数学分析教本

（上 册）

太原理工大学数学学院　编

科学出版社

数学分析教本

（上册）

太原理工大学数学学院　编

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书作为数学分析课程的教材，共分上、中、下三册出版. 上册主要介绍数列的极限、函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与泰勒公式、一元函数微分学应用及实数基本理论等内容.

本书注重概念引入的自然性与理论推证的严密性. 注意内容的完整、安排的恰当；表述清楚、简明；习题配备合理.

本书适合理工科大学本科数学类各专业及其他相关专业的教学使用，也可供相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教本. 上册/太原理工大学数学学院编. —北京：科学出版社，2015.7

ISBN 978-7-03-045245-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①太… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 170345 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：张凤琴
责任印制：徐晓晨 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 7 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2015 年 7 月第一次印刷 印张：11
字数：221 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

数学分析是数学类各专业最重要的一门数学基础课程．其主要内容是实数域上数列及函数的极限理论、无穷级数与一元及多元函数的微积分学．我们本着便于教、利于学的教学原则，根据多年的教学实践与体会，顺应当今数学教材的改革主流与趋势编写了此书．

在内容安排上，鉴于目前国内绝大部分学校数学分析课程都安排三个学期讲授，因此，本书分上、中、下三册编写，分别对应三个学期使用．同时，考虑到学生所学其他课程对本课程知识的需要，我们先介绍数列的极限理论与一元及多元函数的微积分学主体内容（上、中册），而将曲线与曲面积分、无穷级数、广义积分与含参变量积分等内容安排在下册．在习题配备方面，我们从学生学习的实际情况出发，按照本课程的基本要求，从数量与质量两个角度把握，合理地配备了本书的习题．并且力求题型多样，培养学生从不同角度思考问题，同时特别注重对学生举反例的训练．

本册书主要特色在于实数理论与数列基本定理的处理方式．我们先将实数集确界原理作为公理引用．进而介绍数列的单调有界原理，又通过学生易于接受的夹逼准则引出区间套定理，而在介绍闭区间上连续函数的有界性时，为了从局部过渡到整体，又巧妙地引入有限覆盖定理．根据我们的教学实践，这样做的结果可使学生在“不知不觉”中就学完了实数的基本定理，使学生对这部分内容感到自然而不是那么地生硬．最后，考虑到各个学校对不同层次的学生要求不尽相同，我们通过附录的形式，利用戴德金的“切割”理论严格引入无理数，并将八大实数定理做一基本梳理，给出总结性结论．实数基本理论的教学历来是数学分析中最棘手的问题，我们期待着同行对这一尝试的赐教．

本书能够顺利完成，得益于太原理工大学数学学院领导的远见卓识，以及对教学的积极鼓励、支持．

本书在编写过程中参考了国内外许多教材及教学参考书，诚挚感谢前辈的教学理念、思想、观点、手法及提供的大量素材．

本书由太原理工大学数学学院数学分析教学团队成员刘进生、张玲玲、卢准炜、秦效英、滕凯民、郭祖记、温志涛等教师集体讨论，并由刘进生、张玲玲、卢准炜三位教授执笔完成．

鉴于编者水平有限，书中不妥之处恳请读者批评、指正．

编者

2015 年 3 月

目　　录

前言
第 0 章　导论 …… 1
0.1　课程介绍 …… 1
0.2　记号与术语 …… 2
0.3　绝对值 …… 2
0.4　二项式公式与常用不等式 …… 3
0.5　确界原理 …… 5
0.6　映射 …… 6
第 1 章　变量与函数 …… 7
1.1　函数 …… 7
1.2　函数的几种特性 …… 9
1.3　函数运算 …… 10
1.4　初等函数 …… 13
习题 1 …… 18
第 2 章　数列的极限 …… 21
2.1　数列 …… 21
2.2　数列极限的定义 …… 24
2.3　收敛数列的性质 …… 27
2.4　数列收敛的条件 …… 29
2.5　无穷小数列与无穷大数列 …… 33
习题 2 …… 36
第 3 章　函数的极限 …… 41
3.1　自变量趋于无穷大时的极限 …… 41
3.2　自变量趋于有限定值时的极限 …… 43
3.3　函数极限的性质 …… 46
3.4　无穷小量与无穷大量 …… 54
习题 3 …… 58
第 4 章　连续函数 …… 61
4.1　函数的连续性 …… 61

