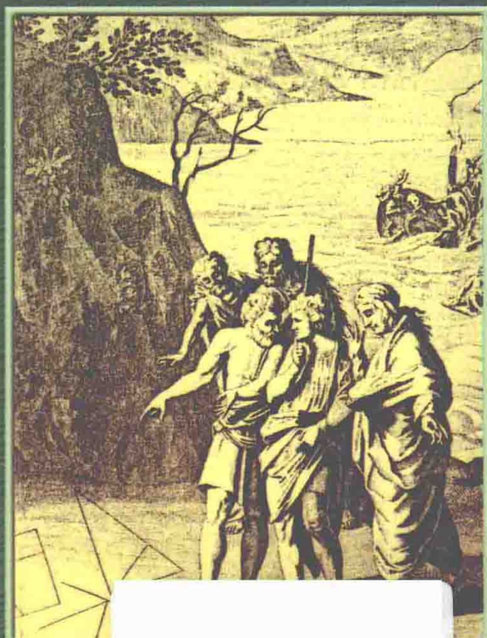
柯西函数方程

——从一道上海交大自主招生的试题谈起

《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）



刘培杰数学工作室 编

哈尔滨工业大学出版社

《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）

柯西函数方程

——从一道上海交大自主招生的试题谈起

刘培杰数学工作室 编

◎柯西方程问题

◎怎样研究大学自主招生考试

◎柯西评传

◎用函数方程定义初等函数

◎柯西的数学贡献

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道上海交大自主招生试题谈起，讲授了柯西函数方程，及由此衍生的诸多问题.本书透过柯西函数方程，向读者勾勒了这道自主招生试题的全貌，指出了大学自主招生选取题目的背景及深厚内涵，考察学生的数学思维方向等，展示了函数方程在中学数学思想中的重要性.

本书适合于高中生、大学生以及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

柯西函数方程:从一道上海交大自主招生的试题谈起/刘培杰数学工作室编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2015.2

ISBN 978-7-5603-4574-1

Ⅰ.①柯… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①泛函方程 Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 010396 号

策划编辑	刘培杰　张永芹
责任编辑	张永芹　刘家琳
封面设计	孙茵艾
出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真	0451-86414749
网　　址	http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷	哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本	787mm×960mm　1/16　印张 11　字数 136 千字
版　　次	2015 年 2 月第 1 版　2015 年 2 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5603-4574-1
定　　价	28.00 元

目录

柯西(Cauchy)方程问题

第1章

§0 引言

一道2014北约自主招生试题的背景及推广.

试题 已知函数满足

$$f\left(\frac{x+2y}{3}\right)=\frac{f(x)+2f(y)}{3}$$

$$(\forall x,y\in\mathbf{R})$$

且 $f(1)=1, f(4)=7$,求:$f(2\ 014)$.

这道试题的命制背景是柯西方程问题,作为自主招生试题,主要考查中学生对已知条件的处理及其应用,这道题应优先考虑运用给定的初始值,求出 $f(2),f(3),f(5)$ 等值,然后找规律,猜想出 $f(n)=2n-1$,再用数学归纳法证明.若考生对柯西方程比较了解,本题可以直接猜测 $f(n)=an+b$

的形式，从而顺利得到答案.

形如 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的方程被称为柯西方程. 如果我们将函数限制在多项式范围，即：多项式函数 $f(x)$ 满足 $f(a+b)=f(a)+f(b)$（a,b 为任意数），则 $f(x)=cx$，c 是常数. 以柯西方程为背景命制的试题，在近几年的高校自主招生及高考试题中频频出现，有兴趣的读者可以去研究.

本题可推广为：设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，对于常数 m,n 且满足 $m+n=1$，$\forall\, x,y\in\mathbf{R}$，有等式

$$f(mx+ny)=mf(x)+nf(y) \qquad ①$$

那么 $f(x)$ 是一个线性函数.

