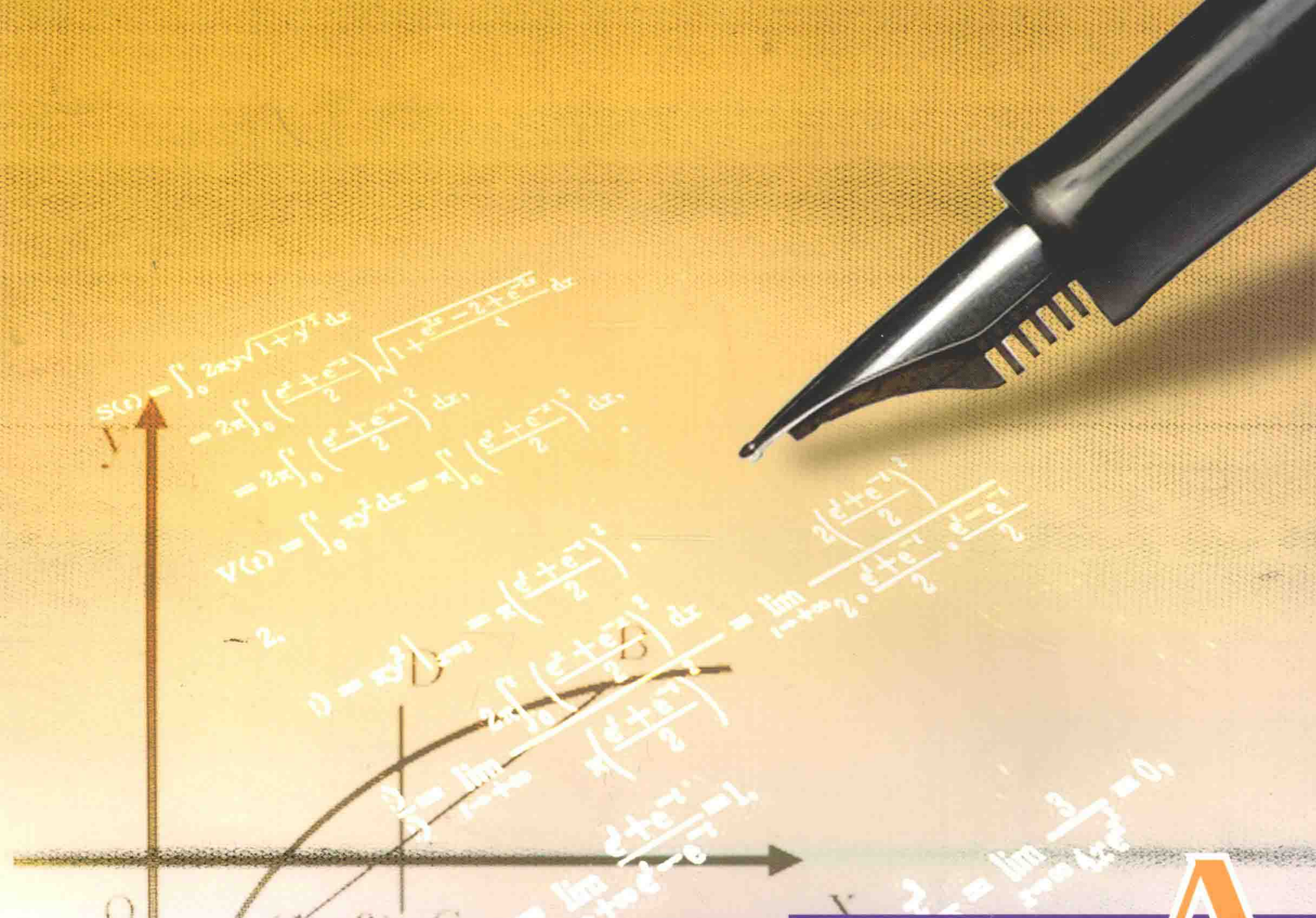

高等数学练习册A

钱 盛 唐旭晖 张 杰 编

清华大学出版社

高等数学练习册A

钱盛 唐旭晖 张杰 编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本练习册是根据高等院校理工类专业对高等数学（微积分）课程的教学要求编写的，适用于分层教学中对高等数学有较高要求的学生使用. 全书共分 12 章，涉及的主要内容有函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线曲面积分、无穷级数等，涵盖了理工类各专业高等数学（微积分）课程的全部知识点. 在体例方面，分为作业题、自测题和期末考试样卷三部分. 其中作业题部分侧重双基内容，属于同步学习时学生必须掌握的；而将那些难度较大、方法较为灵活的题目归入自测题，这部分供学有余力的学生选作；此外，还设置了三套期末考试样卷，为学生备战期末考试提供一个参考的样本. 本练习册可以帮助读者更好地理解概念、把握重点、了解考研动向、开拓视野、提高分析解决问题的能力，既可作为读者学习高等数学（微积分）课程的同步练习，也可作为高等院校理工类各专业高等数学（微积分）课程的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学练习册. A / 钱盛, 唐旭辉, 张杰编. --北京：清华大学出版社，2015

ISBN 978-7-302-41118-5

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①钱…　②唐…　③张…　Ⅲ. ①高等数学–高等学校–习题集　Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 183367 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：210mm×297mm　　**印　张**：15　　**字　　数**：361 千字
版　　次：2015 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 8 月第1 次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：29.80 元

产品编号：066383-01

前　言

高等数学的主要内容是微积分. 从 17 世纪中叶牛顿、莱布尼茨的奠基性工作至今，微积分已经发展成一个知识广博、体系精密的数学分支. 作为处理连续变量问题的最有力的数学工具，微积分不仅是其他数学分支的基础，在自然科学、社会科学的众多领域也有极其广泛的应用. 至今高等数学已经成为高等院校理工类、经管类专业的重要公共基础课.

