全国普通高等教育基础医学类系列配套教材

高 斌 王洪雷 主编

医学物理学实验

科学出版社

全国普通高等教育基础医学类系列配套教材

医学物理学实验

主　编　高　斌　王洪雷

副主编　陈　萍

编　委　(以姓氏笔画为序)

陈　萍　陈龙聪　奉　娇　甘　平

高　斌　江奇锋　刘亚涛　苏爱华

王洪雷　熊兴良

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书根据教育部颁发的物理实验课程教学基本要求和实验课程建设标准，结合当前物理实验教学改革的实际要求编写而成。本书将开设的实验项目按不同层次和要求而编，层次分明、由浅入深，在编写时特别注重物理概念和定律的讲解，加强了现代物理技术及医学应用的介绍。本书力求重点突出、概念清晰，以适应不同专业学生对物理课程的要求。书中部分实验配有思考题，以便于读者更好地学习和掌握物理学实验的基本技能。

本书可以作为高等医学院校各专业学生物理实验的教材，也可以作为其他读者自学的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

医学物理学实验 / 高斌，王洪雷主编.—北京：科学出版社，2014.8

全国普通高等教育基础医学类系列配套教材

ISBN 978-7-03-040618-7

Ⅰ. ①医… Ⅱ. ①高… ②王… Ⅲ. ①医用物理学-实验-高等学校-教材 Ⅳ. ①R312-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 098199 号

责任编辑：胡治国 / 责任校对：胡小洁
责任印制：肖　兴 / 封面设计：范璧合

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 8 月第　一　版　　开本：787×1092 1/16
2014 年 8 月第一次印刷　　印张：8 1/4
字数：193 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　录

绪　论

物理学是一门实验科学. 要发现并掌握物理学的自然规律就必须进行科学实验,而且在已有知识的基础上, 通过大胆假设而建立起来的物理学理论, 也必须在实验中得到检验并进一步地发展和深化. 因此, 物理学是在科学实验和理论研究密切结合并且相互推动中发展的. 先进的物理实验的方法和技术以及物理科学的新成就不断地推动着生命科学和医学研究向前发展. 同时,物理学与医学相结合已经导致了不少边缘学科的诞生(例如, 生物医学工程、医学影像物理学、生物量子物理学等).

一、医学物理学实验课的目的和要求

所谓医学物理学实验就是在人为创造的条件下对自然现象进行观察和研究的科学实践. 它已经成为医学科学实验的重要基础之一. 应该指出, 医学物理实验相对物理学理论而言, 具有其相对的独立性, 它不单纯是验证性的实验, 它与医学研究有着直接的和间接的关系. 因此,医学物理实验课既是医学物理学教学的重要组成部分, 也由于它本身特有的目的和任务而具有相对的独立性.

物理规律的发现和物理理论的建立都必须以严格的物理实验为基础, 并受到实验的检验. 而且在进行新实验的设计、分析和概括时也必须应用已有的理论. 总之, 物理学的发展是在实验过程和理论推演两方面相互推动和密切结合下进行的. 医科院校大学阶段的医学物理学实验课程完全不同于中学阶段的物理学实验. 首先, 它是一门独立的实验课程,其成绩将单独记分, 最后计入物理学的总成绩; 其次, 它还肩负着对学生进行实验方法和实验技能训练方面的重任. 要求学生通过本课程的学习, 了解从事科学实验的主要过程及基本方法,从而得到从事科学实验的基本训练.

1. 医用物理实验课的目的

(1) 通过实验, 对学生进行实验方法和实验技能的基本训练, 使之掌握与医学密切相关的物理量(如长度、质量、时间、角度、电阻、电压、电流、电动势、光波波长、频率等)的测量原理和方法, 正确合理地使用仪器, 为后续的医学基础课和专业课的学习打下牢固的基础.

(2) 培养并逐步提高学生观察和分析实验现象以及理论联系实际的工作能力, 使学生进一步巩固和加深对物理规律和理论的理解.

(3) 培养学生严肃认真的工作作风、实事求是的科学态度和爱护国家财产、遵守纪律的优良品德.

2. 医学物理实验课的要求　要完成以上的教学任务, 必须做到以下几点要求:

(1) 课前预习: 认真阅读实验教程, 明确实验目的, 领会实验原理和方法, 了解实验步骤, 设计好实验数据记录表格, 通过预习掌握实验中用到的基本原理, 熟悉所用仪器各部分作用, 并接受实验指导教师的考查.

(2) 细心实验: 在开始实验前, 不准擅自使用所有实验仪器. 认真记住实验指导老师讲

解的实验注意事项，严格按照实验操作规程进行实验. 在教师指导下，正确地安装并调试仪器. 把仪器调整到正常使用状态，才进行实验，实验时首先读出并记录实验数据，复核无误后，再填入实验报告的表格中. 要求字迹要清楚，不乱画，不涂改，更不许编造数据，也不得抄袭他人的数据.

(3) 动手实验：要亲自动手做实验，要独立思考，每个同学都要有动手做实验的机会. 不能是某一个人在做实验，其余的人却在旁边只充当记录员或观察员. 应该提醒大家，大学期间学习的可贵之处就是在于它提供了许多系列的、精密的、贵重的仪器，同学们应该珍惜这个稍纵即逝的学习机会.

(4) 完成报告：认真地记录所测定的数据，并按实验要求进行数据处理，得出实验结果，写出误差的原因，总结经验教训，逐步提高实验技能. 实验报告要求内容完整、字迹清晰、表达明确、图表规范、分析有理，并符合实验指导老师的具体要求. 实验报告要求必须使用学校统一印制的实验报告纸书写,并且按时上交.

