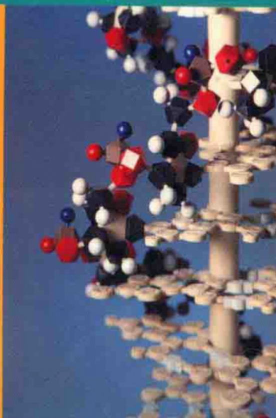
中学数学专题丛书

叶尧城 主编



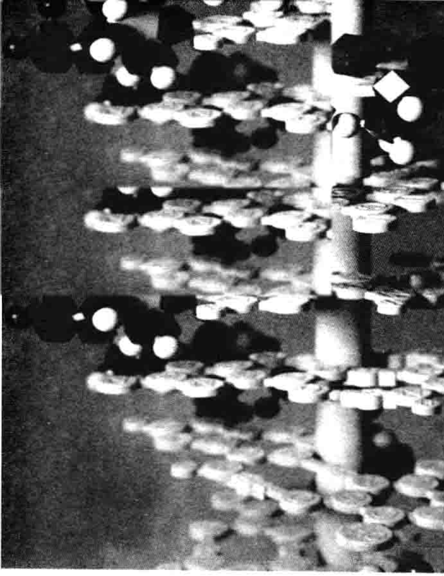
徐新斌 等 编著

数列

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

6



中学数学专题丛书

叶尧城 主编

数列

徐新斌 杨 田 叶迎东 编著

6

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

数列/徐新斌等编著 .—武汉:湖北教育出版社,2001
(中学数学专题丛书/叶尧城主编)
ISBN 7-5351-3162-X

Ⅰ.数… Ⅱ.徐… Ⅲ.数列-中学-教学参考资料
Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 085392 号

出版 发行:湖北教育出版社　　武汉市青年路 277 号
网　址:http://www.hbedup.com　　邮编:430015　传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经　销:新　华　书　店
印　刷:文字六〇三厂印刷　　(441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)
开　本:787mm×1092mm　1/32　　8.25 印张
版　次:2002 年 4 月第 1 版　　2002 年 4 月第 1 次印刷
字　数:160 千字　　印数:1—5 000

ISBN 7-5351-3162-X/G·2567　　定价:11.00 元

总　　序

随着素质教育的深入推进，需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁，以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建？改革教材成为了人们选择的突破口！当前，国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用，新教材在“为所有的学生打好共同基础”上将有所作为。然而，我国幅员辽阔，地区间的教育水平的差异大，个体间学习水平的差异大。如何真正地体现“以学生发展为本”，发展学生的个性特长，让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高，还需要通过特定的教学过程来完成，其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的“检测题”、“同步练习”、“习题集”等)。因此，我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物，以专题讲座的形式，帮助学生了解知识的发生、发展过程，学会分析、解决问题的思想方法，深化、拓宽相关知识。

有鉴于此，我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有18个小册子，各册相对独立又相互联系，小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触，介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础**。通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力**。精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用**。精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新**。精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功**。选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

目录

引 言

高斯[注1]10岁的时候,数学教师布特纳(Buttner)要求学生将100个数相加起来,如$1+2+3+\cdots+100$之类.刚解释完题目,高斯就把答案交了上去,布特纳连看也没看,心想这个全班最小的学生准是瞎写了些什么或者交了白卷.过了很久,别的学生才一个个把答案交上去,在发现只有高斯答案正确,而比他大的孩子都算错了的时候,老师才大吃一惊,是什么方法让高斯算得又快又准呢?

关于国际象棋的传说中,当国王问发明者有什么要求时,发明者说:"请在棋盘的第1个格子里放上1粒麦子,在第2个格子里放上2粒麦子,在第3个格子里放上4粒麦子,在第4个格子里放上8粒麦子,依此类推,每个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的2倍,直到第64个格子."看似不难办到的事,为什么国王无法满足发明者的要求呢?

