

图 1—3(1)

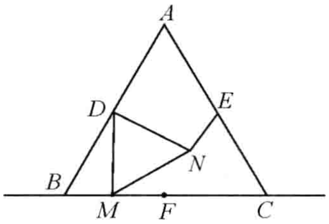

图 1—3(2)

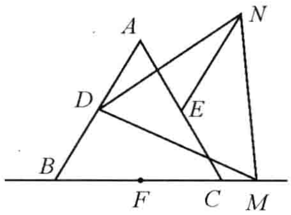

图 1—3(3)

练习2 已知：在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle BAC = \angle D$，点 E、F 分别在 BC、CD 上，且 $\angle AEF = \angle ACD$，试探究 AE 与 EF 之间的数量关系.

(1) 如图 1－4(1)，若 $AB = BC = AC$，则 AE 与 EF 之间的数量关系为________；

(2) 如图 1－4(2)，若 $AB = BC$，你在(1) 中的得到的结论是否发生变化?写出你的猜想，并加以证明；

(3) 如图 1－4(3)，若 $AB = kBC$，你在(1) 中的得到的结论是否发生变化?写出你的猜想并加以证明.

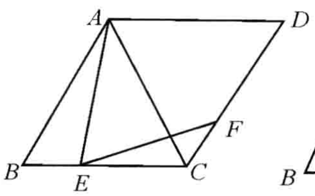

图 1—4(1)

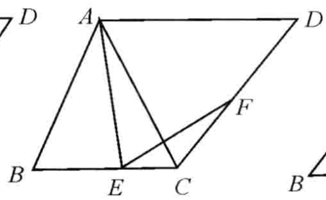

图 1—4(2)

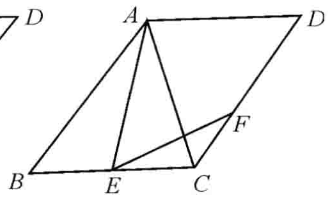

图 1—4(3)

第二节　旋转探密

许多考生最怕关于旋转的平面几何大题，许多同学认为“很难想到用旋转”，“明知道要用旋转解题，但就是不会构造”…… 实际上，在中考数学中，一半以上的平面几何大题需要使用旋转，而且需要使用旋转的试题有明显的特征，只要掌握这些特征，并熟练掌握本节给出的核心母题以及每道母题推广的最终结果，我们就能不再害怕旋转，还能将旋转玩得特别“转”！

核心母题 1 如图 1－5(1)，正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别在边 BC、CD 上，$\angle EAF = 45°$.

(1) 求证：$BE + DF = EF$.

(2) 如图 1－5(2)，正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别在边 BC 和 CD 的延长线上，且满足 $\angle EAF = 45°$，求证：$EF = BE - DF$.

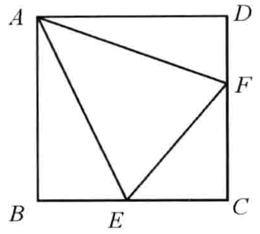

图 1—5(1)

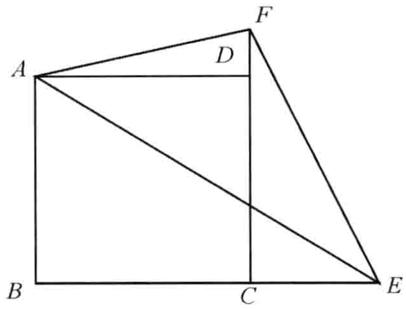

图 1—5(2)

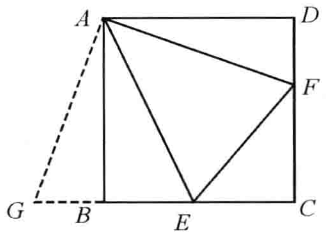

图 1—5(3)

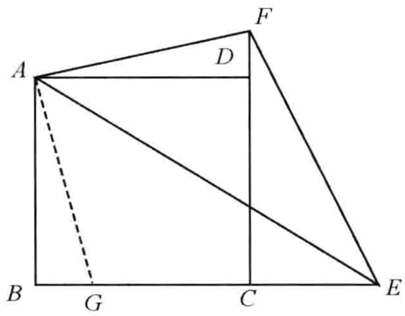

图 1—5(4)