其内容一般如下：

【实验名称】 (要求居中)；

【实验目的】 根据实验指导教师的具体要求，并参照实验教材确定其实验目的；

【实验器材】 要求写出实验器材的名称、型号和规格等；

【实验原理】 要求用自己的语言简要地叙述，不要完全抄教材. 用简明的语言、公式或原理图等扼要地说明其实验的理论依据；

【实验步骤】 写出主要的实验操作步骤；

【实验记录】 自行设计(或参照本实验教程给出的) 实验数据的记录表格，用记录表格记录所有实验数据，并在坐标纸上画出实验曲线的图形；

【实验结论】 包含测量数据的计算结果、误差及测量结果的正确表示；

【实验思考】 对实验结果进行分析讨论，小结实验过程，回答思考题以及提出改进建议等.

二、重视物理实验现象的观察

物理学实验现象的观察是医学物理学实验过程中内容最丰富和最具有特色的部分. 通过实验现象的观察，可以由表及里、由此及彼地丰富测量数据的物理内涵. 一个训练有素的实验者总是善于从观察中去感觉、思考、分析、总结、认识和发现问题. 任何事物的客观规律都是通过相应的现象表现出来的，实验就是通过对这些现象的定性观察和定量测量来认识它们的，所以，整个实验过程离不开观察. 是否重视实验观察也反映了实验者的实验素养.

物理学史上一系列著名的发现都源于物理学家们丰富的理论知识和高超的实验素养. 他们善于通过实验观察获得重要发现，或是抓住偶然的机遇凭着敏锐的洞察力取得了意外的发现. 例如，物理学家牛顿对苹果落地现象的仔细观察，促使他思考并发现了著名的万有引力定律. 一个有准备、有目的、有设想的实验者与一个盲目的实验者在实验素养和实验收获上是有天壤之别的.

实验观察在整个实验过程中是十分重要的，希望同学们在医学物理学实验中要重视实验现象的观察，力争做到对实验现象认真全面、准确地观察，并注意思考、分析、总结，以

求有所发现.

三、测量与误差理论

物理实验的定性观察和定量测定是不可分割的两个方面，为了揭示物理量间的内在数量关系，必须运用测量器具对物理量进行科学测量.

1. 测量的定义　所谓测量就是将待测量与同类量的标准单位进行比较，其倍数值(可为整数也可为小数) 为该待测量测量值的实验过程. 要确定一个物理量的大小必须使用仪器来进行测量. 测量是人类认识和改造世界的重要手段之一，只有通过科学测量,才能对客观事物获得数量的概念;才能将测量结果进行归纳和分析，以总结出一般规律.

2. 测量的分类

(1) 按形式不同分类：测量按其形式不同分类可分为直接测量和间接测量两类.

1) 直接测量：能够用仪器直接读出测量值的测量，称为直接测量. 例如，用米尺测量人的身高，用磅秤称量人的体重，用停表测量人的心率，用天平称质量等这一类测量，都属于直接测量.

2) 间接测量：由一个或几个直接测量值，经已知函数关系计算出被测量最终测量值的测量. 许多物理量(如固体的体积、光波的波长等) 没有直接读数的仪表，只能用仪器测量一些必需的基本量，然后利用这些基本量，通过一定公式去计算待测量. 例如，活人体内肝脏的大小，通常就是利用超声诊断仪进行间接测量的；测球体的体积可先直接测出球的直径，再求出其体积来；又如，测量导体的电阻 R，可通过直接测量加于导体两端的电压 U 和流过两端的电流后，由公式 $R=U/I$ 计算出来等，这一类测量都属于间接测量.

(2) 其他分类：无论直接测量还是间接测量都又可分为单次测量和多次测量. 多次测量又分为等精度测量和不等精度测量. 在实验中对同一待测量，用同一仪器(或精度相同的仪器)，在同一实验条件下进行的多次测量称为等精度测量，否则，称为不等精度测量. 等精度测量得到的各个测量值的可靠性是相同的.

3. 误差理论的基本知识　在实际测量过程中总会有误差. 虽然随着科学技术的发展，可以将测量误差控制得愈来愈小，但误差仍然不可避免. 误差理论是计量科学的重要组成部分之一. 本课程仅对医学物理实验中所要涉及的误差理论知识作一个基本介绍，使同学们对误差理论有一个基本认识，并能将这种认识运用于实验数据的处理中.

(1) 误差的定义：在一定条件下，每一个物理量都具有一个不以人的意志为转移的确切值. 这个客观存在的确切值就正是该物理量的真实值，简称真值. 科学测量的目的总是力图得到真实值，但是由于实验理论的近似性、实验仪器的灵敏度和分辨能力的局限性、环境的不稳定性等因素的影响，测量值只能是真值的近似值. 因为在测量中仪器的精度总有一定的限制，不同测量者的主观观察能力各有所不同，外加由于外界环境的偶然变化也会对测量产生一定影响等，因此，任何测量值总是真值的近似值. 测量值与真值(或公认值)的偏差称为测量误差，简称误差.

(2) 误差的分类：根据误差的性质及产生分为系统误差、偶然误差和过失误差三种.

1) 系统误差

a. 定义：在同等条件下(方法、仪器、环境和测量者都不变) 多次测量同一量值时，符

号和绝对值保持相对恒定或按某一定规律变化的测量误差,称为系统误差. 这主要是由于实验仪器或装置的不完善、实验方法本身或理论的不完善等原因所引起的.

b. 特征: 系统误差的特征是其确切性. 例如,测量值总是有规律地比真值偏大, 或总是比真值偏小. 产生系统误差的原因主要有: ①仪器与调整误差: 测量仪器的缺陷或调节不准(如砝码的质量不准、仪器的零点不准或零点漂移); ②理论与方法误差: 测量方法欠佳(如公式的近似性较差达不到理论要求的条件); ③环境误差: 测量中未考虑某些确定性因素(如环境、温度、接触电阻、空气浮力等的影响); ④个人误差: 测量者个人的读数总是偏大或偏小等.

c. 消除: 系统误差应设法修正或消除. 主要方法有: 选用精度较高的仪器, 改进实验的设计及环境条件并改良测量者读数的习惯等.

