

21世纪高等院校教材 大学工科·数学教材系列

高等数学学习指导

(第二版)

西北工业大学高等数学教研室 编



科学出版社

21 世纪高等院校教材
大学工科·数学教材系列

高等数学学习指导

(第二版)

西北工业大学高等数学教研室 编



科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是为学习高等数学的读者编写的,按国内通常高等数学教材知识点布局,分为十二章,每章设若干节、知识脉络图和按章模拟考题.各节均设诸栏目,对高等数学的主要知识点进行归纳,释疑解惑,剖析典型例题,揭示解题方法与技巧,并配制两级测试题及答案与提示,供学生自测.

本书可作为高等学校师生的教学参考书,也可作为考研者考前复习、系统训练用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/西北工业大学高等数学教研室编. —2版. —北京:科学出版社,2015.6

21世纪高等院校教材. 大学工科·数学教材系列

ISBN 978-7-03-045173-6

I. ①高… II. ①西… III. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 155367 号

责任编辑:李鹏奇 王 静/责任校对:彭 涛

责任印制:霍 兵/封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年7月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2015年7月第 二 版 印张:29 3/4

2015年7月第十二次印刷 字数:599 000

定价:54.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第二版前言

本书第二版是在第一版的基础上,根据近些年教学实践积累的经验,并吸收了同行和读者的宝贵意见,对部分内容作了修订、充实和完善,目的是使新版能更适合当前教学的需要.

这次修订,在保持原书风格的基础上,主要对部分章节中的“疑难问题解惑”和“典型例题剖析”两个栏目作了修订,内容涉及对基本概念和基本理论的深入理解,对解题方法中常见错误的剖析以及对典型例题的解题分析等.

参加第二版修订工作的有西北工业大学应用数学系陆全、郭强、郑红婵、肖亚兰、刘华平、林伟、周敏、刘哲等,全书由陆全、郭强统纂定稿.

由于水平所限,书中疏漏和不妥之处恳请同行、读者指正.

编者

2015年3月

第一版前言

高等数学是一门重要的基础课. 鉴于这门课程逻辑性及解题技巧性较强, 以及后继课程的学习和硕士研究生入学考试的要求, 特编写这本书. 它可作为高等数学课程学习指导书、习题课参考书, 以及研究生入学考试的复习用书.

本书共分十二章(与高等数学(西北工业大学)、高等数学(同济·四版、五版)教材配套), 每章分为若干节(与教学次序一致), 最末节为综合问题, 具有同步学习辅导结构. 每章由以下内容构成:

(1) 知识要点导学——此部分按知识要点集中归纳本章节的重要概念、性质、结论, 阐述扼要、条理清晰.

(2) 疑难问题解惑——内容涉及基本概念和基本理论的深入理解、解题方法中常见错误的剖析. 问题的回答力求体现启发式, 并对学生在思维方法、学习方法方面进行指导.

(3) 典型例题剖析——此部分按高等数学每节内容的知识点归纳出一些小专题, 通过对典型例题的解题分析, 归纳出高等数学中的一些问题的解决方法与技巧. 注重选题的广度与梯度, 力求达到从一题到一类, 从一类到一个系列的效果.

(4) 两级阶段练习——在给出了一级练习, 检查掌握基础知识前提下, 二级练习注重知识的灵活性、综合性, 力图在深度、广度上拓展读者的知识面.

(5) 本章知识脉络——通过知识结构图, 使知识更加系统化、条理化, 便于记忆、理解与运用.

(6) 按章模拟考题——根据课程考试和考研内容, 精选了难度适中的按章自测试题, 供学生及时检查自己掌握的情况.

全书内容编排与教学同步, 以典型问题、典型方法为主线, 体现知识结构、思维培养、同步训练、水平测试的辅导功能, 适合于课程学习与备战考研的读者, 也可作为教师教学用书.

参加本书编写工作的有西北工业大学应用数学系陆全、肖亚兰、刘华平、王雪芳、杨月茜、郑红婵、刘哲、林伟、周敏等, 全书由陆全、肖亚兰统纂定稿.