分析： 本题第(1)问是考生熟悉的，只要将 $\triangle ADF$ 顺时针旋转 $90°$，就能解决问题；第(2)问可以将第(1)问的核心步骤作如下总结：将 $\triangle ADF$ 顺时针旋转 $90°$ 得 $\triangle AGB$，即构造 $\triangle AGB \cong \triangle AFD$，然后证明 $\triangle GAE \cong \triangle FAE$，将所需证明的三条边集中到一条线段中得到证明．根据连续不变性，虽然图形发生了改变，上述三个核心过程不变，只要按照上述三个核心思路，就能证得结论．

解： 如图 1－5(3)，过 A 作 AF 的垂线交 CB 延长线于 G，由 $\angle GAB + \angle BAF = 90°$ 和 $\angle DAF + \angle BAF = 90°$ 知：$\angle GAB = \angle DAF$；在 $\triangle AGB$ 和 $\triangle AFD$ 中，$\begin{cases} \angle GAB = \angle DAF, \\ AB = AD, \\ \angle GBA = \angle D = 90°, \end{cases}$ $\therefore \triangle AGB \cong \triangle AFD$,

$\therefore BG = DF, AG = AF$；

又 $\because \angle GAE = \angle GAF - \angle FAE = 90° - 45° = 45°$，$\therefore \angle GAE = \angle FAE = 45°$,

在 $\triangle GAE$ 和 $\triangle FAE$ 中，$\begin{cases} AG = AF, \\ \angle GAE = \angle FAE, \\ AE = AE, \end{cases}$ $\therefore \triangle GAE \cong \triangle FAE$，$\therefore EF = GE$；

$\therefore EF = GE = GB + BE = DF + BE$，即：$BE + DF = EF$.

(2) 如图 1－5(4)，过 A 作 AF 的垂线交 CB 于 G，由 $\angle GAB+\angle GAD=90^\circ$ 和 $\angle DAF+\angle DAG=90^\circ$ 知：

$\angle GAB=\angle DAF$；在 $\triangle AGB$ 和 $\triangle AFD$ 中，$\begin{cases}\angle GAB=\angle DAF,\\ AB=AD,\\ \angle B=\angle ADF=90^\circ,\end{cases}$ $\therefore \triangle AGB\cong\triangle AFD$.

$\therefore BG=DF, AG=AF$；

又 $\because \angle GAE=\angle GAF-\angle FAE=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，$\therefore \angle GAE=\angle FAE=45^\circ$，

在 $\triangle GAE$ 和 $\triangle FAE$ 中，$\begin{cases}AG=AF,\\ \angle GAE=\angle FAE,\\ AE=AE,\end{cases}$ $\therefore \triangle GAE\cong\triangle FAE$，$\therefore EF=GE$；

$\therefore EF=GE=BE-GB=BE-DF$，即：$EF=BE-DF$.

注： 从解题过程中可以看出，第(1)问和第(2)问虽然结论不同，但体现结论本质的三个核心步骤都没有发生改变，这就是连续不变性.

例 1 (1) 如图 1－6(1)，四边形 $ABCD$ 满足 $\angle BAD+\angle C=180^\circ$，$AB=AD$，$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，证明：$BE+DF=EF$；

(2) 在(1)中，将 $\angle EAF$ 绕点 A 旋转，使点 E、F 分别在边 BC 和 CD 的延长线上，如图 1－6(2)，证明：$EF=BE-DF$.

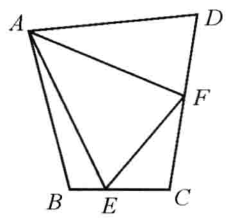

图 1—6(1)

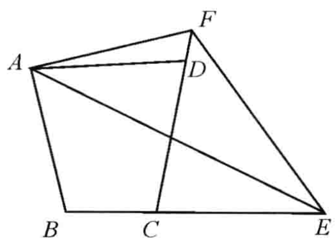

图 1—6(2)

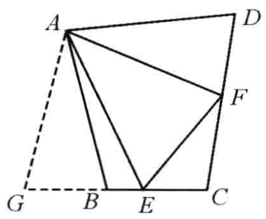

图 1—6(3)

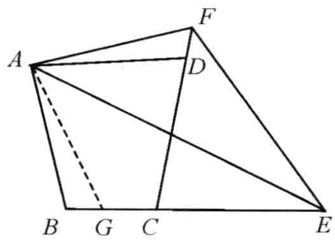

图 1—6(4)

分析： 本题条件与核心母题 1 非常相似，因此，可以使用类似于核心母题 1 的方法处理本题的第(1)问，然后再利用连续不变性，依照第(1)问的解题思路来解决第(2)问.