2) 过失误差(粗大误差)

a. 定义: 由于测量者粗心大意、或实验条件发生突变或者因实验方法错误等原因而引起的测量误差, 称为过失误差(也称为粗大误差).

b. 特征: 它是在测量的客观条件下无法解释为合理的那些突出误差.这主要是观测者在观测、记录和整理数据过程中, 由于缺乏经验、粗心大意、疲劳等原因引起的. 此外, 实验方法错误、粗心大意或过度疲劳也会造成过失误差, 这与测量中的系统误差和偶然误差是有根本区别的.

c. 消除: 这种错误应当而且能够通过实验者采取严肃认真的态度、纠正实验方法、仔细认真地测量而加以克服. 在科学实验中,应该尽量消除过失误差.由于缺乏实验经验,刚进入实验阶段的学生容易出现过失误差.因此,应在实验指导教师的帮助下,不断总结经验,提高实验技能,尽量防止过失误差的出现.

3) 偶然误差(随机误差)

a. 定义: 在同一条件下多次测量同一物理量时, 测量值总是以不可预知的方式变化(在消除系统误差之后依然如此) 的测量误差, 称为偶然误差(也称为随机误差). 它是由许多不可预测的偶然因素所决定的. 它出现的机会和大小分布具有统计性规律,其规律性由数学分支《概率论与数理统计》加以研究.

b. 特征: 偶然误差(随机误差) 的特征是其随机性. 其测量值虽然比真值或偏大或偏小不定, 但服从一定的数学统计规律. 常见的情况是测量值比真值偏大或偏小的可能性(即几率) 相等; 小误差比大误差出现的几率大. 产生偶然误差的原因主要是由于人们感观(如听觉、视觉、触觉等) 分辨力的不尽相同, 表现为每个人对测量值的估读能力不一致; 周围环境因素的偶然变化(如环境温度、气流、气压等的波动, 杂散电磁场的干扰) 以及其他不可预测的次要因素的影响.

c. 减小: 偶然误差是不可避免的, 也是无法控制的.但因为偶然误差的出现服从一定的统计规律, 所以,可以通过一定的数学理论(称为误差理论) 来减小.例如,采用增加测量次数取平均值的方法来减小偶然误差.

(3) 偶然误差的估算: 由于系统误差和过失误差是可以消除的,因此在以下的讨论中, 约定在一般情况下系统误差和粗大误差已经修正或消除, 只讨论偶然误差对测量结果的影响.

1) 直接测量的误差估算

a. 单次直接测量的误差: 在医学物理学实验中, 由于条件的不许可或者测量准确度要

求不高等原因，对物理量只进行了一次直接测量. 在这种单次测量的情况下，可将仪器出厂检定书上的或仪器上直接注明的仪器误差作为单次测量的误差. 如果仪器上没有注明仪器误差，也可取仪器的最小刻度的一半作为单次测量的误差.

b. 多次直接测量的误差：一般情况下，待测量值的真值是不知道的. 根据误差理论的数学推导可知,为了减少偶然误差，在可能的情况下尽量采用多次测量的方法，将各测量值的算术平均值作为测量的结果. 例如，在同样条件下对某物理量的 n 次测量值分别为 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$，用 $\overline{X}$ 表示其算术平均值:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{0-1}$$

根据误差统计理论可知，在消除系统误差后，通过等精度多次测量的算术平均值最接近于真值，而且随着测量次数 n 的增加，算术平均值将愈来愈接近真值. 因此，在这种情况下，测定值的偶然误差可用算术平均偏差或均方根偏差表示出来.

算术平均偏差是各次测量值与算术平均值之差(称为偏差) 绝对值的平均值. 用 ΔX 表示算术平均偏差，则

$$\Delta X = \frac{1}{n}\left(\left|x_1 - \overline{X}\right| + \left|x_2 - \overline{X}\right| + \left|x_3 - \overline{X}\right| + \cdots + \left|x_n - \overline{X}\right|\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \overline{X}\right| \tag{0-2}$$

均方根偏差也称为标准偏差. 它是将各次测量值与平均值的差值先平方求其平均值，然后再开方.其表达式则为

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2} \tag{0-3}$$

算术平均偏差和标准偏差都可以作为测定值误差大小的量度. 它们都表示在一组多次测量的数据中，各个测量数据之间分散的程度. 如果算术平均偏差或标准偏差较大，则表示各数据之间差别较大，该测量不够精密.

有一种特殊情况：即重复测量 n 次，每次的测量值不变，这种情况并不是说明它的误差为零，而是说明此时的偶然误差相对于仪器的精度而言比较小，仪器的精度不足以反映出其微小差别. 这时可直接估读其绝对误差为仪器最小分度值的一半.

必须指出，误差是测量值与真值之差，而偏差是测量值与平均值之差，这两者是有差别的. 但当测量次数很多时，在仪器精确可靠的条件下，算术平均值将很接近真值. 因此，在常规的医学物理学实验中不必去区分偏差和误差的细微差别，而把算术平均偏差和标准偏差分别称为算术平均误差和标准误差 .

c. 测量结果的表示

绝对误差的表达式：测定值 X 最终结果(即测量结果) 的正确表达式为

$$X = \overline{X} \pm \Delta X \text{ (单位)}$$

或

$$X = \overline{X} \pm \sigma \text{ (单位)} \tag{0-4}$$

上式为所有实验报告(包括公开发表的科研论文) 中【实验结论】的最终表达式. 式中±号表示测量结果的误差范围，即每次的测量值可能比算术平均值 $\overline{X}$ 大一些，也可能比 $\overline{X}$ 小一些，

其误差范围的大小将由ΔX(或σ)表示，它在误差理论中有严格的数学定义. 例如，用直尺测得某人的身高为$L_1=(1.720\pm0.005)$m. 其中1.720m为测量的最终结果，而0.005m就是它的误差范围.