证明 令 $y=0$，式 ① 为

$$f(mx)=mf(x)+nf(0) \qquad ②$$

同样令 $x=0$，有

$$f(ny)=mf(0)+nf(y) \qquad ③$$

再令 x 为 $\frac{x}{m}$，y 为 $\frac{y}{n}$，分别代入式 ①，②，③，则有

$$\begin{aligned} f(x+y) &= mf\left(\frac{x}{m}\right)+nf\left(\frac{y}{n}\right) \\ &= f(x)-nf(0)+f(y)-mf(0) \\ &= f(x)+f(y)-f(0) \end{aligned}$$

即

$$f(x+y)-f(0)=[f(x)-f(0)]+[f(y)-f(0)]$$

记 $g(x)=f(x)-f(0)$，有 $g(x+y)=g(x)+g(y)$，从而证明了 $f(x)$ 是一个线性函数.

本题若设 $f(n)=an+b$，根据 $f(1)=1$，$f(4)=7$，即可求得 $f(n)=2n-1$，因此 $f(2\ 014)=4\ 027$.

§1　一道大学生数学竞赛试题改编的问题

有如下的一道乌克兰国立基辅大学数学竞赛试题：

例 1　求所有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，它在点 $x=0$ 连续且对所有 $x,y\in\mathbf{R}$ 满足关系式

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$$

这个试题在 2008 年被改编为上海交通大学联读班的试题.

例 2　若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$，$f'(0)=1$. 求函数 $f(x)$ 的解析式.

这个试题是将 f 在点 $x=0$ 连续改为 $f'(0)=1$. 其实更早时就已出现了类似题.

例 3　(2006 年复旦大学自主招生考试试题) $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，且对 $\forall x,y\in[1,+\infty)$，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 成立. 证明：存在常数 k，使 $f(x)=kx$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上成立.

证明　$\forall n\in\mathbf{N}_+$，有 $f(n)=nf(1)\Rightarrow f(1)=nf\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f(1)$. 故对 $\forall m\in\mathbf{N}_+$，有

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}f(1)$$

综上对 $\forall x\in\mathbf{Q}_+$，有 $f(x)=xf(1)$，其中 $\mathbf{Q}_+=\{x\mid x>0,x\in\mathbf{Q}\}$.

因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，故 $\forall x\in\mathbf{R}_+$，$\mathbf{Q}_+$ 中一定存在一列 $\{x_n\}$，$x_n\in\mathbf{Q}_+$，有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

其中 $\mathbf{R}_+=\{x \mid x>0, x\in\mathbf{R}\}$. 从而

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=xf(1)$$

综上，$f(x)=kx$，其 $k=f(1)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上成立.

例 4 （2012 年浙江大学自主招生考试试题）设 $A=\{x \mid x=m+\sqrt{2}n, m,n\in\mathbf{Z}\}$. 对任意的 $x,y\in A$，函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

（1）若 $a,b\in A$，证明：$a+b\in A, ab\in A$；

（2）对任意的 $x,y\in A$，满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的函数除了 $f(x)=kx$ 外，是否还存在其他函数满足此条件，若存在，写出一个函数；若不存在，说明理由.

这种 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 形方程被称为柯西方程. 法国数学家柯西最早研究了此类方程，并采用了“爬坡式”推理，即先正整数再全体整数，继而正有理数，进而全体有理数. 最后用有理数逼近无理数的方法扩展到全体实数集，以此为背景的试题出现在北京大学 1982 年的硕士研究生试题中：

例 5 试求对于 x_1 和 x_2 的所有实值，而满足：

（1）$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 的连续实函数.

（2）$g(x_1+x_2)=g(x_1)\cdot g(x_2)$ 的连续实函数.

解 （1）由数学归纳法不难证明，对任何正整数 n，有

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$$

令 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$，就得出，对任何 n 与实数 x，有

$$f(nx)=nf(x)$$

取 $x=\frac{y}{n}$,有

$$f\left(\frac{y}{n}\right)=\frac{1}{n}f(y)$$

把 y 换成 mz 并应用前面等式,有

$$f\left(\frac{m}{n}z\right)=\frac{m}{n}f(z)$$

对任何自然数 m,n 及实数 z,上式成立.

令 $x_1=x_2=0$,则得 $f(0)=2f(0)$,于是 $f(0)=0$.