限于编者的学识及水平, 疏漏与不足之处在所难免, 恳请读者与同仁批评指正.

编者

2006年12月

目 录

第二版前言

第一版前言

第一章 一元函数的极限与连续	1
第一节 函数	1
第二节 极限	9
第三节 函数的连续性	28
第四节 综合问题	37
本章知识脉络	45
按章模拟考题	46
第二章 导数与微分	48
第一节 导数概念	48
第二节 导数运算	54
第三节 微分	66
第四节 综合问题	70
本章知识脉络	76
按章模拟考题	76
第三章 微分中值定理与导数的应用	79
第一节 利用洛必达法则求极限	79
第二节 微分中值定理	89
第三节 函数性态研究	103
第四节 综合问题	117
本章知识脉络	128
按章模拟考题	129
第四章 不定积分	131
第一节 不定积分的概念 换元积分法	131
第二节 分部积分法	144
第三节 三种特殊类型函数的积分	151
第四节 综合问题	161
本章知识脉络	164
按章模拟考题	164

第五章 定积分	166
第一节 定积分的概念与积分上限函数.....	166
第二节 定积分与广义积分的计算.....	175
第三节 综合问题.....	190
本章知识脉络.....	195
按章模拟考题.....	195
第六章 定积分的应用	197
第一节 几何应用.....	197
第二节 物理应用.....	209
第三节 综合问题.....	216
本章知识脉络.....	220
按章模拟考题.....	220
第七章 向量代数与空间解析几何	223
第一节 向量代数.....	223
第二节 平面与空间直线.....	232
第三节 曲面与空间曲线、二次曲面.....	244
第四节 综合问题.....	250
本章知识脉络.....	254
按章模拟考题.....	254
第八章 多元函数微分法及其应用	256
第一节 多元函数微分法.....	256
第二节 多元函数微分的应用.....	274
第三节 综合问题.....	287
本章知识脉络.....	293
按章模拟考题.....	293
第九章 重积分	296
第一节 二重积分.....	296
第二节 三重积分.....	307
第三节 重积分的应用.....	318
第四节 综合问题.....	327
本章知识脉络.....	332
按章模拟考题.....	333
第十章 曲线积分与曲面积分	336
第一节 曲线积分.....	336
第二节 曲面积分.....	352

第三节 场论初步	367
第四节 综合问题	372
本章知识脉络	378
按章模拟考题	378
第十一章 无穷级数	380
第一节 数项级数	380
第二节 幂级数	397
第三节 傅里叶级数	412
第四节 综合问题	420
本章知识脉络	423
按章模拟考题	423
第十二章 微分方程	425
第一节 微分方程的基本概念	425
第二节 一阶微分方程	428
第三节 高阶微分方程	440
第四节 常系数线性微分方程	446
第五节 综合问题	455
本章知识脉络	461
按章模拟考题	461

第一章 一元函数的极限与连续

第一节 函 数

【知识要点导学】

☞ 概念

- 函数、分段函数.
- 反函数、复合函数.
- 基本初等函数、初等函数.

☞ 性质

- 有界函数 $f(x): x \in X \subset D$, 存在 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$.
- 单调增加(减少)函数 $f(x): x \in I \subset D$,
当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).
- 奇(偶)函数 $f(x): x \in [-a, a]$,
 $f(-x) = -f(x)$ ($f(-x) = f(x)$).
- 周期函数 $f(x): x \in (-\infty, +\infty)$,
存在 $T > 0$, 使 $f(x+T) = f(x)$.

【疑难问题解惑】

1. 怎样确定一个函数, 需要几个要素?

答 确定函数的两个要素是定义域 D 和对应规律 f . 只有当两个函数的定义域及对应规律完全相同时, 它们才是同一个函数.

例如, $f_1(x) = \ln(1-x^2)$ 与 $g_1(x) = \ln(1+x) + \ln(1-x)$ 是同一函数. 因为它们的定义域均为 $(-1, 1)$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $g_1(x) = \ln[(1+x)(1-x)] = \ln(1-x^2) = f_1(x)$. 又 $f_2(x) = \ln(x^2-1)$ 与 $g_2(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$ 不是同一函数. 因为 $f_2(x)$ 的定义域为 $D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $g_2(x)$ 的定义域为 $D_2 = (1, +\infty)$, $D_1 \neq D_2$.

