新世纪高等院校经管类数学教材

高等数学（经管类）

狄　芳　陆生琪　陶　耘　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高 等 数 学

（经管类）

狄 芳　陆生琪　陶 耘　编著

东 南 大 学 出 版 社
·南京·

内容提要

近几年来，我国高等教育有了较大发展，为适应部分二本、三本类高等院校经管类专业的教学需要，配合高等院校的教学改革和教材建设，我们遵照教育部最新制定的《经济管理类本科教学基础课程教学基本要求》编写了本书。全书共11章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分法及其应用、二重积分、无穷级数、常微分方程与差分方程简介；同时，考虑到计算机技术的迅速发展和普及，本书在附录部分介绍了MATLAB软件，使学生能通过计算机编程来亲身体验数学知识，提高学习的兴趣。

本书内容精炼、结构严谨且通俗易懂，可作为二本、三本类高等院校经管类专业的教材，也可供从事经济、管理工作的人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类 / 狄芳，陆生琪，陶耘编著．—南京：东南大学出版社，2015.8

ISBN 978-7-5641-5945-0

Ⅰ．①高… Ⅱ．①狄… ②陆… ③陶… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第169970号

高等数学(经管类)

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼2号(邮编:210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(办公电话:025-83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700mm×1000mm　1/16
印　　张	22.25
字　　数	436千字
版　　次	2015年8月第1版
印　　次	2015年8月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-5945-0
定　　价	45.80元

本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话:025-83791830。

前　言

近几年来，我国高等教育有了较大发展，为适应部分二本、三本类高等院校经管类专业的教学需要，配合高等院校的教学改革和教材建设，我们遵照教育部最新制定的《经济管理类本科教学基础课程教学基本要求》(以下简称"教学基本要求")编写了本书。全书共11章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分法及其应用、二重积分、无穷级数、常微分方程与差分方程简介；同时，考虑到计算机技术的迅速发展和普及，本书在附录部分介绍了 MATLAB 软件，使学生能通过计算机编程来亲身体验数学知识，提高学习的兴趣。

本书保持了传统微积分的知识体系，对微积分基本内容的讲解做到了内容精炼、结构严谨、循序渐进、通俗易懂，注重理论与实际的结合，以利于学生综合素质的形成和对科学思想方法与创新能力的培养。同时本书还注意与中学数学的衔接，增加了中学数学教材中删去而学习微积分必备的知识点，如和差化积与积化和差公式、反三角函数等。对于某些超出"教学基本要求"而属于教学中可讲可不讲的内容，即使编入，也均以 * 号标记，以供不同专业的教师和学生选用和参考。

为使学生更好地掌握所学知识，提高应用能力，本书每章后都配有大量习题。其中，A 组为基本概念题，主要加强学生对基本知识的理解；B 组为提高题，有志于报考研究生的学生除做完 A 组习题外，还可选做 B 组中的习题，以加深对微积分知识的理解，提高解题能力。

本书第 1,2,3 及 11 章由陶耘编写，第 4,5,6,7 章由陆生琪编写，第 8,9,10 章由狄芳编写，最后由狄芳统稿。在编写本书过程中得到了三江学院各位领导，尤其是数学教研室姚天行教授的大力支持，在此我们表示衷心感谢！

由于编者水平有限，加上时间仓促，本书难免存在不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编者
2015 年 5 月