4.2 连续函数的运算……64
4.3 连续函数的性质……65
习题 4 ……70
第 5 章 导数 ……73
5.1 导数概念……73
5.2 导数运算法则……80
5.3 高阶导数……89
5.4 隐函数求导与参数方程求导……93
习题 5 ……98
第 6 章 微分……104
6.1 微分概念 ……104
6.2 微分计算 ……108
6.3 高阶微分 ……111
习题 6……113
第 7 章 微分中值定理与泰勒公式……115
7.1 罗尔中值定理 ……115
7.2 拉格朗日中值定理 ……116
7.3 柯西中值定理 ……120
7.4 洛必达法则 ……121
7.5 泰勒公式 ……125
习题 7……131
第 8 章 一元函数微分学应用……134
8.1 函数的单调性 ……134
8.2 函数的极值与最值 ……136
8.3 曲线的凸性与拐点 ……140
8.4 函数作图 ……143
8.5 平面曲线的曲率 ……146
习题 8……151
部分习题参考答案……153
参考文献……157
附录 实数系基本理论……158

第0章　导　　论

0.1　课 程 介 绍

数学分析是数学学科三大经典基础课程之一，也是该学科最重要的一门基础课. 其研究对象是自变量为实数且取值也为实数的所谓实变实值函数. 其根本任务是研究和探讨实值变量之间的数量关系. 这里所说的数学分析是狭义的，它专指微积分学. 数学史上有时也把微积分称为无穷小量分析. 广义的数学分析除微积分学外，还包括复变函数、实变函数、微分方程、积分方程、泛函分析等以函数为研究对象的其他数学分支.

微积分的思想早在古代的希腊和中国就已经有了雏形. 到了 17 世纪，生产和科学的发展向数学提出许多新的研究课题. 例如，求物体运动的瞬时速度、曲线的切线、函数的极值以及曲边梯形的面积等问题. 它们都涉及某些变化着的量，以常量为研究对象的初等数学对此无能为力. 因而迫切需要建立一种以变量为研究对象的新数学. 17 世纪下半叶，英国物理学家、数学家牛顿(I. Newton，1643—1727)和德国哲学家、数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)各自独立地建立了微积分的计算法. 这不仅使以前需要用各种特殊技巧分别处理的难题有了统一的求解办法，而且大大简化了积分运算. 虽然微积分一经产生就在实践中彰显出巨大威力，但在逻辑推理上却存在着纰漏和矛盾. 1821 年，法国数学家柯西(A. L. Cauchy，1789—1857)对极限概念作了明确定义，并在此基础上澄清了连续、导数、积分等基本概念，使得微积分成为比较严密的理论. 19 世纪 70 年代，德国数学家魏尔斯特拉斯(W. Weierstrass，1815—1897)等进一步将极限概念建立在实数理论的基础上，实现了数学分析的算术化和公理化，使得微积分具有了今天的严密形式.

数学分析是许多后续课程如常微分方程、数学物理方程、复变函数、实变函数、泛函分析、计算方法、概率论与数理统计以及微分几何等课程必备的基础，是数学学科以及其他相关学科各专业本科生的必修课. 通常，它在教学培养计划中被列为主干课程.

数学分析主要讲授实数基本理论、变量与函数、数列的极限、函数的极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分与广义积分、数项级数、函数项级数、幂级数、傅里叶级数、多元函数的极限与连续、偏导数与全微分、极值理论、隐函数存在定理、重积分、曲线积分、曲面积分及含参变量积分等相关的基本内容.