2. 单调函数必有单值反函数, 不单调的函数是不是一定没有单值反函数?

答 不是的. 一个函数是否存在单值反函数, 取决于它的对应规律 f 在定义域 D 与值域 U 之间是否构成一一对应的关系. 如果是一一对应的, 那么必有单值

反函数;否则就没有单值反函数.函数在区间 I 上单调只是一种特殊的一一对应关系,因此单调仅是存在单值反函数的充分条件,而不是必要条件.

例如,函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0, \\ x+1, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

在区间 $[-1, 1]$ 上不单调(图 1.1(a)),但它存在单值反函数(图 1.1(b))

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

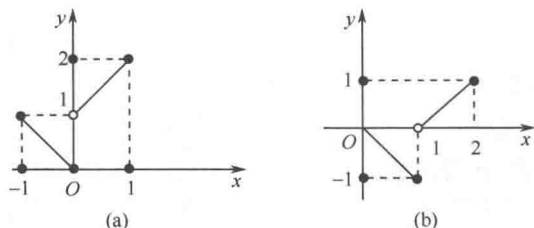


图 1.1

3. 任意两个函数都能构成复合函数吗?

答 不是任意两个函数 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 都能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

例如, $y=\sqrt{u}$, $u=\cos x-2$ 就不能构成复合函数 $y=\sqrt{\cos x-2}$. 因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $D_f=[0, +\infty)$ 与 $u=\cos x-2$ 的值域 $R_\varphi=[-3, -1]$ 的交集是空集. 一般地, 当函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 与 $u=\varphi(x)$ 的值域 R_φ 的交集 $D_f \cap R_\varphi$ 不空时, 此两函数才能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

将复合函数分解为若干个简单函数, 这对函数的研究会带来方便. 复合函数的分解过程是由外层到内层, 逐层进行的. 例如, $y=\sin(e^{\arctan \sqrt{x}})$ 分解为

$$y = \sin u, \quad u = e^v, \quad v = \arctan w, \quad w = \sqrt{x}.$$

【典型例题剖析】

例 1.1 (1) 求 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg \sin x$ 的定义域.

(2) 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 (1) 由 $\begin{cases} 16-x^2 \geq 0, \\ \sin x > 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -4 \leq x \leq 4, \\ 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \end{cases}$ ($k=0, \pm 1, \dots$). 解得函数的

定义域(图 1.2)为 $D=[-4, -\pi) \cup (0, \pi)$.

(2) 由题设及复合函数的定义可得

$$f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1-x, \text{ 且 } \varphi(x) \geq 0,$$

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)},$$

由表达式得

$$\begin{cases} \ln(1-x) \geq 0, \\ 1-x > 0, \end{cases}$$

解得定义域为 $(-\infty, 0]$.

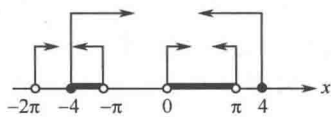


图 1.2

小结 求具体函数的定义域时,应注意对常见函数的某些限制:

- (1) 分式的分母不能为零;
- (2) 根式中负数不能开偶次方;
- (3) 零和负数不能取对数;
- (4) 三角函数、反三角函数的定义域. 如 $\arcsin x$ 中 $|x| \leq 1$, $\tan x$ 中 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$.

对于应用问题中的函数,其定义域由实际问题的具体含义确定.

例 1.2 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; (2) $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$;

(3) $F(x) = \varphi(x) \left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \right)$, 其中 $\varphi(x)$ 为奇函数, 常数 $a > 0, a \neq 1$.

解 (1) 讨论 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} \\ &= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 为奇函数.

此题也可用 $f(x) + f(-x) = 0$ 判定.

(2) $f(-x) = \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = \frac{1 - a^x}{1 + a^x} = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 因 $\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$, 由(2)知为奇函数, 而 $\varphi(x)$ 也是奇函数, 从而

$F(x)$ 为偶函数.