本书的主要内容由北方工业大学公共数学教学团队（北京市优秀教学团队）共同编写. 在编写过程中，我们充分注意了近年来中学数学教学内容的改革，力求在中学与大学的教学内容之间做到顺畅衔接，使得大一新生能够快速地进入学习状态. 在内容的取舍方面，我们在巩固基础、强化基本概念的前提下，精选了一部分新颖灵活、难度较高并且具有一定综合性的题目，其中相当一部分习题来源于最近十年的考研真题. 实践证明，这些题目对于提高同学们的解题能力帮助很大. 在体例编排上，本书体现了数学教学循序渐进、由浅入深的特点，又及时反映了近十年来考研命题的新动向. 本书曾在高等数学分层教学中使用多年，得到了同学们的好评，效果显著. 现将其整理成书，公开出版，希望我们的努力能够惠及更多的学子.

本书由钱盛博士和唐旭晖副教授执笔编写，经公共数学教学团队全体成员反复讨论修改而成，最后由张杰教授统稿.

本书既可以作为高等院校理工科类各专业本科、专科（含高职）的高等数学课程的同步练习，也可以作为各类成人教育或者相关专业人员高等数学课程的辅导用书.

疏漏及不足之处，欢迎批评指正.

编者

2015 年 6 月于北方工业大学

目　录

第 1 章作业题一（极限概念与运算）

一、选择与填空题

1. 已知数列$\{x_n\}=\left\{\left[1+(-1)^n\right]^n\right\}$，则（　　）.

A. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq\infty$但$\{x_n\}$无界

C. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$　　D. $\{x_n\}$发散但有界

2. 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有（　　）.

A. $a_n<b_n$，对任意n成立　　B. $b_n<c_n$，对任意n成立

C. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　D. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

3. 从$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$不能推出（　　）.

A. $f(x_0-0)=1$　　B. $f(x_0+0)=1$　　C. $f(x_0)=1$　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]=0$

4. $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=1$是$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$的（　　）.

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 既非充分也非必要条件

5. 当$x\to\infty$时，$\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$（　　）.