注意，式中的$\overline{X}$与ΔX(或σ)的物理单位必须统一；而且从下面的讨论可知：ΔX(或σ)将因为单次测量、多次直接测量和间接测量方法的不同而必须按照相应的计算方法进行具体的计算.

上述平均误差或标准误差都是以误差的绝对值形式来表示测定值的误差，称为绝对误差. 由于测量结果的精确程度不仅与绝对误差有关，而且与待测量本身的大小有关. 为此，在误差理论中还引入了相对误差概念.

相对误差的表达式：用E_r表示相对误差. 相对误差的定义为 $E_r=\dfrac{\Delta X}{\overline{X}}$.

另外，相对误差也常用百分比的形式来表示，故又称为百分误差. 即

$$E_r=\frac{\Delta X}{\overline{X}}\times100\% \tag{0-5}$$

举例说明相对误差的意义. 同样，用直尺测得某人的身高为 $L_1=\left(1.720\pm0.005\right)\mathrm{m}$，而他的食指的平均直径(将食指横截面近似看作圆形)为$L_2=\left(0.020\pm0.001\right)\mathrm{m}$，按照相对误差的定义它们分别为

$$E_{r_1}=\frac{0.005}{1.720}\times100\%=0.29\% \qquad E_{r_2}=\frac{0.001}{0.020}\times100\%=5\%$$

很显然，虽然后者的绝对误差比前者小，但其相对误差却比前者的大很多. 这说明前一个测量更准确些.

2) 间接测量的误差估算：由于间接测量是利用直接测量值通过一定的公式计算出来最终结果的，所以，既然公式中的直接测量值是有误差的，那么间接测量值也必然有误差. 它们两者之间的联系规律就是误差理论中的误差传递与合成理论.

假设N为间接测量值，而X、Y、Z、…为直接值，它们之间的数学函数关系为

$$N=f\left(X,Y,Z,\cdots\right) \tag{0-6}$$

如果各直接测量值的表达式为$X=\overline{X}\pm\Delta X, Y=\overline{Y}\pm\Delta Y, Z=\overline{Z}\pm\Delta Z$，…，将这些直接测量的表达式代入前面的公式，则可求得间接测量值的测量结果的最终表达式

$$N=\overline{N}\pm\Delta N(\text{单位}), \qquad E_r=\frac{\Delta N}{\overline{N}}\times100\%$$

式中，$\overline{N}=f\left(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\cdots\right)$为间接测量值的最佳值(或算术平均值)；而$\Delta N$为间接测量值的算术平均偏差(或标准偏差)，其具体计算方法如下.

a. 加减法运算的误差估算：假设 N 与 X、Y、Z 的函数关系为$N=X\pm Y\pm Z$，则有$N=\left(\overline{X}\pm\Delta X\right)\pm\left(\overline{Y}\pm\Delta Y\right)\pm\left(\overline{Z}\pm\Delta Z\right)$，所以，间接测量值的最佳值$\overline{N}=\overline{X}\pm\overline{Y}\pm\overline{Z}$

绝对误差 $\Delta N=\pm\Delta X\pm\Delta Y\pm\Delta Z$ 或 $\Delta N=\pm\Delta X\mp\Delta Y\mp\Delta Z$

考虑到最不利的情况可能出现的最大误差，

则

$$\Delta N = \Delta X + \Delta Y + \Delta Z \tag{0-7}$$

它们的相对误差为

$$E_r = \frac{\Delta X + \Delta Y + \Delta Z}{\overline{X} \pm \overline{Y} \pm \overline{Z}} \tag{0-8}$$

b. 乘除法运算的误差估算：假设 N 与 X、Y、Z 的函数关系为 $N=X\times Y$ 或 $N=X/Y$，其中 X、Y 为直接测量值，间接测量值的平均值 $\overline{N}=\overline{X}\cdot\overline{Y}$（或$\overline{X}\div\overline{Y}$）；则可以证明，它们的相对误差为

$$E_r = E_X + E_Y = \frac{\Delta X}{\overline{X}} + \frac{\Delta Y}{\overline{Y}} \tag{0-9}$$

式中 E_X 和 E_Y 为直接测量值 X、Y 的相对误差. 由于 $E_r = \dfrac{\Delta N}{\overline{N}}$，所以，其间接测量值的绝对误差为

$$\Delta N = E \cdot \overline{N} \tag{0-10}$$

综上所述，在直接测量值进行加减法运算时，其间接测量值的绝对误差等于各直接测量值的绝对误差之和；而在直接测量值进行乘除法运算时，它的相对误差等于各直接测量值的相对误差之和. 因此，当间接测量值的计算公式中只含有加减法运算时，一般方法是先计算绝对误差，再计算相对误差；而当计算公式中只含有乘除法运算时，则一般先计算相对误差，再计算绝对误差.

c. 一般运算的误差估算(误差传递与合成的基本公式)：设 $N = f(X,Y,Z,\cdots)$，则间接测量在一般情况下的误差公式可由对函数的全微分求得

$$\mathrm{d}N = \frac{\partial f}{\partial X}\mathrm{d}X + \frac{\partial f}{\partial Y}\mathrm{d}Y + \frac{\partial f}{\partial Z}\mathrm{d}Z + \cdots \tag{0-11}$$

