自学
考研
复习

21世纪高等学校辅导教材

● 力学系列丛书

弹性力学题解

● 高教社·《弹性力学·第三版》
《弹性力学简明教程·第三版》(徐芝纶)

刘小明　俞进萍　谭道宏　编

TANXING LIXUE TIJIE

华中科技大学出版社

21 世纪高等学校辅导教材·力学系列丛书

弹性力学题解

高教社·《弹性力学·第三版》《弹性力学简明教程·第三版》（徐芝纶）

刘小明　俞进萍　谭道宏　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学题解/刘小明 俞进萍 谭道宏 编
武汉:华中科技大学出版社, 2003年10月
ISBN 7-5609-3047-6

Ⅰ. 弹…
Ⅱ. ①刘… ②俞… ③谭…
Ⅲ. 弹性力学-高等学校-题解
Ⅳ. O343-44

弹性力学题解 刘小明 俞进萍 谭道宏 编

策划编辑:周芬娜
责任编辑:钟 珊 周芬娜
责任校对:朱 霞
封面设计:潘 群
责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:华大图文设计室
印 刷:湖北恒吉印务有限公司

开本:850×1168 1/32 印张:16.75 字数:405 000
版次:2003年10月第1版 印次:2003年10月第1次印刷
ISBN 7-5609-3047-6/O·291 定价:21.00元

内 容 提 要

本书是高等院校弹性力学的习题解析与学习、考研指导书，它以高等教育出版社出版的、徐芝纶教授主编的《弹性力学・第三版》、《弹性力学简明教程・第三版》为主，对弹性力学习题作了较详细的解答，是此二书的配套教材。本书同时精选了其他弹性力学教材中的部分习题和例题。全书共分十一章，涵盖了弹性力学课程的全部内容。每章包含知识要点、例题解析、测试练习和测试练习解答四部分。知识要点概括了本章的基本概念、基本理论和基本方法。例题解析精心选择了一些典型题目，给出了详细的求解过程，分析归纳了解题所应用的理论和解题的重点、难点。测试练习及解答供学生练习用，部分章节的测试练习题型多样，包括是非题、选择题、填空题等客观题和计算题。

本书可作为高等工科院校力学及有关专业的本科生、专科生和报考硕士学位、博士学位研究生的读者的学习参考书及复习指导书，也适合于电大、函大、职大和参加高等教育自学考试的学生使用，还可作为青年教师的教学参考用书。

前　言

弹性力学是一门技术基础课程。它推理严谨，相对于材料力学求解所得的结果更接近于实际，应用范围更为广泛。学习和掌握它既能掌握一定的解决工程技术问题的基础知识，又能培养分析问题和解决问题的能力。近年来，随着国内高校面向21世纪教学内容与体系改革的纵深发展，各校编写的多种改革教材纷纷出版面世。与之相应，也对课程的教学辅导书籍提出了新的、更高的要求。为适应这一形势的发展需要，我们编写了这本例题和习题集。

本书是以徐芝纶教授编写的高等学校《弹性力学·第三版》、《弹性力学简明教程·第三版》两教材为主，并结合作者多年的教学经验编写的。全书共十一章，涵盖了弹性力学课程的全部内容。每章包含知识要点、例题解析、测试练习和测试练习解答四部分。知识要点概括了本章的基本概念、基本理论和基本方法，指出了学习中应该注意的问题和解题方法。例题解析精心选择了一些典型例题，给出了详细的求解过程，分析归纳了解题时所应用的理论，解题的重点、难点、技巧，不同解法的优缺点和容易出现的错误等。选题主要是以巩固基本概念、基本理论和基本方法为目的。测试练习包括是非题、选择题、填空题等客观题和计算题。测试题主要让读者检测自己对基本概念、公式、方法的理解能力；计算题主要检测读者正确利用基本概念、基本理论和基本方法进行逻辑思维的能力和计算能力，即解决问题的能力。