解： (1) 如图 1－6(3)，过 A 作射线 AG，使 $\angle BAG=\angle DAF$，AG 交 CB 延长线于 G，

由 $\angle BAD+\angle C=180^\circ$ 以及四边形内角和为 360°，得：$\angle ABC+\angle D=180^\circ$，

又 $\because \angle ABC+\angle ABG=180^\circ$，$\therefore \angle ABG=\angle D$；在 $\triangle AGB$ 和 $\triangle AFD$ 中，

$\begin{cases}\angle GAB=\angle DAF,\\ AB=AD,\\ \angle GBA=\angle D,\end{cases}$ $\therefore \triangle AGB\cong\triangle AFD$，$\therefore BG=DF, AG=AF$；

又 $\because \angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，$\therefore \angle BAE+\angle FAD=\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，

结合 $\angle BAG=\angle DAF$，有：$\angle BAE+\angle BAG=\angle EAF$，即：$\angle GAE=\angle EAF$；

在 $\triangle GAE$ 和 $\triangle FAE$ 中，$\begin{cases}AG=AF,\\ \angle GAE=\angle FAE,\\ AE=AE,\end{cases}$ $\therefore \triangle GAE\cong\triangle FAE$，$\therefore EF=GE$；

$\therefore EF = GE = GB + BE = DF + BE$，即：$BE + DF = EF$.

(2) 如图 1－6(4)，在 BC 上取点 G，使 $\angle BAG = \angle DAF$，利用同(1)的方法，类似得：

$\therefore \triangle AGB \cong \triangle AFD$，$\therefore BG = DF$；$\therefore \triangle GAE \cong \triangle FAE$，$\therefore EF = GE = BE - BG$，

$\therefore EF = BE - DF$.

注： 本题是核心母题 1 的推广，核心母题 1 可以看成是将本题条件下的四边形 $ABCD$ 特殊化为正方形的情况. 这种模型简称"大角夹半"模型，是许多中考试题和中考模拟题的出题原型. 以本题为例，"大角夹半"模型的解题的核心思路为：

(1) 将 $\triangle ADF$ 顺时针旋转 $\angle BAD$ 的度数得 $\triangle AGB$，得到 $\therefore \triangle AGB \cong \triangle AFD$；

(2) 证明 $\triangle GAE \cong \triangle FAE$；

(3) 通过(1)和(2)中得的全等三角形，将所需证明的三条集中到一条线段中得到证明.

例 2 在等边 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 所在直线上分别有两点 M、N，D 为 $\triangle ABC$ 外一点，且 $\angle MDN = 60°$，$\angle BDC = 120°$，$BD = CD$. 探究：当 M、N 分别在直线 AB、AC 上移动时，BM、NC、MN 之间的数量关系及 $\triangle AMN$ 的周长 Q 与等边 $\triangle ABC$ 的周长 L 的关系.

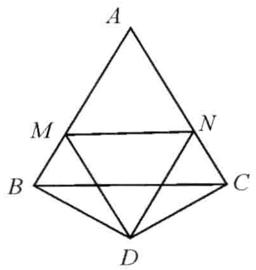

图 1—7(1)

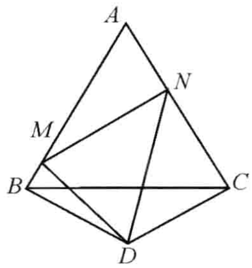

图 1—7(2)

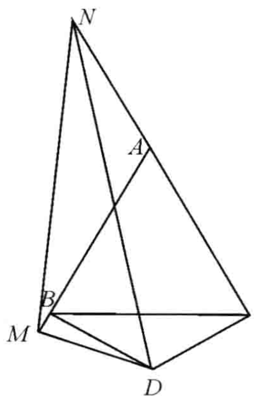

图 1—7(3)