上式称为误差传递与合成的基本公式. 式中，$\dfrac{\partial f}{\partial X}\mathrm{d}X, \dfrac{\partial f}{\partial Y}\mathrm{d}Y, \dfrac{\partial f}{\partial Z}\mathrm{d}Z, \cdots$ 各项叫做分误差；$\dfrac{\partial f}{\partial X}, \dfrac{\partial f}{\partial Y}, \dfrac{\partial f}{\partial Z}, \cdots$ 的数学术语为一阶偏导数，在误差理论中称之为误差的传递系数；$\mathrm{d}N$ 相当于间接测量值的绝对误差. 将式中的 $\mathrm{d}N, \mathrm{d}X, \mathrm{d}Y, \mathrm{d}Z, \cdots$ 分别用 $\Delta N, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \cdots$ 代表，并考虑到误差可能出现的最大值，右方各项均取绝对值，因此，绝对误差的传递与合成公式为

$$\Delta N = \left|\frac{\partial f}{\partial X}\Delta X\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial Y}\Delta Y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial Z}\Delta Z\right| + \cdots$$

若上述误差传递系数中的 $X, Y, Z, \cdots$ 分别用 $\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\overline{Z}, \cdots$ 代替，则得相对误差公式为

$$E_r = \frac{\Delta N}{\overline{N}} = \frac{1}{\overline{N}}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial X}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial Y}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial Z}\right| + \cdots\right) \tag{0-12}$$

表 0-1 列出了常用函数的误差传递合成公式. 在实际计算中发现，误差合成时起主要作用的常常只是其中一两项或少数几项分误差. 因此，当某一项分误差对总误差的贡献很小(例如，占总误差的 1/10 以下)时，则可把该项分误差略去不计. 这一结论在实验方法的设计

时非常重要. 在设计实际测量方法时, 对与主要分误差相关的直接测得量, 应选用高精度的仪器进行测量, 保证它具有较高的精确度; 对其他直接测得量其精度要求可低一些.

表 0-1 常用函数的误差传递合成公式

运算关系 $N=f(X, Y, Z, \cdots)$	绝对误差 ΔN	相对误差 $E_r=\frac{\Delta N}{\overline{N}}$
$N=X\pm Y\pm Z\pm\cdots$	$\Delta X+\Delta Y+\Delta Z+\cdots$	$\frac{\Delta X+\Delta Y+\Delta Z+\cdots}{\overline{X}\pm\overline{Y}\pm\overline{Z}\pm\cdots}$
$N=X\cdot Y\cdot Z$	$\overline{Y}\cdot\overline{Z}\Delta X+\overline{X}\cdot\overline{Z}\Delta Y+\overline{X}\cdot\overline{Y}\Delta Z$	$\frac{\Delta X}{\overline{X}}+\frac{\Delta Y}{\overline{Y}}+\frac{\Delta Z}{\overline{Z}}$
$N=\frac{X}{Y}$	$\frac{\overline{Y}\Delta X+\overline{X}\Delta Y}{\overline{Y}^2}$	$\frac{\Delta X}{\overline{X}}+\frac{\Delta Y}{\overline{Y}}$
$N=X^n$	$n\overline{X}^{n-1}\cdot\Delta X$	$n\frac{\Delta X}{\overline{X}}$
$N=X^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}\overline{X}^{n-1}\cdot\Delta X$	$\frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta X}{\overline{X}}$
$N=\sin X$	$\lvert\cos\overline{X}\rvert\cdot\Delta X$	$\lvert\mathrm{ctg}\overline{X}\rvert\cdot\Delta X$
$N=\cos X$	$\lvert\sin\overline{X}\rvert\cdot\Delta X$	$\lvert\mathrm{tg}\overline{X}\rvert\cdot\Delta X$
$N=\mathrm{tg}X$	$\frac{\Delta X}{\cos^2\overline{X}}$	$\frac{2\Delta X}{\lvert\sin 2\overline{X}\rvert}$
$N=\mathrm{ctg}X$	$\frac{\Delta X}{\sin^2\overline{X}}$	$\frac{2\Delta X}{\lvert\sin 2\overline{X}\rvert}$
$N=\ln X$	$\frac{\Delta X}{\overline{X}}$	$\frac{\Delta X}{\overline{X}\ln\overline{X}}$

4. 实验数据的记录　由于测量误差的客观存在, 在测量中从仪表直接读出的直接测量数据只能是近似值, 而且通过这些近似值计算从而求得的间接测量值也必然是近似值. 只有按照一定的规则来正确记录和计算这些近似值, 才能正确地表示出实验记录的真实数据. 整个实验过程也才真正具有科学意义. 为此, 规定将直接测量结果的数值记录到开始有误差的那一位为止.

(1) 有效数字的基本概念: 在数学中, 将只有末位是可疑数值的数值称为有效数字. 在测量中, 按照"将直接测量结果的数值记录到开始有误差的那一位为止"的规定, 通常将从仪表读出的数字估计到仪表最小分度值的下一位(注意: 有例外情况. 例如, 游标卡尺等). 例如, 用最小分度值为厘米的直尺测量一块物体的长度(图 0-1 所示), 三个人分别读出 3.4cm, 3.3cm, 3.5cm. 它们的前一位数 3 都是从直尺上直接读出的确切数字, 称为可靠数字; 然而, 它们的末位数值 4, 3 和 5 则是由测量者分别估读出来的, 其结果将因人而异, 称为可疑数字. 所以, 选用最小分度值为厘米的直尺测量物块长度的测量值将包含两位有效数字. 但是, 如果用最小分度值为毫米的直尺测量上述物块的长度, 则可分别读出 3.42cm, 3.43cm, 3.44cm. 显然, 此时前两位数字为可靠数字, 而第三位才是可疑数字, 所以测量值共有 3 位有效数字. 由此可见, 同一测量可能有不同的测量值, 这将取决于所用测量仪器的精度.

