普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学（下册）

GAODENG SHUXUE

主　编◎何希勤　宋桂荣　张玉杰
副主编◎王　博　王　娜　蔡立刚　张洪涛
主　审◎苏晓明

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学

（下　册）

主　编　何希勤　宋桂荣　张玉杰

副主编　王　博　王　娜　蔡立刚

张洪涛

参　编　石鸿雁　赵　莹　丁　蕾

主　审　苏晓明

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是辽宁省10所理工科院校工科基础课教材系列之一，全书分上、下两册，内容丰富、思路清晰、结构严谨、体系完整，具有推理严密、概念准确、叙述详略得当的特点，并增加了数学实验内容．书中精心编选了适当的例题，每节都配备了基础题和提高题．

下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容，书末还附有习题答案．

本书适于作为高等院校高等数学课程的教材，也可供相关自学者、工程技术人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/何希勤，宋桂荣，张玉杰主编．—北京：北京理工大学出版社，2013.9（2014.9重印）

ISBN 978-7-5640-8346-5

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①何…②宋…③张…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第216134号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 /100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
82562903（教材售后服务热线）
68948351（其他图书服务热线）
网　　址 /http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /北京京华虎彩印刷有限公司
开　　本 /787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 /14.5
字　　数 /332千字
版　　次 /2013年9月第1版　2014年9月第3次印刷
定　　价 /65.00元（上下册）

责任编辑 /王俊洁
文案编辑 /侯瑞娜
责任校对 /周瑞红
责任印制 /王美丽

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

编写说明

根据《教育部关于“十二五”普通高等教育本科教材建设的若干意见》(教高〔2011〕5号)精神和《辽宁省教育厅办公室关于组织开展“十二五”普通高等学校本科规划教材首批推荐遴选工作的通知》(辽教办发〔2011〕249号)的要求，沈阳工业大学、辽宁科技大学、辽宁石油化工大学、辽宁工业大学、大连交通大学、大连工业大学、沈阳航空航天大学、沈阳理工大学、沈阳建筑大学和沈阳工程学院等辽宁省内10所理工科院校理学院(数理系)发起组织了普通高等教育本科基础课高等数学1、高等数学2、线性代数、概率论及数理统计、工程数学、大学物理、大学物理实验、双语高等数学和双语大学物理等九门课程教材的编写工作.

为做好本套教材的编写工作，确保优质教材进课堂，辽宁省10所理工科院校的理学院院长(数理系主任)及基础课相关学科负责人组建了学科建设和教材编写专委会和编委会.专委会工作的目标是通过创新、融合，整合各院校优质教学教研资源，广泛吸收10所理工科院校在工科基础课课程教学理念、学科建设和体系搭建等方面的教学教研建设成果，按照当今最新的教材理念和立体化教材开发技术，通过不断的教材修订、立体化体系建设打造“工科基础课”教材品牌.

本套书力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂. 全书有较多的例题，便于读者自学，同时注意尽量多给出一些应用实例.

本书可供高等院校理工科类各专业学生使用，也可供广大教师、工程技术人员参考.

辽宁省10所理工科院校理学院(数理系)
基础课学科建设和教材编写专委会和编委会
2013年6月6日

前　言

高等数学是理工科各专业的重要基础课，它内容丰富，理论严谨，应用广泛，影响深远，既为后续课程准备必要的数学知识与方法，又对学生科学思维的训练起着重要的作用．

本书是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准，以培养学生的专业素质为目的，充分吸收多年来教学实践和教学改革成果编写而成的．

结合长期的教学实践经验，我们努力在本书中体现以下特点：

(1) 直观性．对重要概念的引入重视几何与实际背景，遵循从感性到理性的认知规律，基本概念的叙述准确，基本定理的证明简明易懂，基本方法的应用详细易学．

(2) 应用性．注重高等数学的思想和方法在解决实际问题方面的应用，每章增加一节数学实验内容以提高学生学习数学的积极性和对数学的应用意识，培养学生用所学的数学知识和计算机技术解决实际问题的能力．

(3) 通俗性．语言简明通俗，叙述详略得当，例题丰富全面，每节配有练习题，分为 A 类和 B 类．A 类是基本题，围绕本节知识内容进行学习和训练；B 类是提高题，供学有余力的学生进一步提高数学水平选用．

(4) 完整性．注重与中学知识的衔接，增加了基本初等函数性质和图形的介绍，也注重本课程知识间的前后呼应，使结构更严谨．

(5) 方便性．优化了部分章节的知识点顺序，使内容更紧凑，难点分散，也使教与学双方在使用上更方便，从讲述和训练两个层面体现因材施教的原则．

本书是辽宁省 10 所理工科院校工科基础课系列教材之一，分上、下两册出版．本书的编写由苏晓明(沈阳工业大学)、何希勤(辽宁科技大学)负责全书的提纲设计，组织协调；书稿整理、统稿由宋桂荣(沈阳工业大学)负责．执笔分工如下：第 1、2 章由沈阳理工大学刘玉凤、原璐编写；第 3、9 章由大连工业大学张玉杰、刘超编写(其中，刘超编写了第 3 章 6、7、8 三节，其余由张玉杰编写)；第 4、5、6 章由辽宁科技大学张金海、邢军、郭良栋编写；第 7、12 章由沈阳工程学院霍满臣、王娜编写；第 8、10、11 章由沈阳工业大学蔡立刚、张洪涛、王博编写；附录部分由宋桂荣编写．