其实,这些都是一些简单的数列问题.我国对数列的认识很早,在公元前100年以前成书的数学书籍《周髀算经》里就说到:在周城的平地立八尺高的周髀(即表竿),日中测影,在二十四节气中,冬至影长1丈3尺5寸,以后每一节气递减9寸$9\frac{1}{6}$分,这是等差数列的概念.其后在很多其他数学书籍中,都陆续记载了不少关于数列的问题.如《九章算术》"衰分"一

章,主要讲配分比例及等差、等比数列问题,其中的第一题就是“按 5:4:3:2:1 把 5 分成五份”,答数依次是 $1\frac{2}{3}$,$1\frac{1}{3}$,1,$\frac{2}{3}$,$\frac{1}{3}$,它们组成一等差数列.第二题是“按 4:2:1 把 50 分成三份”.答数依次是 $28\frac{4}{7}$,$14\frac{2}{7}$,$7\frac{1}{7}$,它们组成一等比数列.《孙子算经》(晋朝初年 —— 公元4世纪的著作)中已有关于数列求和的问题.在南北朝(公元5世纪末)北魏的《张邱建算经》中,有几个等差数列问题,其中包括求公差、求总和、求项数等.在张邱建之后,天文学家已把等差数列的算法运用到历法计算方面去了.

到了宋、元年间,我国对数列的研究又有了很大的发展,如沈括(1031年 ~ 1095年)的隙积术、杨辉的堆垛术、郭守敬(1231年 ~ 1316年)的平立定三差法.而朱世杰[注2]又继续作了研究,求出各种高阶等差数列的和,解决了堆垛和招差问题.

朱世杰在元成宗大德己亥年(1299年)著《算学启蒙》刊行于世.他的另一杰作是《四元玉鉴》,大德癸卯年(1303年)上元日(正月十五)刊行.

《四元玉鉴》卷中之十,“如象招数”门、列有招收差夫、招收士兵等5个问题,这可能是“招差术”的原来意思,“差”作差额、差数解.招差术与堆垛术原来是有些区别的,不过归根结底都是高阶等差数列的问题,它可以应用到内插法上去,属于现在的有限差分法.

朱世杰所用到的公式很多,《四元玉鉴》卷中之七“茭草

(干草)形段”第一问:“今有茭草六百八十束,欲令‘落一形’埵(同垛)之,问底子几何?答曰:一十五束”.

所谓“落一形”,是顶上1个,下一层3个,再下一层6个,再下一层10个,…… 成三角锥的堆积.现知总数680,求底层一边的个数.按公式 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

即 $$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)=680$$

解方程得 $n=15$.

此外还有“撒星形”,公式如下:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

“撒星更落一形”,公式如下:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

欧洲的有限差分学除了格列哥里、牛顿的内插公式外,一般公认是1715年泰勒所首创,在他的名著《增量方法》中开展了这一新分支的研究,他一定想不到400多年前中国的朱世杰已经在这个问题上遥遥领先了.我国数学家光辉灿烂的成绩,远远走在世界的前列!

[注1] 高斯(*Gauss*)1777年4月30日生于德国的布伦兹维克(*Braunschweig*),1855年2月23日卒于哥廷根(*Gottingen*),是近代数学伟大的奠基者之一,他在历史上影响之大,和阿基米德、

牛顿、欧拉齐名.

［注 2］ 朱世杰，字汉卿，号松庭，寓居在燕山（今北京），曾周游四方二十余年，广收门徒，是我国元代著名的专业数学家. 著有《算学启蒙》（1299 年）三卷，《四元玉鉴》（1303 年）三卷，对于多元高次方程组的解法、高阶等差级数和招差术（有限差分）都有独到的研究.

第一章

数列的概念

一　数列的概念

1. 数列的定义

A. 正整数由小到大依次排成一列:1,2,3,4,…,

B. 正整数 1,2,3,4,… 的倒数排成一列:$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$,

C. $\sqrt{2}$ 精确到 1,0.1,0.01,0.001,… 的不足近似值排成一列:1,1.4,1.41,1.414,…,

D. -1 的 1 次幂,2 次幂,3 次幂,4 次幂,… 排成一列:-1,1,-1,1,…,

E. 无穷多个 1 排成一列:1,1,1,1,…,

F. 30 的正因数按由小到大的次序排成一列:1,2,3,5,6,10,15,30.

像上面例子中,按一定次序排成的一列数叫做**数列**.

从数列这一描述性概念中,我们知道:数列中的数具有有序性,一个数在数列中可重复出现.数列中数的这两个特性区别于集合中元素的无序性、互异性.

联系我们已学过的函数知识,可以把数列当作一种特殊函数的一列函数值.因为数列是按一定次序排列的数,那么它就必定有第一个数,第二个数,第三个数,⋯.于是,数列中的每一个数都对应于一个序号.反过来,每个序号也都对应于数列中的一个数.