A. 趋于 0　　B. 趋于∞　　C. 是有界变量　　D. 是无界变量

6. 函数$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$在点$x=0$处（　　）.

A. 有定义且有极限　　B. 无定义但有极限　　C. 有定义但无极限　　D. 无定义且无极限

7. 当$x\to0$时，函数$f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$的极限是（　　）.

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 不存在且不是无穷大

8. 若$f(x)-k=\alpha$，其中k是常数，当$x\to x_0$时，$\alpha\to0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

9. 已知数列$\{x_n\}=\left\{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}\right\}$（$n$重根号），则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

10. 函数$f(x)$在点x_0处左、右极限存在且相等是$f(x)$在点x_0处极限存在的＿＿＿＿＿＿＿＿条件.

11. 若在点x_0的左邻域(a,x_0)上，恒有函数$f(x)>g(x)$，且极限$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0-0}g(x)$都存在，则必有$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$＿＿＿＿＿＿＿＿$\lim\limits_{x\to x_0-0}g(x)$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-4n+6)^8}{10n^{15}-8n^{10}-2n^3+5}=$ ________________.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{46x^2-23x+20}{7x^5+2x^3-x}=$ ________________.

二、计算题

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4n+3}{2n^2}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{7x^3+x-5}$.

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0, \\ ax+b, & x>0, \end{cases}$ 求 $f(0+0)$， $f(0-0)$；若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$，求 b.

6. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{2}{2n^2}+\cdots+\dfrac{n}{2n^2}\right)$.

7. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ $(|a|<1,|b|<1)$.

8. 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$.

9. 求$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{\sqrt{3x+3}-3}$.

10. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}$.

11. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2 x-2\cos x-1}{2\cos^2 x+\cos x-1}$.

12. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$.

13. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\arctan x$.

14. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt{\dfrac{2n-1}{2n}}\right)$.

15. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a，b 的值.

16. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$,当$x\to 1$时，极限是否存在？

三、证明题

1. 对于数列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2. 设 $P(x)$ 是多项式函数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)-x^3}{x^2}=2,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(x)}{x}=1$. 证明：$P(x)=x^3+2x^2+x$.

第 1 章作业题二（无穷小的比较、重要极限、函数的连续性）

一、选择与填空题

1. 设 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，下列命题不正确的是 (　　).

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ （a 是实数），则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = -\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$　　D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin 2x}{x}$ 的结果是 (　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(\mathrm{e}^{\frac{1-n^2}{n}})}{n\mathrm{e}^{\frac{1-n^2}{n}}} =$ (　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ∞

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{kn} = \mathrm{e}^{-3}$，则 $k =$ (　　).

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $-\dfrac{2}{3}$

5. 当 $x \to x_0$ 时，$f(x) = o(1)$，$g(x) = o(1)$，且在某个 x_0 的去心邻域上 $g(x) \neq 0$，则 (　　).

A. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$　　C. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$　　D. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不一定存在

6. 若当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x), \beta(x)$ 都是无穷小，则当 $x \to x_0$ 时，下列表示式 中哪一个不一定是无穷小 (　　).

A. $|\alpha(x)| + |\beta(x)|$　　B. $\alpha^2(x) + \beta^2(x)$　　C. $\ln[1+\alpha(x)\cdot\beta(x)]$　　D. $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$

7. 当 $x \to 0$ 时，x^k 与 $x + x^2 + x^3$ 是等价无穷小，则 $k =$ (　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 当 $x \to 0$ 时，$x^2 + 2(\sqrt{1+x} - 1)$ 是 x 的 (　　).

A. 高阶无穷小　　B. 等价无穷小　　C. 低阶无穷小　　D. 同阶但不等价无穷小

9. 当 $n \to \infty$ 时，$\dfrac{1+2n^2+3n^3}{1+n^4}$ 是 $\dfrac{1-2n^2+3n^3}{1-n^5}$ 的 (　　).