目 录

1 函数 …… 1

1.1 集合 …… 1

1.1.1 集合 …… 1

1.1.2 实数集 …… 5

1.2 函数 …… 6

1.2.1 常量与变量 …… 6

1.2.2 函数概念 …… 7

1.2.3 分段函数 …… 9

1.2.4 隐函数 …… 10

1.2.5 建立函数关系的例题 …… 10

1.3 函数的几种简单性质 …… 11

1.3.1 有界性 …… 11

1.3.2 单调性 …… 12

1.3.3 奇偶性 …… 13

1.3.4 周期性 …… 13

1.4 反函数与复合函数 …… 14

1.4.1 反函数 …… 14

1.4.2 复合函数 …… 16

1.5 初等函数 …… 17

1.5.1 基本初等函数 …… 17

1.5.2 初等函数 …… 21

本章小结 …… 22

习题1 …… 22

2 极限与连续 …… 27

2.1 数列的极限 …… 27

2.1.1 数列 …… 27

2.1.2 数列极限 …… 27
2.2 函数的极限 …… 30
2.2.1 $x \to x_0$ 时函数的极限 …… 30
2.2.2 $x \to \infty$ 时函数的极限 …… 32
2.3 无穷大量与无穷小量 …… 34
2.3.1 无穷大量 …… 34
2.3.2 无穷小量 …… 35
2.3.3 无穷大量与无穷小量的关系 …… 37
2.4 极限的基本性质与运算法则 …… 37
2.4.1 极限的基本性质 …… 37
2.4.2 极限的四则运算法则 …… 39
2.4.3 复合函数的极限运算法则 …… 42
2.5 极限存在准则与两个重要极限 …… 43
2.5.1 夹逼准则与第一个重要极限 …… 43
2.5.2 单调有界收敛准则与第二个重要极限 …… 45
2.6 等价无穷小的替换 …… 48
2.7 函数的连续性 …… 50
2.7.1 连续的概念 …… 50
2.7.2 函数的间断点 …… 52
2.7.3 连续函数的运算法则 …… 54
2.7.4 初等函数的连续性 …… 55
2.7.5 闭区间上连续函数的性质 …… 56
本章小结 …… 58
习题 2 …… 58

3 导数与微分 …… 64

3.1 导数的概念 …… 64
3.1.1 引例 …… 64
3.1.2 导数的定义 …… 66
3.1.3 导数的几何意义 …… 68
3.1.4 可导与连续的关系 …… 69
3.2 求导法则 …… 71
3.2.1 导数的四则运算法则 …… 71

3.2.2 反函数的求导法则 …… 73
3.2.3 复合函数的求导法则 …… 75
3.2.4 隐函数的导数 …… 77
3.2.5 取对数求导法 …… 78
3.2.6 由参数方程所确定的函数的导数 …… 79
3.2.7 基本导数公式 …… 79
3.3 高阶导数 …… 80
3.4 函数的微分 …… 83
3.4.1 微分的概念 …… 83
3.4.2 微分的几何意义 …… 85
3.4.3 微分法则 …… 86
3.4.4 微分在近似计算中的应用 …… 86
本章小结 …… 87
习题 3 …… 87

4 微分中值定理与导数的应用 …… 93

4.1 微分中值定理 …… 93
4.1.1 罗尔定理 …… 93
4.1.2 拉格朗日定理 …… 95
4.1.3 柯西定理 …… 98
4.2 洛必达法则 …… 99
4.2.1 $\frac{0}{0}$型不定式 …… 99
4.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$型不定式 …… 100
4.2.3 其他类型的不定式 …… 101
4.3 函数单调性的判定和函数的极值 …… 102
4.3.1 函数单调性的判定 …… 102
4.3.2 函数的极值 …… 104
4.4 函数的最大值与最小值 …… 107
4.4.1 函数的最值 …… 107
4.4.2 函数最值应用举例 …… 108
4.5 曲线的凹凸性和拐点 …… 110
4.6 函数图像的描绘 …… 112

4.6.1 曲线的渐近线 …… 112
4.6.2 函数图像的描绘 …… 114
4.7 导数在经济学中的应用 …… 115
4.7.1 边际分析 …… 115
4.7.2 函数弹性 …… 118
本章小结 …… 121
习题 4 …… 121

5 不定积分 …… 126

5.1 不定积分的概念与性质 …… 126
5.1.1 原函数 …… 126
5.1.2 不定积分的概念 …… 127
5.1.3 不定积分的几何意义 …… 128
5.1.4 不定积分的基本性质 …… 129
5.1.5 不定积分的基本公式 …… 130
5.1.6 直接积分法 …… 131
5.2 换元积分法 …… 132
5.2.1 第一类换元积分法 …… 133
5.2.2 第二类换元积分法 …… 137
5.3 分部积分法 …… 142
5.4 几种特殊类型函数的积分 …… 145
5.4.1 有理函数的积分 …… 145
*5.4.2 三角函数有理式的积分 …… 147
5.4.3 简单无理函数的积分 …… 148
本章小结 …… 148
习题 5 …… 149

6 定积分及其应用 …… 153

6.1 定积分的概念 …… 153
6.1.1 引例 …… 153
6.1.2 定积分的定义 …… 155
6.1.3 定积分的几何意义 …… 156
6.2 定积分的性质 …… 158

6.3 微积分基本定理 …… 161
6.3.1 积分上限函数及其导数 …… 162
6.3.2 牛顿-莱布尼兹公式 …… 163
6.4 定积分的换元积分法和分部积分法 …… 165
6.4.1 定积分的换元积分法 …… 165
6.4.2 定积分的分部积分法 …… 168
6.5 反常积分 …… 169
6.5.1 无穷区间上的反常积分 …… 169
6.5.2 无界函数的反常积分 …… 171
6.5.3 Γ函数 …… 173
6.6 定积分的应用 …… 174
6.6.1 定积分的元素法 …… 174
6.6.2 平面图形的面积 …… 175
6.6.3 旋转体的体积 …… 178
6.6.4 函数的平均值 …… 179
6.6.5 定积分在经济上的应用 …… 180
本章小结 …… 181
习题6 …… 181