(1) 如图 1－7(1)，当点 M、N 边 AB、AC 上，且 $DM = DN$ 时，BM、NC、MN 之间的数量关系是________；此时 $\frac{Q}{L}$ = ________；

(2) 如图 1－7(2)，点 M、N 边 AB、AC 上，且当 $DM \neq DN$ 时，猜想(1)中的两个结论仍然成立吗，写出你的猜想并加以证明；

(3) 如图 1－7(3)，当 M、N 分别在边 AB、CA 的延长线上时，探索 BM、NC、MN 之间的数量关系如何？并给出证明. 若 $AN = x$，则 Q = ________(用 x、L 表示).

分析： 第(1)问，图形完全对称，容易证明 $BM = CN$，$\triangle MND$ 为正三角形，$\angle MBD = \angle NDC = 30°$，$\angle ABD = \angle ACD = 90°$，就不难得到答案；

第(2)问，四边形 $ABDC$ 中，$\angle BDC + \angle A = 180°$，$\angle MDN = \frac{1}{2}\angle BDC = 60°$，$BD = CD$，符合"大角夹半"模型的条件，因此，根据母题 1 的核心思路就不难得到答案；

第(3)问，利用连续不变性，并根据母题 1 的核心思路就可以得到相近的结论.

解： (1) BM、NC、MN 之间的数量关系为 $BM + CN = MN$，$\frac{Q}{L} = \frac{2}{3}$；

(2) 猜想：结论仍然成立.

证明：如图 1－7(4)，延长 AC 至 E，使 $CE = BM$，连接 DE. $\because BD = CD$，且 $\angle BDC = 120°$，

$\therefore \angle DBC = \angle DCB = 30°$，又 $\triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle MBD = \angle NCD = 90°$.

在 $\triangle MBD$ 与 $\angle ECD$ 中，$\begin{cases} BM = CE, \\ \angle MBD = \angle ECD, \\ BD = DC, \end{cases}$ $\therefore \triangle MBD \cong \triangle ECD$.

$\therefore DM = DE, \angle BDM = \angle CDE$,

$\therefore \angle EDN = \angle NDC + \angle CDE = \angle NDC + \angle BDM = \angle BDC - \angle MDN = 60°$. $\therefore \angle MON = \angle EON$.

在 $\triangle MDN$ 与 $\triangle EDN$ 中，$\begin{cases} DM = DE, \\ \angle MDN = \angle EDN, \\ DN = DN, \end{cases}$ $\therefore \triangle MDN \cong \triangle EDN$.

$\therefore MN = NE = NC + CE = NC + BM$，$\triangle AMN$ 的周长满足：

$Q = AM + AN + MN = AM + AN + (NC + BM)$

$\quad = (AM + BM) + (AN + NC) = AB + AC = 2AB$

又 $\because L = 3AB$，　$\therefore \dfrac{Q}{L} = \dfrac{2AB}{3AB} = \dfrac{2}{3}$.

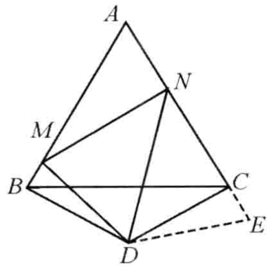

图 1—7(4)

(3) $Q = 2x + \dfrac{2}{3}L$.

注： 第(3)问只要遵循第(2)问的核心思路就可以了，与母题1的3个核心步骤完全一致，只要将 $\triangle BMD$ 顺时针旋转 120° 得到 $\triangle MBD \cong \triangle ECD$，然后再证明 $\triangle MDN \cong \triangle EDN$ 就可以得到：$CN = MN - BM$，就不难得到 $Q = 2x + \dfrac{2}{3}L$.

练习 1 已知：正方形 $ABCD$ 中，$\angle MAN = 45°$，$\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB、DC（或它们的延长线）于点 M、N.

(1) 如图 1－8(1)，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM = DN$ 时，有 $BM + DN = MN$. 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时，如图 1－8(2)，请问图 1－8(1) 中的结论还是否成立？如果成立，请给予证明，如果不成立，请说明理由；

(2) 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图 1－8(3) 的位置时，线段 BM，DN 和 MN 之间有怎样的等量关系？请写出你的猜想，并证明.

