高中一年級

平面几何
补充教材

浙江省中小学教材編輯委員会編

浙江教育出版社

第一章 相似形

I. 綫段的度量

（一）第七节“关于綫段的度量的概念”，課本第12頁第二行至第三行中删去括弧，保留原文；为了便于理解这段反証論据增加同学自学材料“循环小數化分数”的說明；說明內容如下：

循环小数有純循环小数和混环小数两种。

1.純循环小数化分数

例如化 $0.\dot{6}$ 为分数。

設 $x=0.666\cdots\cdots$.

則 $10x=6.666\cdots\cdots$.

于是 $10x-x=6.\dot{6}-0.\dot{6}$,

即 $$9x=6,$$

$$\therefore \quad x=\frac{9}{6}.$$

又如化 $0.\dot{3}\dot{2}$ 为分数。

設 $x=0.\dot{3}\dot{2}$,

則 $100x=32.\dot{3}\dot{2}$.

于是 $100x-x=32.\dot{3}\dot{2}-0.\dot{3}\dot{2}$,

即 $$99x=32,$$

$$\therefore \quad x=\frac{32}{99}.$$

一般説，純循环小数化分数只要把循环节当分子，环循节内数字的数目相等个 9 当分母即可。

2. 混循环小数化分数

例如化 $0.3\dot{1}\dot{8}$ 为小数，

因为
$$0.3\dot{1}\dot{8}=3.\dot{1}\dot{8}\div10=(3+0.\dot{1}\dot{8})\div10$$
$$=\left(3+\frac{18}{99}\right)\div10=3\frac{18}{99}\div10=\frac{318-3}{99}\div10,$$

所以
$$0.3\dot{1}\dot{8}=\frac{318-3}{990}=\frac{315}{990}.$$

一般説，混循环小数化分数只要拿第二循环节以前的数减去第一循环节前的数的差当分子，拿与循环节内数字数目相等个 9 加上与由小数点到循环节前数字数目相等个零当分母即可。

以上說明了任何循环小数都可以化成分数。

（二）在第七节与第八节之間卽在第 **12** 頁第 **12** 行之后增加“游标尺与螺旋測微計”一节。

游标尺与螺旋測微計

我們已經从理論上解决了用数来表示綫段長度的問題。可是在实际測量求得綫段的絕对准确的量数是不可能的，实用上也不需要，譬如甲乙两地相距多少远，一般是說到里为止，如果有人回答到公分、公厘，非但多余而且好笑。不过实用上由于各类問題的性質不同，要求綫段量数的准确度也不一致，制造精密仪器的工厂所需要的准确度就很高，农村大量土地面积所需要的就較低，一般工业生产上要求綫段量数准确到 0.01,0001（公分）是很普遍的。我們应該掌握使用这种准确度到 0.01 与 0.001 公分的長度測量工具的本領。

1. 游标尺　普通用的直尺刻度只到公厘（毫米），精确度只到

0.5 公厘，不能满足很多实际問題的需要，如果我們要使測量准确到 0.1 公厘，就要应用一种工具叫做游标尺。（如图 1）

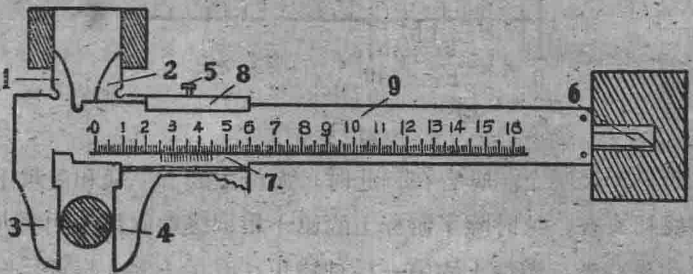

图 1

1,2,3,4—表示四个測脚； 5—表示螺釘； 6—狹片；
7—切口，附有刻度叫做游标； 8—滑动片； 9—直尺，也叫作主尺。

游标尺有两个主要部分一个是一条直尺，一个是一条可以沿着直尺滑动的游标。

这直尺与两只測脚 1 和 3 連牢在一起，尺身上套一个可以沿尺自由滑动的滑动片 8，滑动片上与另外两只測脚 2 和 4 連，牢在一起，滑动片 8 可由螺釘 5 来固定，滑动片的前面切去一部分可以露出直尺上的刻度，在切口 7 的斜面上有游标刻度。在滑动片的背面連結着一根狹片 6，这个狹片嵌在直尺背后的一个凹槽里，可以自由滑动。