另外, 对于可疑数字有两点值得注意: ①它虽属于可疑, 但不是无中生有. 在一定程度上反映了客观实际, 是不能任意取舍的; ②它是估计出来的, 因此具有误差.

(2) 直接测量时有效数字的记录: 在直接测量时从实验仪器上读数时, 所有显示仪器的读数中将带有一位估读数位.一般有两种情况: 非数字显示仪器的读数和数字显示仪器的读数.

1) 非数字显示仪器的读数: 在非数字显示仪器的读数中将带有一位估读数位. 一般而言, 测量时应该估读到所用仪器最小分度值的十分之一. 如果读到仪器最小分度值的十分之一有困难, 则至少要估读到所用仪器最小分度值的二分之一.

例如, 用分度值为 lmm 的直尺测量物体长度应估读到毫米的十分位. 如在图 0-1 中, 物体长度写为 3.42cm. 该读数的有效数字有 3 位, 其中的“3.4”是准确可靠的, 是可靠数字; 而“2”是估计出来的, 是可疑数字. 在读数时不要漏掉是“0”的估读位. 若正好与刻度线对齐, 则应该在后面加“0”; 如果读到仪器最小分度值的十分之一有困难, 则至少要估读到所用仪器最小分度值的二分之一; 对于所用仪器最小分度值是“2”和“5”等大于 1 的仪器, 则只好估读到所用仪器最小分度值所表示的那一位上.

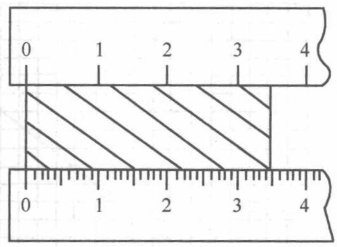

图 0-1　长度的测量

在实验时, 所有测量值都必须严格地按照有效数字的规定正确记录, 其位数不能少写, 更不能多写. 在进行有效数字的记录时, 还需要注意:

a. 因为有效数字的位数与测量的准确度有关, 所以在对测量值作单位变换时, 有效数字的位数不能改变, 而且与小数点的位置无关.

例如, 把 8.42cm 换成以微米(μm)为单位时, 不应该改写成为 84 200μm, 因为这样会增加了小数点的位数, 而应该用科学计数法写成 8.42×10^4μm, 仍然保持三位有效数字. 同样, 把 8.24cm 换成以米(m)为单位时, 不应写成 0.0842m, 而应写成 $8.42\times10^{-2}\,\mathrm{m}$. 在用科学计数法时, 经常小数点的前一位取 1 位有效数字.

b. 如果在实际测量中得到的数字的中间或最后 1 位甚至几位都是“0”, 则这些“0”都是有效数字(如 12.00). 这些“0”表示了测量值的准确程度, 因而是不能任意增减的.

2) 数字显示仪器的读数: 对数字显示的实验仪器同样将带有一位估读数位. 由于全体数字示值都属于有效数字, 所以,它的最后一位就是可疑数字.

(3) 实验数据的列表记录: 在处理实验数据时, 将数据列表可以简单而明确地表示有关的物理量之间的对应关系, 找出其规律性, 便于及时发现测量中或运算中所出现的问题, 并设法解决这些问题. 这样有利于简化某些运算和分析误差, 必要时这些数据还可以随时查对.

因此, 在物理实验中要求尽可能地使用列表法记录实验列表数据. 为了充分发挥列表记录的作用, 要求表格的设计简单明了, 便于看出有关物理量之间的关系. 列表时必须有表名, 表中将列表说明各栏目中的符号所代表的物理意义, 并在标题栏中标明单位. 表中的数据要正确地按照有效数字记录的有关规定真实地反映测量结果; 必要时应对表格加以说明. 表 0-2 是在恒定温度下用伏安法测定某电阻的数据记录.

表 0-2 伏安法测定电阻的数据记录

电压 U(V)	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00
电流 I(mA)	0.0	15.6	34.2	50.8	65.6	82.5	120.5	118.2	132.0

(4) 实验数据的图示法: 除上述的数据列表法以外, 还可以用坐标平面上的实验曲线直观地表示有关物理量之间的关系, 这种方法称为图示法. 例如, 要用图示法表示表 0-2 中电流和电压之间的关系. 图示法一般应该按以下作图规则进行:

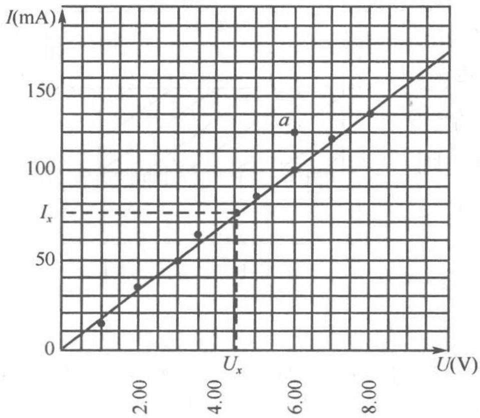

图 0-2 电流与电压的关系图

1) 选定坐标: 一般情况下, 选用适当大小的直角坐标纸来作图. 以横轴代表自变量 U, 纵轴代表因变量 I, 分别用粗细适当的实线来表示横轴和纵轴. 在轴的末端近旁写明所代表的物理量及其单位, 如图 0-2 所示. 在某些情况下, 根据需要也可以用对数坐标纸、半对数坐标纸来作图.

2) 选定标度和写图名: 一般在图纸空出的部位, 用简洁的图名来表示两个物理量的关系(如图 0-2 中的"电流与电压的关系图"), 在图名下还可附加必要的说明.