若取 $x_1=-x_2$,并注意到 $f(0)=0$,有

$$f(-x)=-f(x)$$

由此,有

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-f\left(\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x)$$

因此知,对于任何有理数 r 与实数 x,有

$$f(rx)=r\cdot f(x)$$

若取 $x=1$,有

$$f(r)=f(1)\cdot r$$

下面证明,对任何实数 x,有

$$f(x)=f(1)\cdot x$$

事实上,对于实数 x,取有理数序列

$$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}r_n=x$$

由函数 $f(x)$ 的连续性,有

$$f(x)=\lim_{r_n\to x}f(r_n)=\lim_{r_n\to x}f(1)\cdot r_n=f(1)\cdot x$$

这样我们就知道,具有所述性质(1)的连续函数必为线性齐次函数.即 $f(x)=cx$,$c=f(1)$.

(2) 因 $g(x_1+x_2)=g(x_1)\cdot g(x_2)$.显然:

① 若 $g(x)\equiv 0$,则 $g(x)\equiv 0$ 是满足上述性质的

解.

② 若 $g(x)\neq 0$，现在求 $g(x)$ 的形式，为此首先注意，若具有如上性质的函数不恒为零，则此函数必处处不为零. 事实上，若存在一点 x_0，使 $g(x_0)=0$. 因为 $g(x)\neq 0$，必有一点 y_0，使 $g(y_0)\neq 0$. 而

$$y_0=x_0+[y_0-x_0]$$

由函数具有的性质知

$$g(y_0)=g[x_0+(y_0-x_0)]=g(x_0)\cdot g(y_0-x_0)=0$$

矛盾，所以 $g(x)$ 处处不为零. 考虑函数

$$\varphi(x)=\ln g(x)$$

由于 $g(x)$ 具有性质 $g(x_1+x_2)=g(x_1)\cdot g(x_2)$. 故 $\varphi(x)$ 具有性质

$$\varphi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)$$

由已证明的(1) 知

$$\varphi(x)=\ln g(x)=cx, c=\varphi(1)$$

故

$$g(x)=\mathrm{e}^{cx}, c=\ln g(1) \text{ 为常数}$$

(此题为声学，无线电电子学专业考题).

在使用柯西法时，我们用了一个原理 —— 区间套原理：

设有一个区间序列

$$[\alpha_1,\beta_1],[\alpha_2,\beta_2],[\alpha_3,\beta_3],\cdots,[\alpha_n,\beta_n],\cdots \quad (*)$$

其中每个区间都包含着后一个区间

$$[\alpha_i,\beta_i]\supset[\alpha_{i+1},\beta_{i+1}](i=1,2,3,\cdots)$$

(其中 $\supset$ 是集的包含符号) 形成一个“区间套”，而且区间长度可以任意地小(就是说，不论我们事先给定一个多么小的正数 ε，序列($*$) 中总存在这样一个区间，从此以后所有的区间的长度都小于 ε). 那么，必定存在

着唯一的一个点 ξ,被所有(无穷多)这些区间所包含.

特别地,当 ξ 为无理数时,如果把 α_n 和 β_n 取作 ξ 的精确到 10^{-n} 的不足近似值和过剩近似值. 那么以 ξ 的不足近似值和过剩近似值为端点,将构成一个区间套. 相应的区间的长度是 10^{-n}. 例如,我们知道,圆周率 π 是一个无理数:$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\cdots$. 于是,可以构成区间套 $[3.1,3.2] \supset [3.14,3.15] \supset [3.141, 3.142] \supset \cdots$. 区间的长度依次是 $3.2 - 3.1 = 10^{-1}$, $3.15 - 3.14 = 10^{-2}$, $3.142 - 3.141 = 10^{-3}$, $\cdots$. 我们注意到,每个区间的端点 α_n 和 β_n 都是有理数,而只有唯一的一个无理数 π 被包含在所有这些区间之内,详细论述见附录.

有了这些准备之后,我们可以进行函数方程的柯西解法的讨论.

§2　可化归为柯西方程的试题

有了柯西方程后我们就可以将例 2 转化为柯西方程来处理.

由

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)\Rightarrow$$

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+\frac{1}{3}[(x+y)^3-x^3-y^3]\Rightarrow$$

$$f(x+y)-\frac{1}{3}(x+y)^3=f(x)-\frac{1}{3}x^3+f(y)-\frac{1}{3}y^3$$

令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$,则原方程化为

$$g(x+y)=g(x)+g(y) \qquad ①$$

由于$f'(0)=1$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.由此可知式 ① 是一个柯西方程,其解为 $g(x)=ux$(其中 $u=g(1)$).所以 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ux \Rightarrow f'(x)=x^2+u$,再由 $f'(0)=1$,知 $u=1$.所以 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x$.