上图所示的游标尺有三种应用：(1)利用測脚 1，2 可以測量槽的寬度；(2)利用測脚 3，4 可以測量零件的厚度；(3)利用狹片 6 可以測量槽和筒的深度。

游标尺的使用法和它的原理說明如下：

最簡單的游标刻度，常把相当于直尺上的 9 个公厘的距离分成十等分，作为游标的刻度，也就是游标刻度的再一等分等于$\frac{9}{10}$公厘。（如图 2）

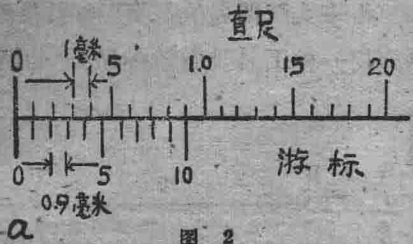

图 2

当游标尺两个测脚合在一起时，游标上的零刻綫和直尺上的零刻綫相重合，这时除了游标上的第十根刻綫和直尺上的第九根刻綫相重合外，游标上的第一根刻綫正在直尺上第一根刻綫左边的 0.1 公厘处，第二根刻綫正在直尺上第二根刻綫左边的 0.2 公厘处，依此类推。

如果在两測脚間放一張厚为0.1公厘的紙片，那末游标尺就向右移动0.1公厘，这时游标上第一根刻綫就和直尺上第一根刻綫相重合。如果在两測脚間放一块为0.2公厘的薄片时，那末游标上第二根刻綫就和直尺上第二根刻綫相重合，依此类推。

所以只要被測薄片的厚度不到 1 公厘时，那末游标上第几根刻綫和直尺上一根刻綫相重合时，游标上所指的这根刻綫数就表示被測薄片的厚度是十分之几公厘。

如果測量大于 1 公厘的長度时，整的公厘数可由游标零刻綫所指的紧靠左边的直尺上的刻度直接讀出，而十分之一公厘数，由游标上和直尺上某一根刻綫相重合的刻数决定。如图 3 就表示被

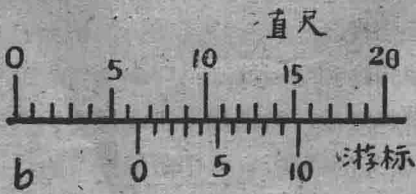

图 3

測物体的長度是 6.4 公厘。

游标尺又名測徑器，在工厂里常叫卡尺。

2. **螺旋測微計（又名千分尺）**

如果要測量厚度直徑等尺寸更准确到 0.01 公厘时就得应用一种工具叫做螺旋測微計的。（如图 4）

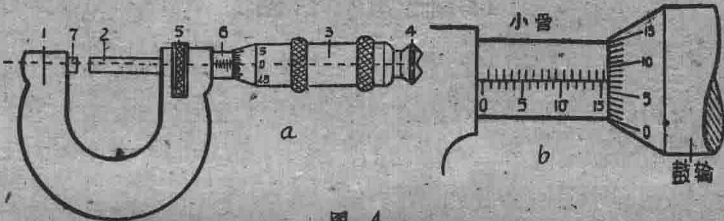

图 4

1—表示曲柄；　2—小軸；　3—鼓輪；　4—保护旋鈕；

5—栓环；　6—刻度小管；　7—小砧。

螺旋測微計有两組主要部分，一組是曲柄 1 及小管 6 互相連牢在一起，另一組是鼓輪 3 及小軸 2；后一組可以相对于前一組而轉动。

小管 6 里边刻有阴螺旋，小管上刻一横綫在横綫旁刻有互相隔开半毫米的公厘刻度。曲柄一端固定着小砧 7，一端附有栓环 5。鼓輪 3 另外連接着刻有阳螺旋的小軸 2，鼓輪的一端綫圓錐形的边緣上刻有 50 等分的刻度，每隔 5 个刻度标明一个数字（0，5，10，15 等）。鼓輪后端附着一个帶有棘輪的保护旋鈕 4 作为旋轉鼓輪时用的。

当被測物体放在固定的小砧 7 和可以轉动的小軸 2 之間时，小軸 2 由于鼓輪 3 的轉动，就和砧靠近或远离，鼓輪是由旋鈕 4 来保护旋轉它。讀数时还可以用栓环 5 固定小軸 2 以免滑动。