根据测量数据的范围分别对坐标轴进行标度. 标度的原则是: 图上测量点坐标读数的有效数字位数应与实验数据的有效数字大体相同. 例如, 对于直接测量的物理量, 轴上最小格的标度可与测量仪器的最小刻度相同. 为了便于在图上直接读数, 通常选用 1、2、5 等数字来标度刻度, 一般而不选用 3、7、9 来标度. 为了让图线尽可能占据坐标纸的大部分, 而不至于偏居一角或一边, 横轴和纵轴可以选用不同的标度. 两轴的交点也可以不在零点, 而选取比最小数据小一点的整数开始标度(但此时必须分别标出横轴和纵轴分别选取的起点值). 如果某个量的数据特别大或特别小, 也可以提出乘积因子(如$\times10^5$、$\times10^{-2}$等) 放在相应坐标轴上最大值的右边.

3) 描点和连线: 根据实验数据先用削尖的铅笔在坐标纸上进行描点. 为了使描点醒目, 并在保留数据点, 通常用+、×、⊙、△、□等符号来描绘不同曲线的点, 符号的中心为实验数据, 符号的大小决定于两个物理量的最大绝对误差. 同一条图线上的点必须用同一种符号. 如果图上有几条图线, 则每条图线分别选用一种不同的符号以示区别, 并在图的适当部位加以说明. 除了作仪器的校正曲线时, 特别要求要通过校正点连成折线外, 一般情况下使用绘图工具把点连成光滑的曲线或直线. 连线时尽量使图线贴近大多数测量点通过(个别严重偏离图线的测量点, 如图 0-2 中的 a 点应舍弃), 使测量点均匀分布在图线的两侧.

5. 实验数据的处理　物理实验研究的目的不仅是对某一物理量的单一测量, 更重要的是要研究各物理量之间的相互依存关系和变化规律. 因此, 在函数关系的测量中至少应包含两个物理量: 一个是"自变量", 另一个是"因变量", 且是"自变量"的对应函数值. 在进行这样一组函数测量时, 首先要考虑如何合理记录数据, 又要考虑如何处理这些数据. 本节介绍实验数据处理的相关知识及基本方法.

(1) 有效数字与误差的关系

1) 与绝对误差的关系：根据有效数字的定义，有效数字的最后一位是存在误差的可疑数字，因而测量结果的有效数字的位数完全取决于绝对误差的大小. 所以，确定最终测量结果的有效数字位数原则是：有效数字的最后一位必须与绝对误差的最后一位对齐.

其具体步骤是：

a. 根据测量仪器的精度以及有效数字相关的数学运算规则，计算出绝对误差的大小；

b. 根据“在一般情况下，绝对误差的有效位数只能取一位(除第一位有效数字是 1 可以取两位的特殊情况除外)”，确定绝对误差的有效位数；

c. 最终测量结果的有效数字的最后一位必须与绝对误差的最后一位对齐.

例如，$L=12.00\pm0.02(\mathrm{cm})$ 是正确的，而写成 $L=12.0\pm0.02\mathrm{cm}$ 是错误的.

2) 与相对误差的关系：测量数据的有效数字位数与相对误差有一定关系. 大体上讲，测量仪器的精度越高，则有效数字的位数越多，因此，相对误差就越小. 反之，有效数字的位数越少，则相对误差就越大.

(2) 有效数字的运算规则：根据误差理论，有效数字的运算必须遵守一定的规则. 总的说来，可靠数字与可靠数字进行四则运算，结果仍为可靠数字. 可疑数字与可靠数字、可疑数字与可疑数字进行四则运算，其结果为可疑数字. 计算时，为区别起见，在可疑数字下数加一横线.

1) 有效数字的加减运算

例 1

$$\begin{array}{rl} & 236.\underline{6} \\ + & 2.28\underline{3} \\ \hline & 238.\underline{7}8\underline{3}=238.\underline{8} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 541.63\underline{2} \\ - & 524.3\underline{1} \\ \hline & 17.3\underline{22}=17.3\underline{2} \end{array}$$

以上例子说明，有效数字进行加、减运算时，先把小数点位数对齐，并以其中可疑数字最靠前量为准. 读者可以试一试，如果事先以可疑数字最靠前的量为准进行取舍，取齐各量的尾数，则加减的结果仍然相同.

2) 有效数字的乘除法

例 2

$$\begin{array}{rr} & 4.3\ \underline{8} \\ \times & 1.\underline{1} \\ \hline & \underline{438} \\ & 43\underline{8} \\ \hline & 4.\underline{818}=4.\underline{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21\underline{9}.\underline{5} \\ 26\underline{2}\sqrt{5750\underline{9}} \\ 52\underline{4} \\ \hline 5\underline{1}0 \\ 26\underline{2} \\ \hline 2\underline{489} \\ \underline{2358} \\ \hline \underline{1310} \\ \underline{1310} \end{array}$$

以上表明：两个有数数字相乘(或除) 的积(或商) 的有效数字，在有数位数上与两数中

有效数字位数少的相同.

3) 有效数字的其他运算

a. 乘方和开方: 乘方、开方的有效数字的位数与其底数的有效数字的位数相同;

b. 对数: 有效数字的位数与真数的有效数字位数相同;

c. 三角函数的有效数字的位数与其角度的有效数字位数相同;

d. 混合运算中, 结果的有效数字位数比按规定运算多保留一位;

e. 常数 π、e、$\sqrt{2}$ 等的有效数字位数, 在运算中通常取得与各个量中有效数字位数量最少的有效数字位数相同. 指定数(如测量次数 n)的有效数字位数不影响结果的有效数字位数.

4) 有效数字的取舍规则: 在有效数字的运算过程中, 多余可疑数字的取舍将按照国家计量技术规范 JJG1027－91 规定.其取舍规则可简单地概括为; 大于 5 入, 不足 5 舍. 等于 5 凑偶. 这样的取舍上比单纯的 4 舍 5 入规则更具有科学性.