本书除供力学专业的大学生和研究生使用外，也可供其他工科专业的大学生和研究生使用，还可供力学教师和有关工程技术人员参考。

本书的编写分工是：刘小明——第一章、第二章、第四章、第五章；谭道宏——第七章、第八章、第九章、第十一章；俞进萍——第

三章、第六章、第十章。全书最后由刘小明统稿、定稿。

本书在编写出版过程中得到了华中科技大学出版社的大力支持和帮助，在此深表谢意。

由于时间较为仓促及编者的学识所限，书中难免有不妥甚至错误之处，恳请读者批评指正。

编者

2003 年 7 月

目　　录

第一章　绪论及平面问题的基本理论

知识要点

1. 弹性力学的理论概要

(1) 弹性力学的研究对象、内容和范围

弹性力学研究物体在外界因素(外力、温度变化)影响下处于弹性阶段的应力、应变和位移,其研究对象为一般及复杂形状的构件、实体结构、板壳等。

(2) 弹性力学的基本假定

为简化计算,弹性力学假定所研究的物体具有连续性、均匀性、完全弹性、各向同性、小变形等五个基本假定。

弹性力学所涉及的各种基本量的名称、符号及正、负号规定见表1-1。

表1-1　直角坐标表示的各种基本量情况

基本量		空间问题	平面问题	量纲	正负号规定
未知量	正应力	$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$	σ_x,σ_y	[力/长度]$^{-2}$	正面正向、负面负向为正
	剪应力	$\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{xz}$	τ_{xy}	[力/长度]$^{-2}$	
	正应变	$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$	$\varepsilon_x,\varepsilon_y$	无量纲	线段伸长为正
	剪应变	$\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{xz}$	γ_{xy}	无量纲	线段间的夹角变小为正
	位移	u,v,w	u,v	[长度]	沿坐标轴正向为正
已知量	体力	X,Y,Z	X,Y	[力/长度]$^{-3}$	沿坐标轴正向为正
	面力	$\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}$	$\overline{X},\overline{Y}$	[力/长度]$^{-2}$	

弹性力学中常采用直角坐标系(x,y,z)、极坐标系(r,θ)、柱坐标系(r,θ,z)和球坐标系(R,θ,φ)。

2. 材料特性、弹性常数、应力-应变关系

应力-应变关系的形式可表示为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz} \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xz} = \dfrac{1}{G}\tau_{xz} \end{cases} \tag{1-1}$$

3. 两类平面问题的概念

(1) 平面应力问题

如图1-1 所示薄平板，其z方向尺寸比其他两个方向上的尺寸小得多，外力及体力均平行于板面，且沿厚度没有变化，这类问题称为平面应力问题。

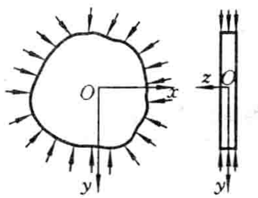

图 1-1

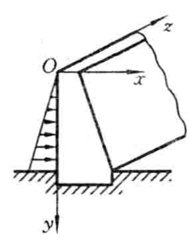

图 1-2

(2) 平面应变问题

若物体的z方向尺寸比其他两个方向上的尺寸大得多，如图1-2 所示很长的坝体，外力及体力沿z方向没有变化，则这类问题称为平面应变问题。

(3) 两类平面问题的一些特征

两类平面问题的一些特征见表1-2 所列，其中八个基本未知量都仅是坐标(x,y)的函数。

表 1-2　两类平面问题的一些特征

名称	平面应力问题		平面应变问题	
	未知量	已知量	未知量	已知量
位移	u, v	$w \neq 0$	u, v	$w = 0$
应变	$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ $\varepsilon_z = -\dfrac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$	$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = \varepsilon_z = 0$
应力	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	$\tau_{yz} = \tau_{xz} = \sigma_z = 0$	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$
外力	体力、面力的作用面平行于 xOy 平面，外力沿板厚均布		体力、面力的作用面平行于 xOy 平面，外力沿轴 z 无变化	
形状	z 向尺寸远小于板面尺寸（等厚度薄平板）		z 向尺寸远大于 xOy 平面内的尺寸（等截面长柱体）	

4. 平面问题的基本方程

（1）平衡微分方程

根据平衡条件来导出应力分量与体力分量之间的关系式，即为平面问题的平衡微分方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \\
\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0
\end{cases}
\tag{1-2}
$$

式(1-2)分别表示图 1-3 所示微分单元体在 x 和 y 方向的静力平衡条件。

（2）几何方程

平面问题中表明形变分量与位移分量之间的关系式，即为几何方程

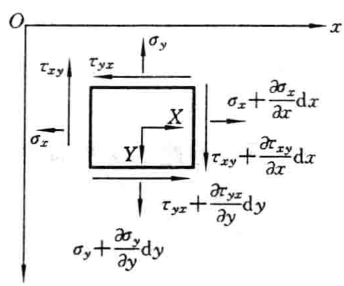

图 1-3

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1-3}$$

由上式可得到变形协调方程为

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{1-4}$$

(3) 物理方程

平面问题中表明形变分量与应力分量之间的关系式，即为物理方程

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \quad = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \tag{1-5}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x - \dfrac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y - \dfrac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \end{cases} \tag{1-6}$$