7 多元函数微分法及其应用 …… 187

7.1 空间直角坐标系及常见曲面方程 …… 187
7.1.1 空间直角坐标系 …… 187
7.1.2 空间两点间的距离 …… 188
7.1.3 曲面及其方程 …… 189
7.1.4 空间曲线 …… 194
7.2 多元函数的概念、极限与连续性 …… 195
7.2.1 多元函数的概念 …… 196
7.2.2 多元函数的极限 …… 198
7.2.3 多元函数的连续性 …… 200
7.3 偏导数与全微分 …… 201
7.3.1 偏导数的概念 …… 201
7.3.2 二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数的几何意义 …… 204
7.3.3 高阶偏函数 …… 204

7.3.4 全微分的概念 …… 206
7.3.5 全微分在近似计算中的应用 …… 209
7.4 偏导数求导法则 …… 210
7.4.1 多元复合函数的求导法则 …… 210
7.4.2 隐函数求导法则 …… 212
7.5 多元函数的极值 …… 213
7.5.1 多元函数极值的概念 …… 213
7.5.2 最大值和最小值 …… 215
7.5.3 条件极值 …… 216
本章小结 …… 218
习题7 …… 218

8 二重积分 …… 223

8.1 二重积分的概念 …… 223
8.1.1 曲顶柱体的体积 …… 223
8.1.2 二重积分的定义 …… 224
8.1.3 二重积分的性质 …… 225
8.2 二重积分的计算(Ⅰ) …… 226
8.2.1 利用直角坐标计算二重积分 …… 226
8.2.2 利用极坐标计算二重积分 …… 232
*8.3 二重积分的计算(Ⅱ) …… 236
8.3.1 $f(x,y)$关于 x 或 y 为奇、偶函数的二重积分 …… 236
8.3.2 区域 D 关于直线 $y=x$ 对称的二重积分 …… 238
本章小结 …… 239
习题8 …… 239

9 无穷级数 …… 245

9.1 常数项级数的概念和性质 …… 245
9.1.1 常数项级数的概念 …… 245
9.1.2 无穷级数的基本性质 …… 248
9.2 数项级数的收敛性判别法 …… 251
9.2.1 正项级数及其收敛性判别法 …… 251
9.2.2 交错级数及其收敛性判别法 …… 257

9.2.3 绝对收敛与条件收敛 …… 259
9.3 函数项级数的概念与幂级数 …… 261
9.3.1 函数项级数的概念 …… 261
9.3.2 幂级数及其收敛性 …… 263
9.3.3 幂级数的运算 …… 266
9.4 函数展开成幂级数 …… 268
9.4.1 泰勒公式与泰勒级数 …… 268
9.4.2 函数展开成幂级数 …… 269
9.5 幂级数的应用举例 …… 275
本章小结 …… 276
习题9 …… 276

10 常微分方程与差分方程简介 …… 282

10.1 微分方程的基本概念 …… 282
10.2 一阶微分方程 …… 284
10.2.1 可分离变量的微分方程 …… 284
10.2.2 齐次方程 …… 285
10.2.3 一阶线性微分方程 …… 287
*10.2.4 伯努利方程 …… 291
*10.3 可降阶的二阶微分方程 …… 291
10.3.1 $y''=f(x)$型的微分方程 …… 292
10.3.2 $y''=f(x,y')$型的微分方程 …… 292
10.3.3 $y''=f(y,y')$型的微分方程 …… 293
10.4 二阶常系数线性微分方程 …… 294
10.4.1 二阶常系数线性齐次微分方程 …… 294
10.4.2 二阶常系数线性非齐次微分方程 …… 297
10.5 微分方程在经济学中的应用举例 …… 300
10.6 差分方程的一般概念 …… 302
10.6.1 函数的差分 …… 302
10.6.2 差分方程的一般概念 …… 303
*10.7 一阶常系数线性差分方程 …… 304
10.7.1 一阶常系数线性差分方程的概念及通解结构 …… 304
10.7.2 一阶常系数线性齐次差分方程的解法 …… 305