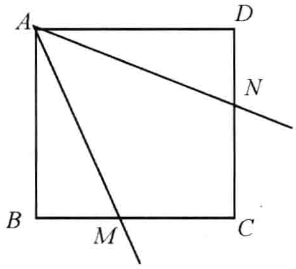

图 1—8(1)

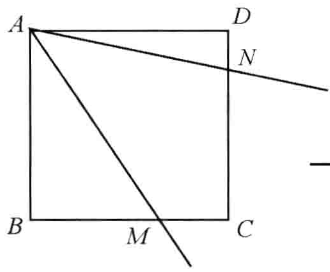

图 1—8(2)

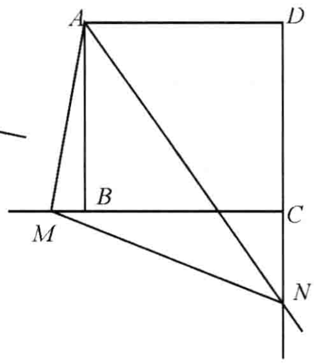

图 1—8(3)

练习 2 已知四边形 $ABCD$ 中，$AB \perp AD$，$BC \perp CD$，$AB = BC$，$\angle ABC = 120°$，$\angle MBN = 60°$，$\angle MBN$ 绕 B 点旋转，它的两边分别交 AD，DC（或它们的延长线）于 E，F. 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE = CF$ 时，如图 1－9(1)，易证 $AE + CF = EF$.

当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时，在图 1－9(2) 和图 1－9(3) 这两种情况下，上述结论是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，线段 AE，CF，EF 又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需证明.

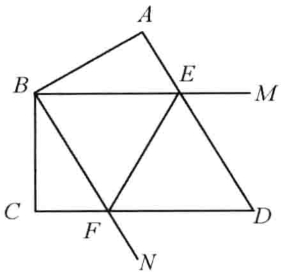

图 1—9(1)

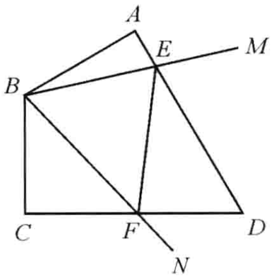

图 1—9(2)

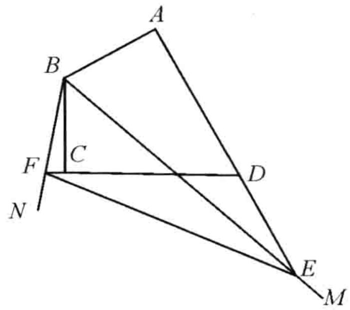

图 1—9(3)

核心母题 2 如图 1－10，C 是线段 BD 上任意一点，分别以 BC、CD 为边作正 $\triangle ABC$ 和正 $\triangle CDE$，证明：$\triangle BCE \cong \triangle ACD$，且 $\angle ANB = 60°$.

这几乎是每个考生都做过的一道题目，只要利用正三角形性质，就能通过

$$\begin{cases} AC = BC, \\ \angle BCE = \angle ACD = 120°, \\ CE = CD \end{cases}$$

证得 $\triangle BCE \cong \triangle ACD$，$\therefore \angle CAD = \angle EBC$；

再利用三角形内角和定理，结合 $\angle APN = \angle BPC$，在 $\triangle APN$ 和 $\triangle BPC$ 中，$\angle ANB + \angle CAD = \angle PCB + \angle EBC$，$\because \angle CAD = \angle EBC$，$\therefore \angle ANB = \angle PCB = 60°$.

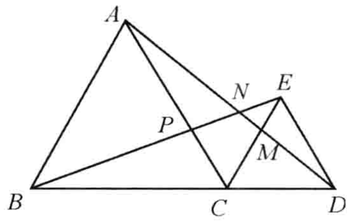

图 1—10

实际上，将 $\triangle BCE$ 顺时针旋转 $60°$，就可以得到 $\triangle ACD$，因此，$\triangle BCE \cong \triangle ACD$，$BE$ 和 AD 是这两个三角形的对应边，因此，其夹角 $\angle ANB$ 的度数即为旋转角 $60°$.