对学生而言，学习数学分析，除了需要掌握具体计算微分、积分的方法和技巧，进而能够分析函数的各种特性外，更重要的是能够深刻理解实数以及 n 维欧氏空间的拓扑性质，为后续的复分析、实分析、泛函分析和拓扑学等课程提供具体的例子，并得到研究方法、逻辑思维和科学创新方面的启蒙. 一般来说，数学知识的获取和数学能力的培养，仅靠听老师讲授是不够的，只有勤学多练，深思熟虑，才能在潜移默化的自我感悟和熟能生巧的过程中逐步积累和提高.

数学是打开科学大门的钥匙. 数学不仅是计算的工具，也是得以创造新理论、开拓新学科的主要源泉，数学的重要性众所周知. 数学分析是打开数学宝库的钥匙. 只有微积分学才能使科学有可能用数学来不仅表明状态，而且也表明过程与运动，数学分析的地位不言而喻. 数学启发人们的想象与推理，学习数学像做游戏一样，不仅能体会到“数学好玩”的趣味与快乐，还能感受到“数学之美”的风采与魅力. 只要认真努力地学习过数学，学习过数学分析，不论以后是否还记得住具体的数学知识，也不论以后从事什么工作，那些深深铭刻在头脑中的数学精神、数学思维方法、研究方法、推理方法和看问题的着眼点等将随时随地发挥作用，使他们终身受益. 因为数学毕竟在他们的头脑中留下了痕迹，这就能使他们比未经过数学训练的人做出更多的贡献.

0.2　记号与术语

本书分别用记号 $\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ 代表自然数(不包括零)、整数、有理数及实数的全体所组成的集合，并使用常规的集合运算符号. 用记号 $\exists$ 表示术语“存在或至少有一个”. 用记号 $\forall$ 表示术语“任意给定的”. 设 A，B 是两个命题，用记号 $A\Rightarrow B$ 表示 A 蕴涵 B，即 A 是 B 成立的充分条件；用记号 $A\Leftarrow B$ 表示 B 是 A 成立的必要条件；用记号 $A\Leftrightarrow B$ 表示 A 成立当且仅当 B 成立，即 A 与 B 等价，也即 A 是 B 成立的充分必要条件. 用记号 $A:=B$ 表示将 A 记为 B. 用记号□表示对一个定理、例题等证明或计算的终结.

0.3　绝　对　值

实数 x 的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

其基本性质如下：

(1) **正定性**　$|x|\geqslant 0$ 且 $|x|=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) **齐次性** $|kx|=|k||x|$;

(3) **三角不等式** $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

利用三角不等式,立即得

$$|x|\leqslant|x-y|+|y|.$$

它是数学分析中最常用的不等式,请读者特别关注.

在实数集$\mathbb{R}$上,利用绝对值可以定义任意两点 x,y 之间的距离 $d(x,y)$,即规定

$$d(x,y)=|x-y|.$$

它具有如下性质:

(1) **正定性** $d(x,y)\geqslant 0$ 且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) **对称性** $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) **三角不等式** $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$.

因而 $d(x,y)$ 描述了 x,y 两点的靠近程度. 利用实数的绝对值,能得到下列结论.

命题 0.3.1 已知 a 为给定的实数,如果对任意的 $\varepsilon>0$,都有 $|a|\leqslant\varepsilon$,则 $a=0$.

证明 假设 $a\neq 0$. 因为对任意的 $\varepsilon>0$,都有 $|a|\leqslant\varepsilon$,所以对于 $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}>0$,也成立 $|a|\leqslant\dfrac{|a|}{2}$,因此 $1\leqslant\dfrac{1}{2}$,矛盾. 所以结论正确. □

0.4 二项式公式与常用不等式

设 $a,b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$,二项式公式为

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k},$$

其中组合系数 $\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

除了前面提到的一些绝对值不等式外,本书还经常用到以下不等式.