A. 高阶无穷小　　B. 等价无穷小　　C. 低阶无穷小　　D. 同阶但不等价无穷小

10. 当 $x \to 0$ 时，函数 $\mathrm{e}^{x^2} - \cos x$ 是 x^2 的 (　　).

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小　　C. 等价无穷小　　D. 同阶但不等价无穷小

11. 当 $x \to 0$ 时，下列结论正确的是 (　　).

A. $\ln(1-x^2) \sim x^2$　　B. $\sqrt{1-2x} - 1 \sim x$　　C. $1 - \mathrm{e}^{2x} \sim 2x$　　D. $\ln(1+\sin x) \sim x$

12. 下列结论正确的是 (　　).

A. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义且极限存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续

B. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，$g(x)$ 在点 x_0 处不连续，则 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处必不连续

C. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处都不连续，则 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处必不连续

D. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，$g(x)$ 在点 x_0 处不连续，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在点 x_0 处必不连续

13. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ x+2, & x>0\end{cases}$ 在分段点 $x=0$ 处（　　）.

A. 函数有定义且极限存在　　C. 极限存在且连续

B. 函数无定义且极限不存在　　D. 极限存在但不连续

14. 函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x-1}}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处（　　）.

A. 连续　　B. 左连续　　C. 右连续　　D. 左右都不连续

15. $x=0$ 是函数 $x\cos\dfrac{1}{x}+x^2$ 的（　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

16. $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x^2, & x<0,\\ \dfrac{1}{x^2}\sin x, & x>0\end{cases}$ 的（　　）.

A. 跳跃间断点　　B. 无穷间断点　　C. 第一类间断点　　D. 第二类间断点

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\sin x\right)=$____________.

18. 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1$，则 $f(1)=$____________.

19. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x+2c}\right)^x=4$，则 $c=$____________.

20. 当 $x\to 0$ 时，$\sin 2x-2\sin x$ 是 x 的____________阶无穷小量（请填写具体数字）.

21. 设常数 $m,n\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(mx+x^2)}{\arctan(x+nx^2)}=$____________.

二、计算题

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$.

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+\frac{1}{n}}{n^2-1}+\dfrac{n+\frac{2}{n}}{n^2-2}+\cdots+\dfrac{n+\frac{n}{n}}{n^2-n}\right)$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin 2x}$.

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{2-n}$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

7. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)\cdot(\tan x-\sin x)}{(e^x-1)^2\cdot\sin(x^2)}$.

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\ln(1+e^{an})\cdot\ln\left(1+\dfrac{b}{n}\right)\right\}$，其中 a,b 为常数，且 $a>0$.

10. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)}-1}{x^2}=3$，求常数 a,b，使得当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)\sim ax^b$.

11. 求函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2+5x-6}$ 的间断点，并判断间断点的类型.

12. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的连续性，指出其连续区间、间断点及其类型.

三、证明题

1. 设数列 $\{x_n\}(x_n\leqslant 1)$ 由递推式 $x_{n+1}=\dfrac{1}{5}(2x_n+3)(n=1,2,\cdots)$ 确定，其中 $x_1>0$，证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限.

2. 设当 $x\to\infty$ 时，有 $\alpha(x)=o(1)$，$\beta(x)=o(1)$，且当 $|x|$ 充分大时有 $\beta(x)\neq 0$. 试证：若 $\alpha(x)\sim\tilde{\alpha}(x)$，$\beta(x)\sim\tilde{\beta}(x)$，则有 $\lim\limits_{x\to\infty}\{1+\alpha(x)\}^{1/\beta(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\{1+\tilde{\alpha}(x)\}^{1/\tilde{\beta}(x)}$.

3. 证明方程 $x - a\sin x = b$ 至少存在一根 $\xi \in (0, a+b]$，其中常数 a, b 满足 $0 < a < 1, b > 0$.

4. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续，且 $f(0) = f(2a)$，证明：在 $[0, a]$ 上至少存在一点 x，使 $f(x) = f(x+a)$.