因此,数列就是定义在正整数集 N(或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots n\}$)上的函数 $f(n)$ 当自变量从小到大依次取值时相应的一列函数值:$f(1),f(2),f(3),\cdots f(n),\cdots$.

2. 数列的通项及通项公式

通常用 a_n 代替 $f(n)$,于是数列的一般形式记为 $a_1,a_2,a_3,\cdots a_n$,简记为$\{a_n\}$,其中 a_n 表示数列$\{a_n\}$的通项.

这里要注意的是:

(1)$\{a_n\}$与 a_n 是不同的,前者表示数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$,而后者仅表示这个数列的第 n 项.

(2) 数列的项与它的项数是不同的概念,数列的项是指数列中的某一个确定的数,它是函数值,而项数是指数列的项的位置序号,它是自变量的值.

当一个数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数关系可以用一个公式 $a_n=f(n)$来表示时,我们就把这个公式叫做这个数列的**通项公式**.

如数列4,5,6,7,8,9,10的通项公式为 $a_n=n+3(n\in N^*$ 且 $n\leqslant 7)$;数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{n}(n\in N^*)$.

关于数列的通项公式有以下几个要注意的问题:

(1) 不是所有的数列都能写出通项公式.如某一同学的

100m 体育成绩如下:65,70,75,80,…

(2) 通项公式在形式上不一定唯一.如数列 $-1,1,-1,1,\cdots$ 的通项公式可写成 $a_n=(-1)^n$,或者写成 $a_n=\cos n\pi$,也可以写成 $a_n=\begin{cases}-1, & n\text{ 为正奇数;}\\ 1, & n\text{ 为正偶数.}\end{cases}$

(3) 有些数列,只给出它的前面几项,并没有给出它的构成规律,这样只从数列的有限项来归纳通项公式是不一定可靠的.如由数列 2,4,8,… 可以归纳出 $a_n=2^n$,也可以归纳出 $a_n=n^2-n+2$,等等.

3. 数列的表示

既然数列是一列特殊的函数值,那么可用函数的表示方法来表示数列.

(1) 列表法

1	2	3	4	5	…	n	…
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	…	a_n	…

第一行常省略,直接写成 $a_1,a_2,a_3,\cdots a_n,\cdots$

(2) 图像法

数列 $a_n=2n+1$ 的图像如图 1—1;数列 $a_n=\dfrac{1}{n}$ 的图像如图 1—2.

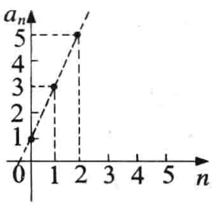


图 1—1

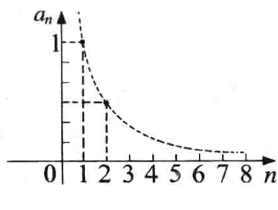


图 1—2

由图可知,数列的图像是由一群离散的点所组成.

(3) 解析法

通项公式法及递推公式法是表示数列的两种不同的解析法.如同一个数列1,3,5,7,,…$2n-1$,…,用通项公式法表示为 $a_n = 2n - 1$(n 为正整数);用递推公式法表示为 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ a_{n-1} + 2, & n \geqslant 2. \end{cases}$ 像后者这样,如果已知数列$\{a_n\}$的第1项(或前几项),且任意一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}(或前几项)间的关系可以用一个公式来表示,那么这个公式就叫做这个数列的**递推公式**.

4. 数列的分类

根据不同的分类标准,数列可分为不同类型.

按照项数来分,项数有限的数列叫做**有穷数列**,项数无限的数列叫**无穷数列**.在前面所举例子中,F例是有穷数列,其他几个数列都是无穷数列.

按照项与项之间的大小关系来分,对于一个数列,如果从第2项起,每一项都不小于它的前面的一项(即 $a_{n+1} \geqslant a_n$),这样的数列就叫做**递增数列**.如果从第2项起,每一项都不大于它前面的一项(即 $a_{n+1} \leqslant a_n$),这样的数列就叫做**递减数列**.在前面所举例子中,A、C、F例是递增数列,而B例则是递减数列.

递增数列和递减数列又统称为**单调数列**.除递增数列和递减数列外,对于一个数列,如果从第2项起,有些项大于它的前一项,有些项却小于它的前一项,这样的数列就叫做**摆动数列**.如果一个数列的每一项都相等,这样的数列就叫做**常数**

列.数列 D 为摆动数列,数列 E 为常数列.