(1) 伯努利(Bernoulli)不等式:对任意实数 $x\geqslant -1$,有不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,\quad n\in\mathbb{N}.$$

证明 当 $n=1$ 时结论显然成立. 假设 $n=k$ 时结论成立,即 $(1+x)^k\geqslant 1+kx$. 则当 $n=k+1$ 时,注意到 $1+x\geqslant 0$,于是

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\geqslant(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2\geqslant 1+(k+1)x.$$

从而由数学归纳法知结论成立. □

(2) 均值不等式:对任意的正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,分别记

$$M(a_i)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i;\qquad\text{(算术平均值)}$$

$$G(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\Big(\prod_{i=1}^{n}a_i\Big)^{\frac{1}{n}};\qquad\text{(几何平均值)}$$

$$H(a_i)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}},\qquad\text{(调和平均值)}$$

则有均值不等式

$$H(a_i)\leqslant G(a_i)\leqslant M(a_i).$$

证明　如果 $G(a_i)\leqslant M(a_i)$ 成立,那么

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\,\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i},$$

所以 $H(a_i)\leqslant G(a_i)$. 因此只需证明 $G(a_i)\leqslant M(a_i)$. 显然,当 $n=1$ 时结论成立. 假设 $n=k$ 时结论成立,即 $\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\leqslant\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$,则当 $n=k+1$ 时,记 $b_k=\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$,那么

$$kb_k=\sum_{i=1}^{k}a_i,\quad a_{k+1}+kb_k=\sum_{i=1}^{k+1}a_i,\quad \frac{a_{k+1}+kb_k}{k+1}=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}a_i.$$

不妨假设 $a_{k+1}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}\}$,从而 $a_{k+1}\geqslant b_k$,再由伯努利不等式,结合归纳假设,得

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}a_i\Big)^{k+1}&=\Big(b_k+\frac{a_{k+1}-b_k}{k+1}\Big)^{k+1}\geqslant b_k^{k+1}+(k+1)b_k^k\frac{a_{k+1}-b_k}{k+1}\\&=b_k^ka_{k+1}\geqslant a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}.\end{aligned}$$

于是,由数学归纳法知结论成立. □

(3) $[x]\leqslant x<[x]+1$,其中 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分.

注 0.4.1　对任意实数 x,有 $x=[x]+(x)$,其中 (x) 表示 x 的小数部分,并且 $(x)\geqslant 0$.

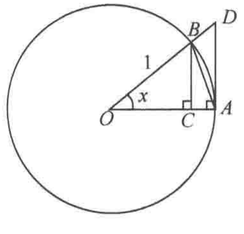

图 0-1

(4) 当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时,$|\sin x|<|x|<|\tan x|$.

证明　当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,考察图 0-1 中的单位圆.

作圆心角 $\angle AOB=x$,点 A 处的切线与 OB 的延长线相交于 D,又 $BC\perp OA$,则

$$\sin x=BC,\quad x=\overset{\frown}{AB},\quad \tan x=AD.$$

因为

$$\triangle AOB\text{ 的面积}<\text{扇形 }AOB\text{ 的面积}<\triangle AOD\text{ 的面积},$$

所以 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$，即

$$|\sin x|<|x|<|\tan x|.$$

当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，注意到 $\sin x, x, \tan x$ 都是奇函数，所以结论仍然成立. □

(5) 对任意实数 x，$|\sin x|\leqslant|x|$，并且等号当且仅当 $x=0$ 时成立.

证明 由(4)知当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时，$|\sin x|<|x|$. 而当 $|x|\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$|\sin x|\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$. 所以当 $x\neq 0$ 时，$|\sin x|<|x|$，又当 $x=0$ 时，$|\sin x|=|x|$，因此结论正确. □

0.5 确界原理

定义 0.5.1 设 S 为 $\mathbb{R}$ 的一个子集. 若存在实数 $M(m)$，使得一切 $x\in S$ 都有 $x\leqslant M(x\geqslant m)$，则称 $M(m)$ 为 S 的一个上界(下界)，并称 S 为一个有上(下)界的数集. 若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为有界集.