其中，E、μ、G 分别是弹性模量、泊松比和剪切模量，$G=E/[2(1+\mu)]$。

在平面应力问题的物理方程式(1-5)中，将 E、μ 分别换成 $E/(1-\mu^2)$、$\mu/(1-\mu)$，就得到平面应变问题的物理方程式(1-6)。反之，将式(1-6)中的 E、μ 分别换成 $E(1+2\mu)/(1+\mu^2)$、$\mu/(1+\mu)$，就可得到式(1-5)。

5. 平面问题的边界条件

(1) 位移边界条件

若表面上给定位移分量 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$，则位移边界条件为

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} \tag{1-7}$$

(2) 应力边界条件

若表面上给定表面力，则应力边界条件为

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{xy} = \overline{X} \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y = \overline{Y} \end{cases} \tag{1-8}$$

(3) 混合边界条件

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}$$

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{xy} = \overline{X} \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y = \overline{Y} \end{cases}$$

6. 平面问题中一点的应力状态、主应力

①过一点的任一斜截面上的正应力 σ_N、剪应力 τ_N 可分别由式(1-9)、式(1-10)求出(l、m 是该斜截面的方向余弦)：

$$\sigma_N = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + 2lm\tau_{xy} \tag{1-9}$$

$$\tau_N = lm(\sigma_y - \sigma_x) + (l^2 - m^2)\tau_{xy} \tag{1-10}$$

②任一点的主应力 σ_1 和 σ_2 可由式(1-11)求得，σ_1 和 σ_2 与 x 轴的夹角 α_1 和 α_2 可由式(1-13)求出：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{1-11}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \tag{1-12}$$

$$\begin{cases} \tan\alpha_1 = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \\ \tan\alpha_2 = -\dfrac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_x} \end{cases} \tag{1-13}$$

例题解析

【例 1-1】 试证明在图 1-4 中，y 方向的位移 v 所引起的线段 PA 的伸缩是高阶微量。

证法 1 由于我们研究的问题只限于微小变形的情况，故设 α 为微量，如果忽略二阶以上微量，则有

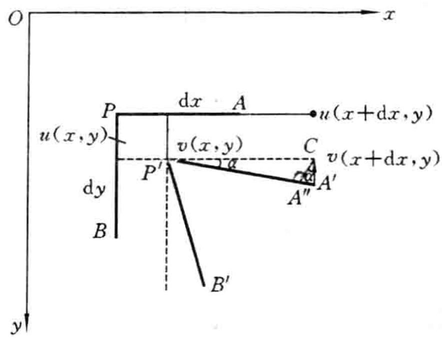

图 1-4

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\tan\alpha=\sin\alpha=a & \text{为一阶微量}\\ \cos\alpha=1 & \text{为有限量}\end{cases}$$

P′A″=P′C cosα

在图中$\overline{A'A''}$就是v所引起的PA线段的伸缩长度。

因为
$$\triangle P'CA'\backsim\triangle CA''A'$$

=cosα=1

所以
$$\frac{\overline{A''A'}}{\overline{CA'}}=\frac{\overline{CA''}}{\overline{P'C}}$$

又因为α很小，则$\overline{A''C}=\overline{A'C}$，所以$\overline{A''A'}=\overline{CA'}\cdot\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{P'C}}$

=P′A″=P′C =dx

由于$\overline{CA'}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$，$\overline{P'C}=\mathrm{d}x$代入上式得

$\dfrac{\partial v^2}{\partial x}\mathrm{d}x^2 / \mathrm{d}x$

$$\overline{A''A'}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x$$

故$\overline{A'A''}$为PA ……

故对于ε_x而言，v引起的影响项为二阶微量，当忽略后则有
$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$$
证毕。

证法 2

从形变的定义有

$$\varepsilon_x=\frac{\overline{P'A'}-\overline{PA}}{\overline{PA}}=\frac{\sqrt{\left(\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right)^2}-\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$$

因为$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right)^2$是$v$所引起的二阶微量，忽略后则有

$$\varepsilon_x = \frac{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$ 证毕。