按照任何一项的绝对值是否都小于某一正数来分,如果每一项的绝对值都小于某一正数(即 $|a_n| < M$,这是 M 是某一正数),这个数列叫做**有界数列**.如果不存在某一个正数能使每一项的绝对值都小于它,这样的数列叫做**无界数列**.数列 B、C、D、E、F 都是有界数列,数列 A 是无界数列.

例 1 已知数列的通项公式为 $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}(n \in N^*)$,

(1) 计算 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5;(2) 证明 $a_{n+4} = a_n$.

解 (1) $a_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$,

$$a_2 = \cos\frac{2\pi}{2} = \cos\pi = -1,$$

$$a_3 = \cos\frac{3\pi}{2} = 0,$$

$$a_4 = \cos\frac{4\pi}{2} = \cos 2\pi = 1,$$

$$a_5 = \cos\frac{5\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

(2) $a_{n+4} = \cos\frac{(n+4)\pi}{2} = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi\right)$

$$= \cos\frac{n\pi}{2} = a_n.$$

例 2 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 1$,写出这个数列的前 6 项及 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 $a_1 = 3$,由 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 得

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7,$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15,$$
$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31,$$
$$a_5 = 2a_4 + 1 = 2 \times 31 + 1 = 63,$$
$$a_6 = 2a_5 + 1 = 2 \times 63 + 1 = 127.$$

$\because a_{n+1} = 2a_n + 1, \therefore a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$,说明数列$\{a_n + 1\}$是以$a_1 + 1$为首项,2为公比的等比数列.

$\therefore a_n + 1 = (a_1 + 1)2^{n-1}$,即$a_n = (a_1 + 1)2^{n-1} - 1 = (3 + 1)2^{n-1} - 1 = 2^{n+1} - 1$.

例3 在直角坐标系中,画出下列数列的图像.

(1)2,4,6,8,…,$2n$,…;

(2)2,4,8,16,…,2^n,….

解 (1)数列2,4,6,8,…,$2n$…的通项公式为$a_n = 2n$.其图像为直线$y = 2x$上一些离散的点,如图1—3;

(2)数列2,4,8,16,…,2^n,…的通项公式为$a_n = 2^n$,其图像为曲线$y = 2^x$上的一些离散的点,如图1—4.

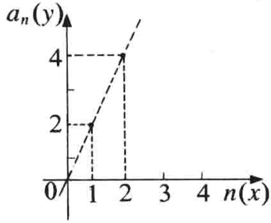


图 1—3

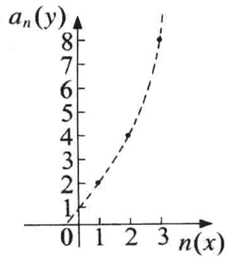


图 1—4

例4 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = (n + 1) \times 0.9^n$,是否

存在自然数 M,使得对任意正整数 n,有 $a_n \leqslant a_M$ 成立?

解 $\because$ $a_{n+1} - a_n$

$$= (n+2) \times 0.9^{n+1} - (n+1) \times 0.9^n$$

$$= (n+2) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} - (n+1) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

$$= 9(n+2) \cdot \frac{9^n}{10^{n+1}} - 10(n+1) \cdot \frac{9^n}{10^{n+1}}$$

$$= \frac{9^n}{10^{n+1}} \cdot (8-n)$$

当 $n < 8$ 时,$a_{n+1} > a_n$;当 $n = 8$ 时,$a_{n+1} = a_n$;当 $n > 8$ 时,$a_{n+1} < a_n$.即有 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_8 = a_9 > a_{10} > a_{11} > \cdots$.

所以存在自然数 $M = 8$ 或 9,使 $a_n \leqslant a_M$ 成立.

习题 1.1

1. 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n = n^2 - n - 2$,求 $a_{n+1} - a_n$.

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n = \frac{2}{n^2+n}$,问$\frac{1}{10}$是它的第几项?

3. 数列$\{a_n\}$中,$a_1 = 1$,对所有的 $n \geqslant 2(n \in N^*)$,都有 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = n^2$,求 $a_3 + a_5$.

4. 设函数 $f(x) = \log_2 x - \log_x 4 (0 < x < 1)$,数列$\{a_n\}$满足 $f(2^{a_n}) = 2n(n \in N^*)$

(1) 求数列的$\{a_n\}$的通项公式.