按定义 0.5.1，如果 M 是 S 的一个上界，那么对任意的 $M_1>M$，M_1 也是 S 的一个上界，我们称 S 的上界中的最小者为 S 的上确界，记为 $\sup S$. 同理，S 的下界中的最大者称为 S 的下确界，记为 $\inf S$. 于是下列结论成立：

(1) $\xi=\inf S$ 当且仅当对一切 $x\in S$，$x\geqslant\xi$，并且对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $x_\varepsilon\in S$ 使得 $x_\varepsilon<\xi+\varepsilon$；

(2) $\eta=\sup S$ 当且仅当对一切 $x\in S$，$x\leqslant\eta$，并且对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $x_\varepsilon\in S$ 使得 $\eta-\varepsilon<x_\varepsilon$.

例如，对于集合 $I_1=\{x\mid x<b\}$，$I_2=\{x\mid x\leqslant b\}$，有 $\sup I_1=\sup I_2=b$. 事实上，对于任意的 $x\in I_1$ 或者 $x\in I_2$，有 $x\leqslant b$，而对于任意的 $\varepsilon>0$，取 $x_\varepsilon=b-\frac{\varepsilon}{2}$，则 $x_\varepsilon\in I_1$，$x_\varepsilon\in I_2$，并且 $b-\varepsilon<x_\varepsilon$. 同理，对于 $I_3=\{x\mid x>a\}$，$I_4=\{x\mid x\geqslant a\}$ 有 $\inf I_3=\inf I_4=a$.

定理 0.5.1 (确界原理) 有上(下)界的非空实数集一定有上(下)确界.

注 0.5.1 定理 0.5.1 的证明见附录，暂且不作要求，读者可作为公理予以承认.

0.6 映 射

映射的概念在中学已经学过，它是我们定义函数的依据，叙述如下：

设 X, Y 是两个集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中的每一个元素 x，按照此法则 f 在 Y 中存在唯一的元素 y 与 x 对应，则称 f 是一个从集合 X 到集合 Y 的映射，记为 $f: X \to Y$.

第 1 章　变量与函数

通过中学的学习，读者对函数已经相当熟悉. 本章主要回顾函数的概念、某些基本特性及其初等运算等内容，并介绍一些特殊的分段函数，它们是读者更深刻的认识、感悟、理解与掌握函数的极好素材.

1.1　函　　数

1.1.1　区间

区间是数学分析中主要考虑的数集. 设 $I\subset\mathbb{R}$，对任意的 $x_1,x_2\in I$，$x_1\neq x_2$，如果介于 x_1 与 x_2 之间的一切实数都属于 I，则称 I 为一个区间.

设 $a,b\in\mathbb{R}$，并且 $a<b$. 以下是九类区间的定义、名称与记号：

(1) 开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

(2) 闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

(3) 左开右闭区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；

(4) 左闭右开区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$；

(5) 无限区间 $(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$；

(6) 无限区间 $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$；

(7) 无限区间 $(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$；

(8) 无限区间 $(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$；

(9) 无限区间 $(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbb{R}$.

今后将区间(1)—(4)类统称为有限区间，因为它们存在有限的区间长度 $b-a$；而将区间(5)—(9)类统称为无限区间. 称 a 和 b 分别为区间的左端点和右端点. 记号“$+\infty$”读作正无穷大，“$-\infty$”读作负无穷大.

1.1.2　邻域

在微分学中，由于经常需要考虑函数在一点 x_0 处的局部(即在 x_0 附近)性态，为了叙述方便，引入邻域的概念.

给定实数 a 及 $\delta>0$，称开区间

$$U(a;\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

为 a 的 δ 邻域；称集合

$$\mathring{U}(a;\delta)=U(a;\delta)\setminus\{a\}=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

为 a 的去心 δ 邻域. 也分别称

$$U_+(a;\delta)=[a,a+\delta),\quad \mathring{U}_+(a;\delta)=(a,a+\delta),$$
$$U_-(a;\delta)=(a-\delta,a],\quad \mathring{U}_-(a;\delta)=(a-\delta,a)$$

为 a 的右 δ 邻域、右去心 δ 邻域、左 δ 邻域、左去心 δ 邻域. 并分别称 a 与 δ 为各邻域的中心与半径. 当不需要考虑各类邻域半径 δ 的大小时,上述各邻域可分别简记为 $U(a)$,$\mathring{U}(a)$,$U_+(a)$,$\mathring{U}_+(a)$,$U_-(a)$ 及 $\mathring{U}_-(a)$.