你能发现图－11(1) 至图 1－11(3) 的变化规律吗？

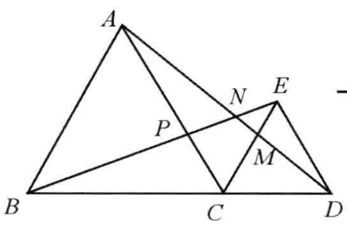

图 1—11(1)

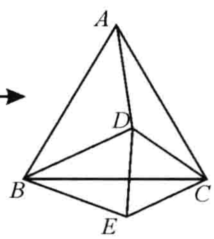

图 1—11(2)

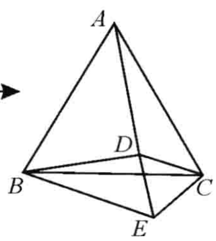

图 1—11(3)

图 1－11(2) 和图 1－11(3) 是利用连续不变性，将图 1－11(1) 中的正 $\triangle CDE$ 绕点 C 旋转，图 1－11(2) 是点 D 运动到 $\triangle ABC$ 内部的情况，而图 1－11(3) 则是当 D 在 $\triangle ABC$ 内部，且点 A、D、E 三点共线的特殊情况.

例 3 如图 1－12(1)，D 是正 $\triangle ABC$ 外接圆上任意一点，连 AD，证明：$AD = BD + CD$.

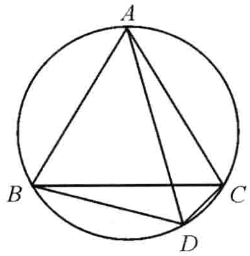

图 1—12(1)

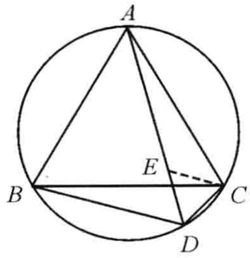

图 1—12(2)

分析： 如图，采用“截长补短”的方法，在线段 AD 上截取 $CD = CE$，如图 1－12(2)，可以发现 $\triangle AEC$ 是由 $\triangle BCE$ 绕点 C 旋转 60° 得到的，只要证明 $\triangle AEC \cong \triangle BCD$ 即可.

解： 在线段 AD 上截取 $CD = CE$，$\because A$、B、D、C 四点共圆，$\therefore \angle DBC = \angle EAC$，

且 $\angle BAC + \angle BDC = 180^\circ$，$\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ$，且 $\angle ABC = \angle ADC = 60^\circ$

$\therefore \triangle CDE$ 为正三角形，$\therefore CE = CD = DE$，且 $\angle CED = 60^\circ$，$\therefore \angle AEC = 120^\circ = \angle BDC$.

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle BCD$ 中，$\begin{cases} \angle DAC = \angle CBD, \\ \angle AEC = \angle BDC, \\ CE = CD, \end{cases}$ $\therefore \triangle AEC \cong \triangle BCD$，$\therefore BD = AE$；

$\because CD = DE$，$\therefore AD = AE + DE = BD + CD$，即 $\therefore AD = BD + CD$.

注： 实质上，本题就是图 1—11(3) 所揭示的图形. 因此，证明方法就是直接将图形补成图 1—11(3)，再利用三角形全等加以证明. 在中考平面几何证明中，本题结论还可以应用于许多复杂图形之中，考生应熟记这个基本图形.

例 4 (1) 已知：如图 1－13(1)，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接正三角形，点 P 为 $\overset{\frown}{BC}$ 上一动点，

求证：$PA = PB + PC$；

(2) 如图 1－13(2)，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接正方形，点 P 为 $\overset{\frown}{BC}$ 上一动点，求证：$PA = PC + \sqrt{2}PB$；

(3) 如图 1－13(3)，六边形 $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形，点 P 为 $\overset{\frown}{BC}$ 上一动点，请探究 PA、PB、PC 三者之间有何数量关系，并给予证明.