考虑到柯西方法在中学并不普及,所以命题者还给出了另外两种方法.一种方法只用到了简单极限和导数定义,另一种方法则用到了导数和积分.

柯西方程是最基本的一类函数方程.在 21 世纪初,高考数学试题中出现了所谓抽象函数的试题热,所谓抽象函数就是不知道函数的解析表达式来求具体函数的值或判断函数的性质,如下面的:

例 6 (2008 年高考重庆理数)若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足:对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$.下列说法一定正确的是(　　).

A. $f(x)$ 为奇函数　　B. $f(x)$ 为偶函数

C. $f(x)+1$ 为奇函数　　D. $f(x)+1$ 为偶函数

解　原方程可写为 $f(x_1+x_2)+1=(f(x_1)+1)+(f(x_2)+1)$.设$g(x)=f(x)+1$,则原方程可写为:$g(x_1+x_2)=g(x_1)+g(x_2)$.故由柯西方法 $g(x)=cx$,其中 $c=g(0)$.故 $g(x)=f(x)+1=cx$ 为奇函数,故选 C.

无独有偶,在 2008 年陕西理科高考数学题中也有一道与此相关的问题.

例 7　定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x,y\in \mathbf{R})$,$f(1)=2$,则 $f(-3)$ 等于(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

解　将原方程改写为

$$f(x+y)-(x+y)^2=[f(x)-x^2]+[f(y)-y^2]$$

设 $g(x)=f(x)-x^2$,则原方程可化为

$$g(x+y)=g(x)+g(y)$$

由柯西方法知,$g(x)=cx$,所以 $f(x)=g(x)+x^2=x^2+cx$.由 $f(1)=2$,知 $2=1+c\Rightarrow c=1$,故 $f(x)=x^2+x$.所以 $f(-3)=(-3)^2+(-3)=6$,故选 C.

如果我们将定义域改为 $\mathbf{Z}$,则有如下:

例 7′ (2010 克罗地亚国家数学竞赛(决赛))试求所有函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 满足:

(1) $f(n)f(-n)=f(n^2)(n\in\mathbf{Z})$;

(2) $f(m+n)=f(m)+f(n)+2mn(m,n\in\mathbf{Z})$.

解　令函数 f 满足条件:定义 $g:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$,$g(n)=f(n)-n^2$.将 $f(n)=g(n)+n^2$,代入条件(2)得

$$g(m+n)+(m+n)^2=g(m)+m^2+g(n)+n^2+2mn\Rightarrow$$

$$g(m+n)=g(m)+g(n) \qquad ②$$

将 $n=0$ 代入式 ② 得 $g(0)=0$,则当 $m=-n$ 时,有 $g(-n)=-g(n)$.易由式 ② 可得 $g(k)=kg(1)(k\in\mathbf{N})$.因此,$g(-k)=-g(k)=-kg(1)$.于是

$$g(k)=kg(1)(k\in\mathbf{Z}) \qquad ③$$

接下来求 $g(1)$.将 $f(n)=g(n)+n^2$ 代入条件(1)得

$$(g(n)+n^2)(g(-n)+n^2)=g(n^2)+n^4$$

令 $n=1$,得

$$(g(1)+1)(g(-1)+1)=g(1)+1$$

即

$$g(1)(g(1)+1)=0$$

则 $g(1)=0$ 或 -1,且由式 ③ 得

$$g(n)=0 \text{ 或 } -n$$

所以,$f(n)=n^2$ 或 $f(n)=n^2-n$.经检验,这两个函数

均满足条件. 其实直接由例 7 的结论可知

$$f(n)=n^2+cn$$

再由 $f(n)f(-n)=f(n^2)$ 可得

$$(n^2+cn)(n^2-cn)=n^4-c^2n^2\Rightarrow$$

$$n^2c(c+1)=0\Rightarrow c=0,c=-1$$

故 $f(n)=n^2$ 或 $f(n)=n^2-n$.

可见用柯西方法可以将此类问题一揽子解决,不必因题而异的想新方法. 在能求出函数解析表达式时要比用具体数值代入方便,所以将方程化归为柯西方程是解题的捷径.