1.1.3　函数

定义 1.1.1　设 $D\subset\mathbb{R}$,称映射 $f:D\to\mathbb{R}$ 为一个函数,记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中,x 称为自变量;y 称为因变量;D 称为定义域;因变量 y 的取值集合称为值域,记为 R; 集合 $G=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的图形(图像). 对变量 x 的每个固定的值 $x_0\in D$,通过 f 所唯一确定的数值 $y_0=f(x_0)$ 称为函数在 x_0 点的函数值.

下面给出几个常用函数的例子.

绝对值函数 $y=|x|$. 定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R=[0,+\infty)$,图形如图 1-1所示.

克罗内克(Kronecker)符号函数

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R=\{-1,0,1\}$,图形如图 1-2 所示.

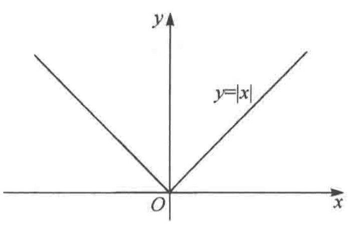

图 1-1

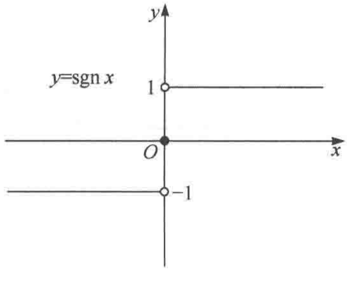

图 1-2

容易验证 $x=|x|\,\mathrm{sgn}x$.

高斯(Gauss)取整函数 $G(x)=[x]$. 定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R=\mathbb{Z}$,它在 x 为整数值处,图形发生跳跃,跃度为 1. 容易知道 $G(-1.5)=-2$,$G\left(\frac{1}{2}\right)=0$,

$G(3)=3$ 等，图形如图 1-3 所示.

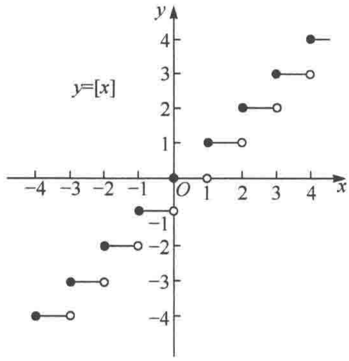

图 1-3

狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=\{0,1\}$.

黎曼(Riemann)函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\in(0,1)\text{，整数 } p,q>0\text{，互质，}\\ 0, & x\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}\text{，}x=0,1.\end{cases}$$

定义域 $D=[0,1]$，值域 $R=\left\{0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\right\}$.

以上函数具有一个共同特点，即在定义域的不同范围内，函数的对应法则需用不同的解析式表示. 一般称形如这样的函数为分段函数.

线性函数 $f(x)=ax$，其中 a 是给定的常数. 容易证明对任意的 $x,y,k\in\mathbb{R}$，它满足线性条件

$$\begin{cases}f(x+y)=f(x)+f(y),\\ f(kx)=kf(x).\end{cases}$$

1.2 函数的几种特性

1.2.1 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 R，如果数集 R 有上界(有下界，有界)，就称函数 $y=f(x)$ 有上界(有下界，有界).

有界函数的图形完全落在两条平行于 x 轴的直线之间.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 是有界函数；函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 既无上界也无下界；函数 $f(x)=x^2$ 有下界而无上界；函数 $f(x)=-2^x$ 有上界而无下界.

1.2.2 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果对于 D 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

成立，则称 $f(x)$ 在 D 内是单调增加(减少)的；如果上式中的不等号是严格的，即 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在 D 内是严格单调增加(减少)的. 单调增加(减少)的函数也称为单调递增(递减)或单调上升(下降)函数. 这类函数统称

为单调函数.

例如,$f(x)=x^3$ 是严格单调增加函数;$f(x)=2^{-x}$是严格单调减少函数;$f(x)=1$既是单调增加函数,也是单调减少函数;$f(x)=x^2$ 不是单调函数.