10.7.3 一阶常系数线性非齐次差分方程的解法 …… 306
本章小结 …… 308
习题 10 …… 308

11 附录：MATLAB 实验 …… 314

11.1 MATLAB 简介 …… 314
11.2 曲线绘图 …… 316
11.3 求极限的 MATLAB 命令 …… 319
11.4 求导数的 MATLAB 命令 …… 319
11.5 导数应用 …… 320
11.6 一元函数的不定积分与定积分计算 …… 323
11.7 多元函数作图、偏导以及极值计算 …… 324
11.8 二重积分计算 …… 327
11.9 MATLAB 在无穷级数中的使用 …… 327
11.10 求解微分方程 …… 329

参考答案 …… 330

参考文献 …… 344

1 函　数

1.1　集合

1.1.1　集合

1）集合的概念

集合是具有某种共同性质的对象的全体. 例如，某高校一年级学生、一批产品、方程 $x^2-4x-12=0$ 的根、全体实数，等等. 我们把组成某一集合的那些对象称为这个集合的元素. 例如上述的集合中，学生、产品、根、数等都分别为相应集合的元素.

习惯上用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示集合，而用小字母 $a,b,c,\cdots$表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就记为 $a\in A$，读作 a 属于 A 或者 a 在 A 中；如果 a 不是集合 A 的元素，就记为 $a\notin A$，读作 a 不属于 A 或者 a 不在 A 中.

由有限多个元素组成的集合称为有限集合，如上述方程的根；特别的，仅含一个元素的集合称为单元素集. 由无限多个元素组成的集合称为无限集合，如正整数集.

2）表示法

表示集合有两种表示法. 一种是描述法，即若一个集合的元素可以一一列举出来，可用一个花括号{　}把这些元素括起来，以表示这个集合. 例如，由元素 a_1，$a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A 可以表示为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 另一种方法是描述法，即若集合 M 是具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可以表示成 $M=\{x|x$ 具有性质 $P\}$. 例如，集合 B 是全体偶数的集合就可以表示为 $B=\{x|x=2n,n$ 为整数$\}$.

集合以及集合间的关系可以用图形表示，称为文氏图. 文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合（见图 1-1），集合内的元素则用区域内的点表示.

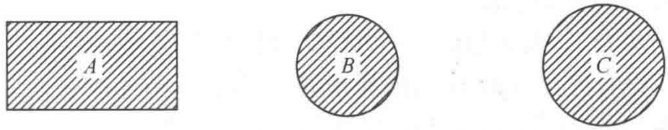

图 1-1

3) 空集与全集

不含有任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. 例如，方程 $x^4+1=0$ 的实数解的集合为空集. 由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为 Ω. 全集是相对的，一个集合在某种情况下是全集，在另一种条件下就可能不是全集. 例如，讨论的问题仅限于有理数，则有理数集 **Q** 为全集；若讨论的问题为实数集，则有理数集 **Q** 就不是全集.

4) 子集

定义 1.1 如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B，则称 A 为 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A（见图 1-2）.

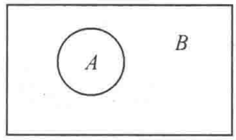

图 1-2

例 1-1 已知集合 $A=\{2,3,4\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$，则 $A\subset B$.

由定义可知，任何一个集合的本身是它的子集，即 $A\subset A$；空集 $\varnothing$ 是任何一个集合的子集.

定义 1.2 设有集合 A 与 B，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

例 1-2 已知集合

$$A=\{x\,|\,x\text{ 为大于 3 小于 6 的整数}\},$$
$$B=\{x\,|\,x^2-9x+20=0\},$$

则 $A=B$.

由子集的定义可知，若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$，即集合关系有传递性.

5) 集合的运算

集合之间可以进行运算. 设 A，B 是任意两个集合，它们的运算主要有以下几种.

定义 1.3 由 A 与 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$（见图 1-3），即 $A\cup B=\{x\,|\,x\in A\text{ 或 }x\in B\}$.

例 1-3 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

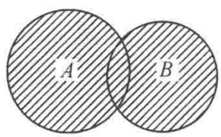

图 1-3

例 1-4 设 $A=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\,|\,x>0\}$，则

$$A\cup B=\{x\,|\,x\geqslant -1\}.$$

集合的并有下列性质：

(1) $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$；

(2) 对任何集合 A，有 $A\cup\varnothing=A$，$A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup A=A$.