例 8 设 $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$($\mathbf{Q}$ 为有理数集),且对 $\forall x,y\in\mathbf{Q}$

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy \tag{④}$$

如果 $f(-1)f(1)\geqslant 4$,求 $f(x)$.

若不用柯西方法则需用构造递推数列来解函数方程,如何构造是一个技巧性很强的工作.

解法 1 取 $x=y=0$,由式 ④ 得 $f(0)=0$. 在式 ④ 中取 $x=1$ 和 $y=-1$ 得

$$f(0)=f(1)+f(-1)-4$$

即

$$f(1)+f(-1)=4$$

因为 $f(-1)f(1)\geqslant 4$,所以 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 皆为正数. 从而 $4=f(1)+f(-1)\geqslant 2\sqrt{f(1)f(-1)}\geqslant 4$ 中等号成立,所以

$$f(1)=f(-1)=2$$

再在式 ④ 中取 $y=1$ 得

$$f(x+1)=f(x)+4x+2 \tag{⑤}$$

对式 ⑤ 进行递推有

$$f(2)=f(1+1)=f(1)+4\times 1+2$$

$$f(3)=f(2+1)=f(2)+4\times 2+2$$
$$\vdots$$
$$f(n)=f(1)+4(1+2+\cdots+(n-1))+2(n-1)=2n^2$$

又

$$f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{4k}{n^2}$$

即

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{4k}{n^2}$$

利用 $f(1)=2$,对 k 从 1 到 $n-1$ 求和得

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{n^2}$$

同理对 k 从 1 到 $m-1$ 求和得

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=2\cdot\frac{m^2}{n^2}$$

最后令 $x=\frac{m}{n}$,$y=-\frac{m}{n}$,由式 ④ 有

$$f(0)=f\left(\frac{m}{n}-\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)+f\left(-\frac{m}{n}\right)-\frac{4m^2}{n^2}$$

故 $f\left(-\frac{m}{n}\right)=2\cdot\frac{m^2}{n^2}$. 因此对所有 $x\in\mathbf{Q}$,有 $f(x)=2x^2$.

若采用柯西方法,则十分简单,只需将原方程写成

$$\begin{aligned}f(x+y)&=2(x+y)^2\\&=(f(x)-2x^2)+(f(y)-2y^2)\end{aligned}$$

即可. 可求出 $f(x)-2x^2=cx$.

注意到 $f(1)=2$,代入上式得 $c=0$,故 $f(x)=2x^2$.

例 9　(1999 年广西数学竞赛试题)对每一实数对 x,y,函数 $f(x)$ 满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+1$$

若 $f(-2)=-2$，试求满足 $f(a)=a$ 的整数 a 的个数.

原解法是运用不等关系来解的，并且没有求出 $f(x)$ 的解析表达式.

解法 1 令 $x=y=0$，得 $f(0)=-1$.

令 $x=y=-1$，得 $f(-2)=-2$.

又令 $x=1, y=-1$，可得 $f(1)=1$.

再令 $x=1$，得

$$f(y+1)=f(y)+y+2 \tag{⑥}$$

所以 $f(y+1)-f(y)=y+2$.

即当 y 为正整数时，$f(y+1)-f(y)>0$.

由 $f(1)=1$ 可知对一切正整数 $y, f(y)>0$. 因此，当 $y\in\mathbf{N}$ 时，$f(y+1)=f(y)+y+2>y+1$，即对一切大于 1 的正数 t 恒有 $f(t)>t$. 又由式 ⑥，$f(-3)=-1, f(-4)=1$.

下面证明，当整数 $t\leqslant -4$ 时，$f(t)>0$.

因 $t\leqslant -4$，故 $-(t+2)>0$.

由式 ⑥，得 $f(t)-f(t+1)=-(t+2)>0$，即

$$f(-5)-f(-4)>0$$
$$f(-6)-f(-5)>0$$
$$\vdots$$
$$f(t+1)-f(t+2)>0$$
$$f(t)-f(t+1)>0$$

相加，得 $f(t)-f(-4)>0$，即 $f(t)>f(-4)=1>0$.

故 $t\leqslant -4$，故 $f(t)>t$.

综上所述，满足 $f(t)=t$ 的整数只有 $t=1, -2$.

上述解法是用抽象函数求值的方法得到的. 既曲折又非本质. 下面我们用柯西方法给出一种简洁的解法.