1.2.3 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,即当 $x\in D$ 时一定有$-x\in D$. 如果对于任意的 $x\in D$,等式

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为偶函数;如果对于任意的 $x\in D$,等式

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为奇函数.

例如,$y=x^n$,$n\in\mathbb{N}$,当 n 为偶数时,它是偶函数;而当 n 为奇数时,它是奇函数. 这也正是名称"偶函数"与"奇函数"的由来. 而函数 $y=x+1$ 既不是奇函数,也不是偶函数,通常称为非奇非偶函数. 从几何上看,偶函数的图形关于 y 轴对称;而奇函数的图形关于原点对称. 容易知道在关于原点对称数集 D 上有定义的任意一个函数 $f(x)$可以表为一个偶函数与一个奇函数的和,因为

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

1.2.4 周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,若存在非零常数 T,使得对于任意 $x\in D$,都有 $x+T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,而 T 称为 $f(x)$的周期,通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $\sin x$,$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$ 及 $\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

注意,并不是任何周期函数都有最小正周期. 例如,狄利克雷函数 $D(x)$,易证任何正有理数都是它的周期,因为不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期. 常函数也是如此.

1.3 函数运算

1.3.1 函数的四则运算

设函数 $f(x)$,$g(x)$的定义域分别为 D_1,D_2,并且 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$,则可定义这两个函数的四则运算,即当 $x\in D$ 时,规定

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x);$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x);$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x);$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0,$$

并分别称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和函数、差函数、积函数及商函数.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\sqrt{x}$ 的和、差、积、商函数分别为

$$(f+g)(x)=\sin x+\sqrt{x},\quad x\in[0,+\infty);$$
$$(f-g)(x)=\sin x-\sqrt{x},\quad x\in[0,+\infty);$$
$$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x}\sin x,\quad x\in[0,+\infty);$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}},\quad x\in(0,\infty).$$

而对于函数 $f(x)=\sqrt{1-x}$ 及 $g(x)=\ln(x-1)$,则不能进行四则运算,因为它们定义域的交集是空集.

1.3.2 复合函数

对于函数 $y=\sqrt{1-x^2}$,可以看成是将函数 $u=1-x^2$"代入"函数 $y=\sqrt{u}$ 中而得到的. 数学上称形如这样的运算为两个函数的复合.

定义 1.3.1 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=g(x)$ 的值域为 R_g. 如果 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$,记 $D_1=\{x|g(x)\subset D_f\}$,则对每个 $x\in D_1$,得到唯一的 $u=g(x)\in D_f$,从而又可得到唯一的 $y=f(u)$ 与 x 对应. 于是得到一个以 $x\in D_1$ 为自变量,y 为因变量的函数,记作 $y=f[g(x)]$,称为 $y=f(u)$(限制在 $D_f\cap R_g$ 上)与 $u=g(x)$(限制在 D_1 上)的复合函数,其中 u 称为中间变量,f 称为外层函数,g 称为内层函数.

例如,因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $D=[0,+\infty)$,$u=1-x^2$ 的值域 $R=(-\infty,+\infty)$,由于 $D\cap R\neq\varnothing$,所以它们可以复合,其复合函数为 $y=\sqrt{1-x^2}$,$x\in[-1,1]$.

对于幂指函数 $y=x^x$,因为 $x^x=e^{x\ln x}$,所以可以看成是由 $y=e^u$ 与 $u=x\ln x$ 复合而成的复合函数.

当 $D_f\cap R_g=\varnothing$ 时,函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 不能进行复合运算. 例如,$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数. 还应该注意的是,一般来说,函数的复合运算不能交换次序,即

$$f[g(x)]\neq g[f(x)].$$

有时复合函数不仅可以由两个函数,也可以由多个函数相继进行有限次复合而成. 例如,函数 $y=\arctan u$,$u=\ln v$,$v=1+x^2$ 可以复合成函数 $y=\arctan[\ln(1+x^2)]$,