当鼓輪在零位置时它的边緣和小管上的零刻綫相重合，同时它的边緣上的零刻綫和小管上的横綫相重合。当鼓輪向后旋轉一

周时小軸离开了小砧0.5公厘，这时小管6便露出表示半公厘的刻度綫。所以鼓輪旋轉了边緣上的一个刻度时小軸2和小砧7之間的距离就改变了0.01公厘(0.5公厘÷50)，如上图所示被測物体的尺寸是16公厘+0.07公厘=16.07毫米。

II. 三角形的相似

(一)第17頁第一行(第11节)里删去“很明显的”改为：

由相似三角形的定义，得

推論 如果两个三角形相似，那末和其中的一个全等的三角形也和另一个相似。

已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

求証 $\triangle DEF \backsim \triangle A'B'C'$

証明 $\because \quad \triangle ABCC \backsim \triangle A'B'C'$

$$\therefore \quad \angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C' \tag{i}$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'} \tag{ii}$$

又$\because \quad \triangle ABC \cong \triangle DEF$

$$\therefore \quad \angle A=\angle D,\ \angle B=\angle E,\ \angle C=\angle F \tag{iii}$$

$$AB=DE,\ BC=EF,\ CA=FD \tag{iv}$$

由(i)与(iii)得 $\angle D=\angle A'$，$\angle E=\angle B'$，$\angle F=\angle C'$；

(iv)代入(ii)得 $\dfrac{DE}{A'B'}=\dfrac{EF}{B'C'}=\dfrac{FD}{C'A'}$

因此 $\qquad \triangle DEF \backsim \triangle A'B'C'$

(二)第20頁第九行(在12节里)的推論改为推論1，并增加推論2。

推論2. 如果一条直綫分三角形的两边成比例，那末这条直綫平行于三角形的第三边。

已知　在$\triangle ABC$中$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$

求証　$DE \parallel BC$

証明　过C点作$CF \parallel BD$，交DE的延長綫于F点。再在EA，ED上取$EG=CE$，$EH=EF$，联GH，則$\triangle CEF \cong \triangle GEH$.

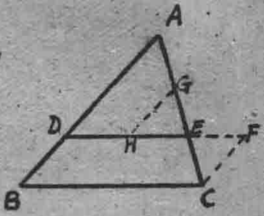

图 5

$$GH \parallel CF \parallel AD,$$

由定理　$\triangle ADE \backsim \triangle GHE$,

$$\therefore\quad \triangle CFE \backsim \triangle ADE.$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{CF}=\frac{AE}{CE}$$

已知　$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{CE}$$

得　$$\frac{AD}{CF}=\frac{AD}{DB}$$

得　$$CF=BD$$

已作　$$CF \parallel BD$$

$$\therefore\quad BCFD\text{ 是一个平行四边形,}$$

$$\therefore\quad DE \parallel BC$$

（三）在第15节里增加以下例題：

例題1.　設工厂烟囱所投下的影長为m，插在地上的标杆所投下的影長为n，今測得$m=59.6$公尺，$n=11.8$公尺（都精确到0.1公尺）。如果标杆的長$a=7.50$公尺（精确到0.01公尺），試求烟囱的高h。并說明答案的准确度。

解　由图6可知，h，m都是同一个直角三角形的直角边，而a，n都是另一个直角三角形的直角边。这两个直角三角形对于地平

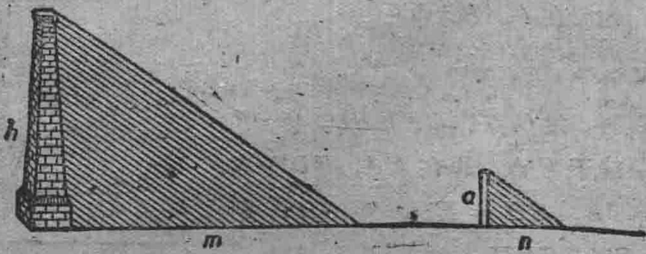

图 6

面的两个銳角相等，因此相似。

$$\frac{h}{a}=\frac{m}{n},$$

$$h=\frac{ma}{n},$$

即 $$h=\frac{59.6\times7.50}{11.8}\approx\frac{447}{11.8}\approx37.9$$

答烟囱高37.9公尺，答案的第一、二位数字有效，而第三位数字9可疑。根据近似計算的道理，答案的絕对誤差不超过：

$$37.9\times\left(\frac{0.1}{59.6}+\frac{0.01}{7.50}+\frac{0.11}{11.8}\right)=37.9\times\left(\frac{1}{596}+\frac{1}{750}+\frac{1}{118}\right)$$

$$\approx37.9\times(0.00168+0.00133+0.00848)$$

$$\approx37.9\times0.0115\approx40\times0.01=0.4.$$

即答案精确到0.4公尺。

例題 2. 一个三角形的底边等于12公尺，底上的高为6公尺，在这个三角形內內接一个正方形，正方形的两个頂点在底边上，其他两个頂点在三角形的側边上，求內接正方形的边長。