定义 1.4 设有集合 A 和 B，由既属于 A 又属于 B 的元素所构造的集合称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$（见图 1-4），即

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

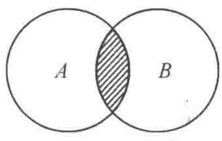

图 1-4

例 1-5 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{a,b\}$,则

$$A\cap B=\{a,b\}.$$

例 1-6 设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x\mid x<-1\}$,则

$$A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x<-1\}.$$

集合的交有下列性质:

(1) $A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$;

(2) 对任何集合 A,有 $A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cap\Omega=A$,$A\cap A=A$.

如果 $A\cap B=\varnothing$,则称 A,B 是不相交的,或说 A,B 是分离的.

定义 1.5 设有集合 A 和 B,由属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合称为 A 与 B 的差,记为 $A-B$(见图 1-5),即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

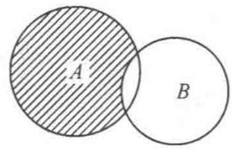

图 1-5

例 1-7 如果 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,3,5\}$,则

$$A-B=\{2\}.$$

定义 1.6 全集 Ω 中所有不属于 A 的元素构成的集合称为 A 的余集或补集,记为 $\overline{A}$(见图 1-6),即

$$\overline{A}=\{x\mid x\in\Omega \text{ 且 } x\notin A\}.$$

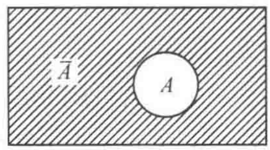

图 1-6

例 1-8 设某单位全体员工为全集 Ω,如果 A 表示该单位懂德语的人的集合,则 $\overline{A}$ 表示该单位不懂德语的人的集合.

补集有下列性质:

$$A\cup\overline{A}=\Omega,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing.$$

集合的并、交与补具有与初等代数里加法和乘法相类似的性质,现列举如下:

① 交换律:$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

② 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

③ 分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

④ 对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

下面证明分配律的第二个式子和对偶律的第一个式子,其他的关系式可类似进行证明.

分配律的第二个式子的证明如下:

证 设 $x\in(A\cap B)\cup C$,则

$$x\in A\cap B \quad \text{或} \quad x\in C,$$

因此

$$x\in A \text{ 同时 } x\in B \quad \text{或} \quad x\in C,$$

于是

$$x\in A\cup C \quad 同时 \quad x\in B\cup C,$$

即

$$x\in (A\cup C)\cap (B\cup C),$$

于是

$$(A\cap B)\cup C\subset (A\cup C)\cap (B\cup C).$$

反之设 $x\in (A\cup C)\cap (B\cup C)$,则

$$x\in A\cup C \quad 同时 \quad x\in B\cup C,$$

因此

$$x\in A\ 或\ x\in C \quad 同时 \quad x\in B\ 或\ x\in C,$$

所以

$$x\in (A\cap B)\cup C,$$

于是

$$(A\cup C)\cap (B\cup C)\subset (A\cap B)\cup C.$$

从而

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap (B\cup C).$$

对偶律的第一个式子的证明如下:

证 如果 $x\in \overline{A\cup B}$,则 $x\notin A\cup B$,即

$$x\notin A\ 且\ x\notin B, \quad 即 \quad x\in \overline{A}\ 且\ x\in \overline{B},$$

因此 $x\in \overline{A}\cap \overline{B}$,所以

$$\overline{A\cup B}\subset \overline{A}\cap \overline{B}.$$

反之设 $x\in \overline{A}\cap \overline{B}$,则 $x\in \overline{A}$ 且 $x\in \overline{B}$,即

$$x\notin A\ 且\ x\notin B, \quad 即 \quad x\notin A\cup B,$$

因此 $x\in \overline{A\cup B}$,所以

$$\overline{A}\cap \overline{B}\subset \overline{A\cup B}.$$

于是有

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap \overline{B}.$$

例 1-9 利用集合运算律证明:$Z\cup \overline{\overline{Z}\cap Y}\cup Y=\Omega$.

证

$$\begin{aligned} Z\cup \overline{\overline{Z}\cap Y}\cup Y &= Z\cup (\overline{\overline{Z}}\cup \overline{Y})\cup Y=(Z\cup \overline{Z}\cup \overline{Y})\cup Y \\ &= \Omega\cup \overline{Y}\cup Y=\Omega. \end{aligned}$$

6) 笛卡儿乘积

集合的元素是不涉及顺序的,如$\{1,2\}$与$\{2,1\}$是指同一集合,但有时需要研究元素必须按照某种规定顺序进行排列的问题.

将两元素 a 与 b 按前后顺序排成一个元素组(a,b),称为有序元素组.(a,b)与(b,a)是两个不同的有序元素组.

原
书
缺
页