小结 判定函数奇偶性的方法:

- (1) 根据奇偶性的定义;
- (2) 利用奇(偶)函数的代数运算, 如 $f(x) \pm g(x)$: “奇奇为奇, 偶偶为偶”. 如 $f(x) \cdot g(x)$: “偶偶为偶, 奇奇为偶, 奇偶为奇”.

例 1.3 已知定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x + \pi) = f(x) + \sin x$, 试证 $f(x)$ 为周期函数, 且它的最小正周期为 2π .

证 $f(x+2\pi) = f(x+\pi) + \sin(x+\pi) = [f(x) + \sin x] + \sin(x+\pi) = f(x)$, 故 $f(x)$ 为周期函数. 下证 2π 为最小正周期, 设有 $a \in (0, 2\pi)$, 使 $f(x+a) = f(x)$, 则

$$f(\pi+a) = f(\pi) = f(\pi+0) = f(0) + \sin 0 = f(0) = f(a).$$

再由原式得 $f(a+\pi) = f(a) + \sin a$, 于是 $\sin a = 0, a = \pi$, 即 π 也是周期, $f(x+\pi) = f(x)$, 再由原式 $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$, 得 $\sin x \equiv 0$, 矛盾, 故 $f(x)$ 以 2π 为最小正周期.

例 1.4 设 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$, 求 $f(\cos x)$.

分析 先求函数 $f(u)$, 再求 $f(\cos x)$.

解法一 将 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right)$ 的表达式用 $\sin \frac{x}{2}$ 表达.

$$f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} = 2\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right).$$

令 $\sin \frac{x}{2} = u$, 则

$$f(u) = 2(1 - u^2),$$

故

$$f(\cos x) = 2(1 - \cos^2 x) = 2\sin^2 x.$$

解法二 利用三角函数的性质, 将 $\cos x$ 化为正弦函数的半角形式.

$$f(\cos x) = f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = f\left(\sin \frac{\pi - 2x}{2}\right),$$

利用 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$, 得

$$f(\cos x) = 1 + \cos(\pi - 2x) = 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x.$$

例 1.5 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2, & 1 < x \leq 2, \end{cases} g(x) = \ln x$, 求 $f[g(x)]$.

解 $f[g(x)] = f[\ln x] = \begin{cases} 2\ln x, & 0 \leq \ln x \leq 1 \\ \ln^2 x, & 1 < \ln x \leq 2 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 2\ln x, & x \in [1, e] \cap (0, +\infty) \\ \ln^2 x, & x \in [e, e^2] \cap (0, +\infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\ln x, & x \in [1, e], \\ \ln^2 x, & x \in [e, e^2]. \end{cases}$$

小结 对于分段函数的复合函数, 应注意自变量和中间变量的取值范围, 这是保证运算正确的一个重要环节. 初学者容易犯这样的错误(以例 1.5 为例),

$$f[g(x)] = f[\ln x] = \begin{cases} 2\ln x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \ln^2 x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

其错误所在正是未正确地给出中间变量 $u = \ln x$ 的取值范围.

例 1.6 求函数 $y = f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$ 的反函数.

分析 求反函数的步骤为

- (1) 由式 $y = f(x)$ 中解出 $x = \varphi(y)$;
- (2) 对换自变量与因变量的记号, 即可得反函数 $y = \varphi(x)$.

解 由 $y = f(x)$, 解得 $x = \begin{cases} y, & -\infty < y < 1, \\ \sqrt{y}, & 1 \leq y \leq 16, \\ \log_2 y, & 16 < y < +\infty. \end{cases}$ 将式中的 x 与 y 对换, 得

$y = f(x)$ 的反函数

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 16, \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty. \end{cases}$$

例 1.7 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角 $\varphi = 40^\circ$ (图 1.3). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时, 求湿周 $L (L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式, 并说明定义域.