解 如图7，$BC=12$ 公尺，

$AD=6$ 公尺，$LMNP$ 是內接正方形。

$$\therefore\quad MN\parallel BC,$$

$\because \triangle AMN \backsim \triangle ABC.$

以 x 公尺表示正方形的边長，

則 $AE = AD - DE = 6 - x.$

相似三角形中对应高与对应边成比例，

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AD}{AE}$$

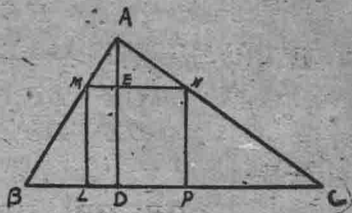

图 7

即
$$\frac{12}{x} = \frac{6}{6-x},$$

$$6x = 72 - 12x,$$

$$18x = 72,$$

$$x = 4.$$

答：正方形的边長等于 4 公尺

例題 3. 已知三条綫 OA, OB, OC 中 $\angle AOB = 120°$，OC 是 $\angle AOB$ 的平分綫，今被一直綫所截，截綫的 OA、OB、OC 交点順次为 D、E、F，試証：$\frac{1}{OF} = \frac{1}{OD} + \frac{1}{OE}$。并实际測量 OD, OE, OF 的長度精确到 0.1 公厘，再以 OD, OE 的量数代入以上关系式計算出 OF 的近似值，比較 OF 的实測量数与計算而得的近似值。

証明 过 F 作 $FG \parallel OB$，則

$\triangle OED \backsim \triangle GFD$

$$\frac{FG}{OE} = \frac{DF}{DE}. \qquad \text{(i)}$$

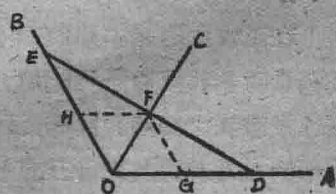

图 8

过 F 作 $FH \parallel OA$，

則 $\triangle EOD \backsim \triangle EHF$，

$$\frac{HF}{OD} = \frac{EF}{DE} \qquad \text{(ii)}$$

由于 $\triangle OGF \cong \triangle OHF$ 而且都是等边三角形，

$$\therefore \quad HF=FG=OF$$

代入(i)与(ii)得:

$$\frac{OF}{OE}=\frac{DF}{DE}; \quad \frac{OF}{OD}=\frac{EF}{DE}.$$

于是

$$\frac{OF}{OD}+\frac{OF}{OE}=\frac{EF}{DE}+\frac{DF}{DE}=\frac{DE}{DE}=1,$$

$$\therefore \quad \frac{1}{OD}+\frac{1}{OE}=\frac{1}{OF}.$$

至于实测与近似計算部分由讀者自做。并把这种图解法計算設法推广到

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{R_n}.$$

情形，物理学上要用到它。(提示：从 O 点出发畫六条射綫，每相鄰两条射綫的交角都是 60°)

附实习作业(一)(二)

实习作业(一)

用相似三角形測距离

在工农业的基本建設上或軍事上經常要用到測量，但是很多的測量对象我們却不可能用刻度尺直接去測量的。例如山高、河寬以及敌我之間的距离等，虽然我們可以应用三角形的全等定理，图形的軸对称性質以及三角形两边中点的联綫性質等的知識去解决，但是在实际測量中，我們往往不能在地面上画出全等三角形或軸对称图形等来。現在学习了相似三角形的理論以后，給我們提供了解决这类問題的新的，更簡便的，更实用的方法。先講距离測量：

一、內容:

使用平板仪測量地面上中間有障碍物的两点間的距离。

使用平板仪測量地面上两个不可到达的点之間的距离。(或是一个点不能到达)

二、測量仪器及用具:

平板仪(平板仪,三脚架,照准器,移点器,方框罗針)标杆,卷尺、直角器、木樁、鉄錘。

三、測量方法

例1. 某測量者为測得某水庫的东西两端 AB 之間的距离,將平板仪放在能够定出和量出綫段 CA 和 CB 的一点 C,在 A、B 两点插上标杆,將平板放成水平后,用移点器把地面上的 C 点移到图紙上的一点 C',在 C' 处插上一細針,使照准器的定規的边紧靠細針,向 AB 二点瞄准,描出方向綫,然后量出 CA 和 CB 的距离,用規定的比例尺 (1:500) 繪在图紙上得两点 A' 和 B',連接 A' 和 B' 得 $A'B'$。