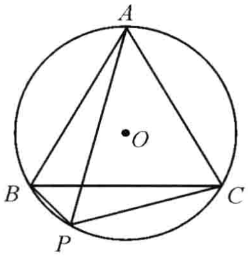

图 1—13(1)

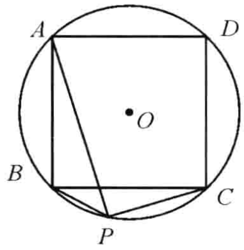

图 1—13(2)

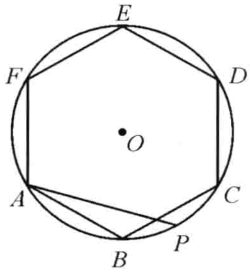

图 1—13(3)

分析： 第(1)问同例 3；第(2)问是由第(1)问普遍化条件得到的，是将第(1)问的将正 $\triangle ABC$ 推广成正方形 $ABCD$ 得到的，只要抓住第(1)问的核心思路，如图 1－13(5)，作 BP 的垂线 BE，就可以发现 $\triangle ABE$ 是 $\triangle BPC$ 绕点 B 旋转 90° 得到的；第(3)问是将第(1)问正 $\triangle ABC$ 推广成正六边形的结果，只要过 B 作 $\angle PBQ = 120^\circ$，则 $\triangle ABQ$ 是 $\triangle BPC$ 绕点 B 旋转 120° 得到的.

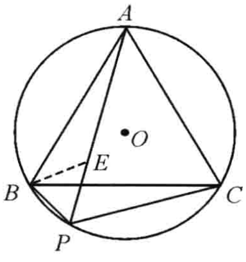

图 1—13(4)

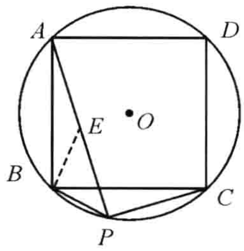

图 1—13(5)

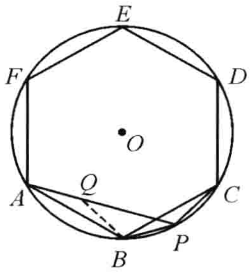

图 1—13(6)

解： (1) 如图 1－13(4)，类似于例 3，过 B 作 $\angle PBE=60^\circ$，证明从略.

(2) 如图 1－13(5)，过点 B 作 $BE\perp PB$ 交 PA 于 E，

$\because \angle ABE+\angle EBC=\angle EBC+\angle CBP=90^\circ$，$\therefore \angle ABE=\angle CBP$；

又 $\because \angle APB=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=45^\circ$，$\therefore \triangle BEP$ 为等腰直角三角形， $\therefore BP=BE$，$\therefore PE=\sqrt{2}PB$；

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CBP$ 中，$\begin{cases}AB=BC,\\ \angle ABE=\angle CBP,\\ BP=BE,\end{cases}$ $\therefore \triangle ABE\cong\triangle CBP$，$\therefore PC=AE$，$\therefore PA=AE+PE=PC+\sqrt{2}PB$.

(3) 如图 1－13(6)，在 AP 上截取 $AQ=PC$，连结 BQ，

在 $\triangle ABQ$ 与 $\triangle CBP$ 中，$\begin{cases}AB=BC,\\ \angle BAP=\angle BCP,\\ AQ=PC,\end{cases}$ $\therefore \triangle ABQ\cong\triangle CBP$，$\therefore BQ=BP$；

又 $\because \angle APB=30^\circ$，$\therefore \triangle PBQ$ 是顶角为 120° 的等腰三角形 $\therefore PQ=\sqrt{3}PB$，

$\therefore PA=PQ+AQ=\sqrt{3}PB+PC$.

练习 3 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

(1) 如图 1－14(1)，P 为等边 $\triangle ABC$ 外一点，且 $\angle BPC=120^\circ$. 试猜想线段 BP、PC、AP 之间的数量关系，并证明你的猜想；

(2) 如图 1－14(2)，P 为等边 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\angle APD=120^\circ$ 求证：$PA+PD+PC>BD$.

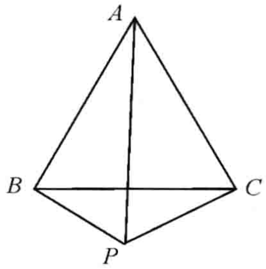

图 1—14(1)

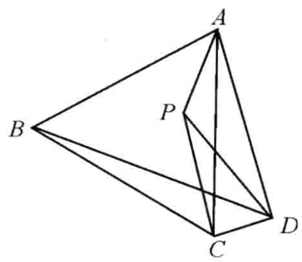

图 1—14(2)