例如: 今有如下 5 个测量值: A_1=3.141; A_2=1.126; A_3=1.31502; A_4=3.5150; A_5=2.1650.

现欲取为 3 位有效数字, 则它们拟舍去的数字分别为 16; 502; 50 和 50,

按上述的取舍规则可得 A_1=3.14; A_2=1.13; A_3=1.32; A_4=3.52; A_5=2.16.

(3) 利用实验曲线求未知物理量

1) 内插法: 虽然在物理实验中测得的数据个数是有限的, 但是可以利用实验曲线上任一物理量求出另一相应物理量的数值. 例如, 在图 0-2 中, 由直线上实验数据范围内的某个电流数值 I_x, 则可以利用实验曲线求出对应的电压 U_x 的数值, 这种方法称为内插法.

2) 外插法: 在一定的条件下, 也要根据曲线的走向趋势, 用虚线画出曲线的延伸部分, 从而求出测量数据范围以外的点所对应的物理量, 这种方法被称为外推法. 注意: 外推法往往存在较大误差(特别是曲线), 甚至包含一定的冒险性, 要谨慎使用.

(4) 实验数据的图解法: 利用数学中的解析几何知识, 由实验曲线求出相应经验公式的方法, 称为图解法. 医学物理学实验中常遇到的曲线大多数属于普通曲线类, 例如直线、抛物线、双曲线和指数曲线等. 如果由作出的曲线可判断为一条直线, 则可假设该直线方程的形式为

$$Y=aX+b \tag{0-13}$$

然后在该直线上靠近两端处选择两点(X_1, Y_1)和(X_2, X_2), 把线上两点 X 和 Y 的数值(注意: 不用原始实验数据) 分别代入直线方程就有:

$$Y_1=aX_1+b \qquad Y_2=aX_2+b$$

两式联立就可求出该直线的斜率 a 和截距 b, 于是得到与实验曲线相适应的经验公式. 由于直线是能够高度精确地画出的曲线类型, 因而在遇到实验曲线不是直线的情况时, 只要能通过坐标代换将非直线曲线改成直线, 则不仅可以精确地作图, 而且也便于求出相适应的经验公式. 例如, 在放电实验中, 测量电容器极板间的电压 U 随时间 t 的变化, 可作出 U-t 实验曲线, 并判断为指数衰减曲线, 那么, 可以假设经验公式为

$$U = E\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{0-14}$$

式中 E 和 τ 是需要由图解法求出的常数. 对上式两端取自然对数得

$$\ln U = -\frac{1}{\tau}t + \ln E \tag{0-15}$$

如果在自然对数坐标纸上以 t 作横轴，$\ln U$ 作纵轴描图，则上述公式的图线为一条直线，该直线的斜率为$-1/\tau$, 直线在 $\ln U$ 轴上的截距为 $\ln E$. 由此可直接算出常数 E 和 τ. 最后，可确定出描述放电实验的具体经验公式. 根据电容器放电原理可知，上式中 E 是放电刚开始时电容器极板间的电压，τ 为时间常数，它决定着放电的快慢. 综上所述，由于进行了坐标变换，将曲线改成了直线，所以,求经验公式也就简便多了.

(5) 实验数据的逐差法：对实验数据进行逐差法处理可以充分地利用有限的测量数据，尽量地减小偶然误差.

由误差理论知道，算术平均值最接近真值，因此，在实验中应尽量实现多次等精度重复测量. 但在有一些实验中，如果简单地取各次测量的平均值，并不能达到好的效果. 例如在张力系数的测定时，如果每次增加的重量为 1 克，连续增重七次，则可读得八个标尺读数，它们分，x_0; x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7 其相应的差值是 x_1-x_0; x_2-x_1; x_3-x_2; x_4-x_3; x_5-x_4; x_6-x_5; x_7-x_6. 根据差值平均值的定义

$$\Delta X = \frac{(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_4-x_3)+(x_5-x_4)+(x_6-x_5)+(x_7-x_6)}{7} = \frac{(x_7-x_0)}{7}$$

其结果是中间值全部抵消，只有始末二次测量值起作用，与增重 7 克的单次测量等价.

为了使其保持多次测量的优越性，对如此的实验数据常采用逐差法进行数据处理.

逐差法的适用条件和具体步骤如下：

a. 适用条件：逐差法只适用于自变量为等间距变化，而且测量数据为偶数个的实验.

b. 具体步骤：首先,把原始测量数据依顺序分成两组；然后，求出两组中对应序号的测量值之差的平均值;最后，求出每次增量的平均值.

例 3　将相同质量的砝码依次逐个地加在一铅直悬挂的弹簧上.分别测得弹簧的长度为 x_0; x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7, 欲利用一次性逐差法求出每加一个砝码弹簧的平均伸长量.

解：首先,把测得的实验数据分成两组(x_0; x_1; x_2; x_3)和(x_4; x_5; x_6; x_7);

然后，将每相差 4 个砝码时的弹簧长度相减(即伸长量) 求出其平均值:

$$\Delta\bar{X} = \frac{(x_4-x_0)+(x_5-x_1)+(x_6-x_2)+(x_7-x_3)}{4}$$

注意：上式为增重 4g 的平均差值.

最后,求出每加一个砝码弹簧的平均伸长量:

$$\Delta x = \frac{\Delta\bar{X}}{4}$$

此外，实验数据处理的方法还有最小二乘法等，而且大多数实验数据的处理方法现在已经可以借助计算机软件辅助完成.请同学们参考有关文献.

【思考题】

1. 判断下列情况产生的误差哪些属于偶然误差？哪些属于系统误差？

(1) 米尺受热膨胀；(2) 视差；(3) 作电学实验时电源电压的波动；(4) 天平的砝码质量不准；(5) 直接用电压表测电动势；(6) 水银温度计毛细管不均匀.