則 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,

$$\angle C=\angle C',\ CA:C'A'=CB:C'B'=500:1.$$

$$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'.$$

$$\therefore\ AB:A'B'=AC:A'C'=BC:B'C'=500:1;$$

$$\therefore\ AB=500A'B'.$$

因此只要量 $A'B'$ 的長,再依比例尺(1:500) 放大就得到 A、B 二点的距离了。附图 9

例2. 測量两个不可能到达的点之間的距离設 A、B 为某海島的东西两端点,測量者要在海岸边測得 AB 間的距离,在岸边选擇 C 和 D 两点,使 C 和 D 处都能够看到 A 和 B 先將平板仪放到 C 处标出平板的方向和放成水平以后,用移点器把 C 点移到图紙

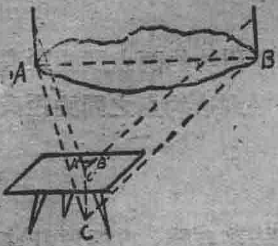

图 9

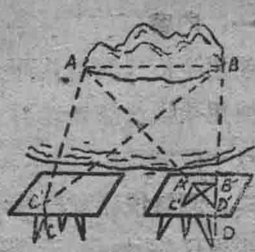

图 10

上的 C'，在 C' 处插一細針，使照准器的定规的一边紧靠細針、指 CA 和 CB 的方向綫，另外再作 CD 的方向綫，量出 C 和 D 之間的距离，用預定的比例尺(1:5000)繪在图紙上得到 D'，把平板仪搬到 D 点檢查平板的方向和水平并且使 D' 和 D 在一鉛垂綫上，这以后用同样的方法 DA，DB 的方向綫 $D'A'$ 和 $D'B'$，設每两条方向綫的交点为 A' 和 B' 这时連接 $A'B'$ 再將 $A'B'$ 按比例(1:5000)可以求得 AB 的長度。

因为根据以上实际測量工作可知 $C'A \parallel C'A'$。

$\therefore \quad D'C'_1 : D'C' = D'A' D'A$ 　又　$\because \quad C'B \parallel C'_1B'$

$\therefore \quad D'B' : D'B = D'A' : D'A.$

$\therefore \quad D'C' : D'C = D'A' : D'A = D'B' : D'B$，又 $\because \angle BD'A$ 公用，

$\because \quad \triangle D'A'B' \backsim \triangle D'AB \qquad \therefore \quad A'B' : AB = D'A' : DA = D'C' : D'C = 1:5000 \qquad \therefore \quad AB = 5000A'B'.$

四、課外測量实习作业

各校应根据当地情况找到測量对象，并令同学进行一次关于距离的实地測量。問題的性質可以和例題类似，測量必須要每小組作出測量总結报告。关于測量实习报告的內容如下。

实地测量实习报告

年級　　组别　　組員　　日期

1. 实地测量内容

2. 测量仪器以及有关工具。

3. 测量步骤。

4. 测量所得的有关数据

测站点	距离	按比例尺缩短以后的数值
$C \sim D$		
$C \sim B$		

5. 計算过程結果

6. 附测量場地平面图及必要的說明。

实习作业(二)

用相似三角形测定高

一、内容:

1. 使用平板仪测量底部可以到达的物体(具体材料)的高度。

2. 使用平板仪测量底部不可以到达的物体(具体材料)的高度。

二、测量仪器及用具:

平板仪(包括平板,照准仪,移点器三脚架方框罗針)卷尺,标杆。

三、测量的步骤:

例1. 某测量者为要测得某炼鉄高爐的高度(高爐底部可以

到达）將平板仪放到在离高爐 AB 适当远的一点 C，量得 CB 的水平距离为 d，把这数字記下来，把平板安置成水平位置，并用垂球悬于移点器对准地上的 C 点，这时在图紙上得到 C 点投影到图紙上的一点 C'，把照准器的下覘孔放在鉛垂綫 CC' 上，从下覘孔观察分划板右边的 O 分划，使視綫达到高爐上得一点 B' 在 B' 处作一記号，量 BB' 的高，把数記下来然后从下覘孔观測高爐頂 A，注意 $C'A$ 和右边分划 DE，將讀数記下来。