解 由题设知

$$AB = CD = \frac{h}{\sin 40^\circ}, S_0 = \frac{h}{2} (2BC + 2h \cot 40^\circ),$$

解得

$$BC = \frac{S_0}{h} - h \cot 40^\circ,$$

故

$$L = AB + BC + CD = \frac{S_0}{h} + \frac{2h - h \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

由实际问题知, 此函数的定义域由下列不等式组确定:

$$\begin{cases} AB > 0, \\ BC > 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} h > 0, \\ S_0/h - \cot 40^\circ \cdot h > 0, \end{cases}$$

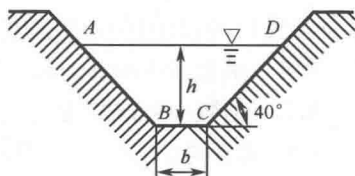


图 1.3

即为

$$0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40^\circ}.$$

思考题 能否用“存在 $M > 0$, 使 $|f(x)| < M, x \in X$ ”来定义函数 $f(x)$ 在 X 上有界, 为什么?

【两级阶段练习】

一级练习

1.1 在下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相同的为_____.

(A) $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln x$;

(B) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(C) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$;

(D) $f(x) = \ln[x(x-1)], g(x) = \ln x + \ln(x-1)$.

1.2 设 $f(x) = \frac{1}{\lg(4-x)} + \sqrt{36-x^2}$, 则 $f(x)$ 的定义域为_____.

$f[f(-6)] =$ _____.

1.3 对于函数 $f(x) = x^2$, 能使邻域 $U(0, \delta)$ 中任一 x 所对应的函数值 $f(x)$ 都在邻域 $U(0, 2)$ 内的 δ 所满足的关系式为_____.

1.4 函数 $y = \tan x + \cos(5x+1)$ 的周期为_____.

1.5 函数 $y = xe^{\cos x}$ 是_____.

(A) 奇函数; (B) 偶函数;

(C) 单调函数; (D) 有界函数.

1.6 证明 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 在 $(-\infty, -1)$ 及 $(-1, +\infty)$ 是单调增加函数.

1.7 函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的反函数为_____.

1.8 下列函数能否复合为函数 $y = f[g(x)]$? 若能, 试写出复合函数的表示式、定义域、值域.

(1) $y = f(u) = \sqrt{u}, u = g(x) = 2x - x^2$;

(2) $y = f(u) = \ln u, u = g(x) = \cos x - 2$;

(3) $y = f(u) = u^2 + u^3, u = g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ -1, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$

1.9 设 $f(x) = \frac{x+|x|}{2}, \varphi(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

1.10 已知一物体与地面的摩擦系数是 μ , 重量是 P . 设有一与水平方向成 α 角的拉力 F , 使物体从静止开始移动(图 1.4), 求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之

间的函数关系.

二级练习

1.11 设 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x} - 1)$ 且 $z|_{y=1} = x$. 求 $f(x)$ 及 z 的表示式.

1.12 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 对一切实数 x, y 适合 $f(xy) = f(x)f(y)$, 且 $f(0) \neq 0$, 求证 $f(x) \equiv 1$, 并利用该结果求 $f(2007)$.

1.13 设 $f(x)$ 是单调增加函数, 且 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 证明 $g[g(x)] \leq f[f(x)] \leq h[h(x)]$.

1.14 判定下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \ln \frac{1-x}{1+x}$; (2) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} + x - 1}{\sqrt{1+x^2} + x + 1}$.

1.15 设函数 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形与 $x = a, x = b$ 均对称 ($a < b$), 求证 $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.

1.16 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1, \\ x^2 + 1, & |x| \geq 1, \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

1.17 当 a, b, c, d 满足什么条件时, 函数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$) 与其反函数相同.

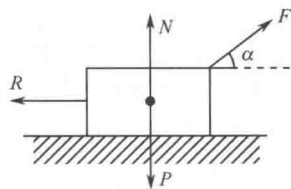


图 1.4

答案与提示

1.1 C.

1.2 $[-6, 3) \cup (3, 4), f[f(-6)] = f(1) = \frac{1}{\lg 3} + \sqrt{35}$.