证法 3

由已知条件P'，A'点的坐标可分别写为

$$P'[x+u(x,y), y+v(x,y)]$$

$$A'[x+\mathrm{d}x+u(x+\mathrm{d}x,y), y+v(x+\mathrm{d}x,y)]$$

$$\overline{P'A'} = \left[\left(\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x^2\right]^{1/2}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{P'A'}-\overline{PA}}{\overline{PA}} = \frac{\left[1+2\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}x - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$$

$$= \left[1+2\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} - 1$$

利用牛顿二项式展开则有

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \cdots$$

而v在式中恰为二阶微量的影响。上式为几何非线性方程，若略去二阶微量则变为线性方程为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$ 证毕。

【例1-2】 一水坝刚性固结在基础上，坝高为h，坝基宽为b。如图 1-5(a)所示，试写出受挤顶水压作用时的水坝边界条件（不计体力）。

解 设水的容重为γ，应力边界条件为

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{xy} = \overline{X} \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y = \overline{Y} \end{cases}$$

考察垂直面OA，见图 1-5(b)。

方向余弦$l=\cos(N\cdot x)=-1$，$m=\cos(N\cdot y)=0$，面力$\overline{X}=$

方何取负值？

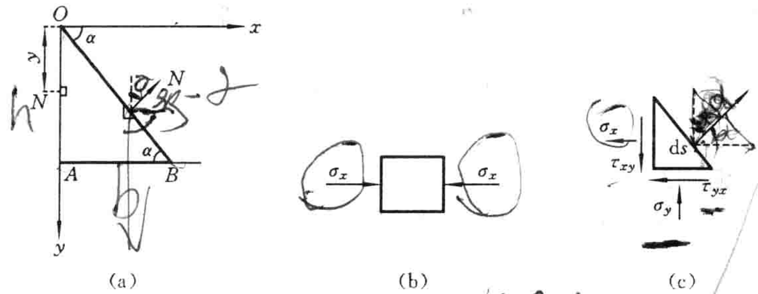

图 1-5

γy,$\overline{Y}=0$,在不计坝的自重情况下,$\sigma_y=0$ 代入上式则得

$$\sigma_x = -\gamma y,\quad \tau_{xy} = 0$$

考察斜面 OB,见图 1-5(c)。

由平衡方程

$$\sum X = 0,\quad \sigma_x\sin\alpha = \tau_{xy}\cos\alpha$$

$$\sum Y = 0,\quad \sigma_y\cos\alpha = \tau_{xy}\sin\alpha$$

【例 1-3】 证明当平面问题的微分单元体上所受的应力不是均匀分布时,其平衡微分方程仍为式(1-2)。

解 微分单元体 $PABC$ 的边长 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 都是微量,因此,各点的应力分量写成泰勒级数展开式时,可忽略二阶以上的高阶微量,而看成线性分布,如图 1-6 所示。各点的正应力为

$$(\sigma_x)_P = \sigma_x,\quad (\sigma_y)_P = \sigma_y$$

$$(\sigma_x)_A = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x,\quad (\sigma_y)_A = \sigma_y + \frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$(\sigma_x)_C = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\mathrm{d}y,\quad (\sigma_y)_C = \sigma_y + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$(\sigma_x)_B = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$(\sigma_y)_B = \sigma_y + \frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\mathrm{d}y$$

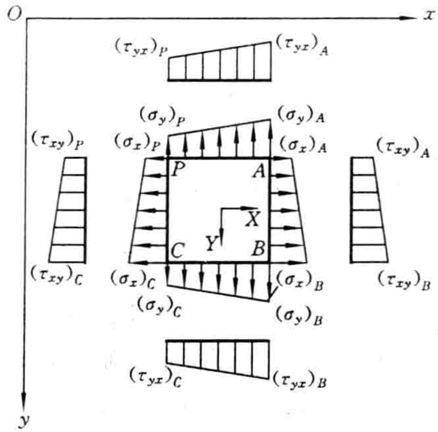

图 1-6

各点的剪应力为

$$(\tau_{xy})_P = \tau_{xy}, \quad (\tau_{yx})_P = \tau_{yx}$$

$$(\tau_{xy})_A = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x, \quad (\tau_{yx})_A = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$(\tau_{xy})_C = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\mathrm{d}y, \quad (\tau_{yx})_C = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$(\tau_{xy})_B = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$(\tau_{yx})_B = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y$$

此微分单元体应满足平面问题的三个平衡条件：$\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$，$\sum M_0=0$。设单元体的厚度为t，取$\sum F_x=0$，得

$$\left\{-\frac{1}{2}\left[\sigma_x + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right]\cdot t\right\}\mathrm{d}y$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right) + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right]\cdot t\right\}\mathrm{d}y$$