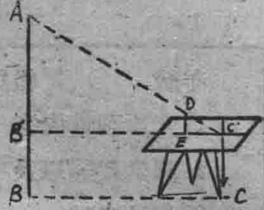

图 11

$$\because \triangle C'DE \backsim \triangle C'AB',$$

$$\therefore \frac{C'E}{C'B'}=\frac{DE}{AB'} \qquad \therefore AB'=\frac{DE\times C'B'}{C'E}.$$

$$\text{又} \because C'B'=CB \qquad \therefore AB=\frac{C'B'\times DE}{C'E}+B'B.$$

例 2. 以上例題中如高爐底部不能到达，这时我們可以在离开高爐相当远的地方（例 C 点处）按例 1 方法測得 $DE:EC'$ 的数值，然后再沿着相同方向定出基綫 CF，并量出 $CF=d$ 再在 F 点处以同样的方法測得 $GH:HF'$ 的数值，这时由于

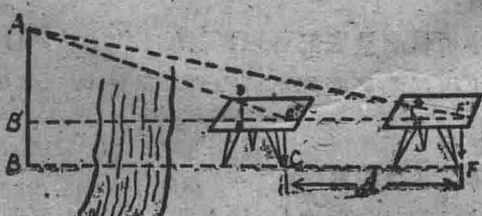

图 12

$$\triangle C'DE \backsim \triangle C'AB' \quad \therefore DE:EC'=AB':B'C',$$

$$\text{又} \because \triangle F'GH \backsim \triangle F'AB', \quad \therefore GH:HF'=AB':B'F'.$$

又 $\because$ $B'F' = B'C' + C'F'$ 又 $C'F' = d$.

$\therefore$ $B'F' = B'C' + d$.

$\therefore$ $GH : HF' = AB' : (B'C' + d)$

設 $GH = m$, $DE = n$, 而 $C'E = F'H = 100$.

$$\therefore \quad AB' : B'C' = n : 100, \tag{1}$$

$$AB' : (B'C' + d) = m : 100 \tag{2}$$

以上二式前后項分别交换后，左右二边分别相減［(2)以式減(1)式］

得 $$\frac{d}{AB'} = \frac{100\,(n-m)}{mn} \qquad \therefore \quad AB' = \frac{dmn}{100\,(n-m)}.$$

四、課外測量实习作业

各校应根据当地具体条件令導同学进行一次实地測量，問題性質可以和例1,2相同，具体对象可以自己选擇，实习作业，必須要同学做实习总結报告，报告内容可以分測量内容，应用的仪器工具測量的过程（步驟）和結果，并附測量場地的平面图形，并加必要的說明：

实习作业报告的格式

年級　　　組别　　　組員

1. 測量内容。
2. 測量仪器及工具。
3. 測量步驟。
4. 測量所得有关綫段的数值。

測站点	$C \sim F$ 的距离	測站点 C 处观測高爐所得分划板上数值
		測站点 F 处观測高爐所得分划板上数值

5. 計算过程和結果
6. 附測量場地平面图。

III. 多边形相似

(一)在第 41 頁倒 5 行(在 24 节里)之后增加一个定理

定理 两个相似多边形,如果各边对应平行,那末各对对应頂点的联綫或其延長綫交于同一点。

已知 多边形 $ABCDE \backsim$ 多边形 $A'B'C'D'E'$,

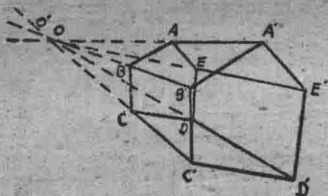

图 13

且 $$AB \parallel A'B', BC \parallel B'C',$$
$$CD \parallel C'D', DE \parallel D'E', EA \parallel E'A'.$$

求証 AA', BB', CC', DD' 与 EE' 共点。

証明 分两种情况。第一种情况对应边同向平行,

連 AA', BB';延長 AA' 交 BB' 的延長綫于 O 点。

由于 $AB \parallel A'B'$, $\triangle OAB \quad \triangle OA'B'$,

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} \qquad \text{(i)}$$

再連 CC',延長 CC' 交 BB' 的延長綫于 O' 点。

由于 $BC \parallel B'C'$, $\triangle O'BC \backsim \triangle O'B'C'$,

$$\frac{O'B}{O'B'} = \frac{O'C}{O'C'} = \frac{BC}{B'C'} \qquad \text{(ii)}$$

已知多边形 $ABCDE \backsim$ 多边形 $A'B'C'D'E'$,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$