1.3 $\delta \leq \sqrt{2}$, 解答: 欲使 $f(x) = x^2 \in U(0, 2)$, 即 $-2 < x^2 < 2, |x| < \sqrt{2}$, 故只要取 $\delta \leq \sqrt{2}$ 作为邻域 $U(0, \delta)$ 的半径, 就可使 $f(x) \in U(0, 2)$.

1.4 2π . 1.5 A. 1.7 $\sinh x$.

1.8 (1) 能, $f[g(x)] = \sqrt{2x-x^2}$, 定义域为 $[0, 2]$, 值域为 $[0, 1]$.
(2) 不能.

(3) 能, $f[g(x)] = \begin{cases} 2, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{0, 2\}$.

1.9 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

$$1.10 \quad F = \frac{\mu P}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}.$$

1.11 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x, z = \sqrt{y} + x - 1$. 提示:将 $y=1, z=x$ 代入 z 的表达式得 $f(\sqrt[3]{x}-1) = x-1$, 令 $t = \sqrt[3]{x}-1$, 则 $f(t) = t^3 + 3t^2 + 3t, f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x, z = \sqrt{y} + x - 1$.

1.12 $f(2007) = 1$. 提示:取 $y=0$, 依题意有 $f(0) = f(x)f(0)$, 由 $f(0) \neq 0$ 及 x 的任意性得 $f(x) \equiv 1$, 因此 $f(2007) = 1$.

1.13 提示:由 $g(x) \leq f(x)$ 及 $f(x)$ 单调增加有 $g[g(x)] \leq f[g(x)] \leq f[f(x)]$, 再由 $f(x) \leq h(x)$ 及 $f(x)$ 单调增加有 $f[f(x)] \leq f[h(x)] \leq h[h(x)]$.

1.14 (1) 偶函数; (2) 奇函数. 提示:验证 $f(x) + f(-x) = 0$.

1.15 $T = 2(b-a)$. 提示:由题设有 $f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x)$, 于是

$$\begin{aligned} f(x) &= f[a + (x-a)] = f[a - (x-a)] \\ &= f[2a - x] = f[b + (2a - x - b)] \\ &= f[b - (2a - x - b)] = f[x + 2(b-a)], \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 以 $T = 2(b-a)$ 为周期.

1.16 解:

$$\begin{aligned} f[f(x)] &= \begin{cases} \sqrt{1-f^2(x)}, & |f(x)| < 1 \\ f^2(x) + 1, & |f(x)| \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} = |x|, & 0 < |x| < 1, \\ f[f(0)] = f(1) = 2, & x = 0, \\ (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2, & |x| \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

1.17 $a = -d$ 或 $\begin{cases} b=c=0, \\ a=d \neq 0. \end{cases}$ 提示: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为 $y = \frac{b-dx}{cx-a}$. 由

$$\frac{b-dx}{cx-a} \equiv \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ 得}$$

$$(a+d)[cx^3 + (d-a)x - b] \equiv 0,$$

故 $a = -d$ 或 $\begin{cases} b=c=0, \\ a=d \neq 0. \end{cases}$

第二节 极 限

【知识要点导学】

☞ 概念

- 数列极限, 函数极限.
- 无穷小, 无穷大; 无穷小的阶.

☞ 性质与结论

• 收敛数列性质:

- 1° 极限唯一;
- 2° 收敛数列必有界.

• 极限存在的充要条件:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

• 极限的局部保号性:

- 1° 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0 (< 0)$, 则 $f(x) > 0 (< 0)$, $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$;
- 2° 若 $f(x) \geq 0 (\leq 0)$, $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0 (\leq 0)$.

• 两个重要极限:

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e).$$

• 极限存在准则:

- 1° 若 $x_n \leq y_n \leq z_n (n > N)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$;
- 2° 单调有界数列必有极限.

• 无穷小的性质:

- 1° 有限个无穷小的和(或积)仍为无穷小;
- 2° 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小;
- 3° 无穷小(不取零值)的倒数为无穷大, 无穷大的倒数为无穷小;

$$4^\circ \text{ 若无穷小 } \alpha_1 \sim \alpha_2, \beta_1 \sim \beta_2, \text{ 且 } \lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} \text{ 存在, 则 } \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$