本书上册由辽宁科技大学何希勤教授主审，下册由沈阳工业大学苏晓明教授主审．沈阳工业大学教师石鸿雁、赵莹、丁蕾在此书的出版过程中帮助修改和校稿，在此向他们表示谢意．

本书是在沈阳工业大学、沈阳理工大学、沈阳工程学院、辽宁科技大学与大连工业大学全体数学教师的鼎力支持下才得以编写完成的，同时参考了众多专家学者编著的微积分教材与大学数学教材，在此谨向他们表示衷心的感谢．

本书可作为高等本科院校各专业高等数学课程的通用教材，也可供各专科专业选用．

限于编者水平，教材中不妥与错误之处在所难免，欢迎广大专家、同行及读者批评指正．

目　　录

第 8 章　向量代数与空间解析几何

本章首先介绍了有关向量代数的基本概念及运算，并建立了空间直角坐标系；然后以向量为工具讨论空间曲面与平面方程、空间曲线与直线方程，并给出了一些常见的空间曲面图形；最后给出了一些相关的 MATLAB 试验．

§ 8.1　向量与坐标

8.1.1　向量的概念

在物理学以及日常生活中，有这样一类量，例如位移、力、速度、加速度等，它们既有大小，又有方向，像这种既有大小又有方向的量叫作向量，或称矢量，简称矢．

在数学上，常用有向线段来表示向量．有向线段的始点与终点分别叫作向量的始点与终点，有向线段的方向表示向量的方向，而有向线段的长度代表向量的大小．始点是 A，终点是 B 的向量记作$\overrightarrow{AB}$(如图 8-1 所示)．在手写时常用带箭头的小写字母 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{x}$，…，而在印刷时常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}$，…来记向量．(本章中向量用手写体编写)

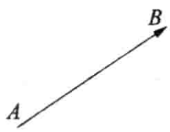

图 8－1

所有向量的特点都是由其大小和方向确定的．如果两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的大小相等，且方向相同，我们就说向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是相等的，记作 $\vec{a}=\vec{b}$. 也就是说，两个向量是否相等与它们的起始点无关，只要经过平行移动后能完全重合的向量都是相等的．而像这样与起点无关且只由大小和方向决定的向量，通常叫作自由向量．本章讨论的所有向量都是自由向量，简称为向量．

向量的大小叫作向量的模，也称向量的长度．向量$\overrightarrow{AB}$与 $\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 、$|\vec{a}|$.

模等于 1 的向量叫作单位向量，与向量 $\vec{a}$ 具有同一方向的单位向量叫作向量 $\vec{a}$ 的单位向量，常用$\vec{e}_{\vec{a}}$来表示．

模等于 0 的向量叫作零向量，记作 0 或 $\vec{0}$. 零向量是起点与终点重合的向量，零向量的方向不定，可以看作方向是任意的．不是零向量的向量叫作非零向量．

设 $\vec{a}$ 为一向量，与 $\vec{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫作 $\vec{a}$ 的负向量，记作$-\vec{a}$.

由于在几何中，我们把向量看成是一个有向线段，因此像对待线段一样，只要说到向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相互平行，意思就是它们所在的直线相互平行，并记作 $\vec{a}//\vec{b}$. 类似地，我们可以说一个向量与一条直线或一个平面平行．

设有两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，任取空间一点 O，作 $|\overrightarrow{OA}|=\vec{a}$，$|\overrightarrow{OB}|=\vec{b}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角(如图 8－2 所示)，记作$(\widehat{\vec{a}\ ,\vec{b}})$或$(\widehat{\vec{b}\ ,\vec{a}})$，即$(\widehat{\vec{a}\ ,\vec{b}})=$

$\angle AOB$. 如果向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值.

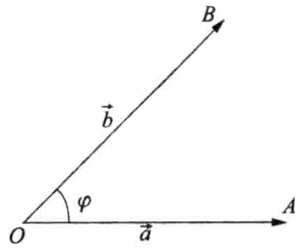

图 8-2

上面提到的 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行规定为 $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=0$ 或 π. 如果 $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\frac{\pi}{2}$，就称向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$. 由于零向量与另一向量的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值，因此可以认为零向量与任何向量都平行，也可以认为零向量与任何向量都垂直.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上. 因此两平行向量，又称两向量共线.

类似还有向量共面的概念. 设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量共面.

8.1.2　向量的线性运算

1. 向量的加减法

物理学中的力与位移都是向量. 作用于一点的两个不共线的力的合力，可以用"平行四边形法则"求出(如图 8-3 所示). 两个位移的合成可以用"三角形法则"求出(如图 8-4 所示). 在自由向量的意义下，两向量合成的平行四边形法则可归结为三角形法则.

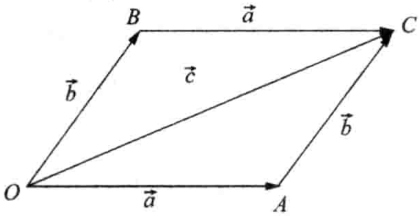

图 8-3

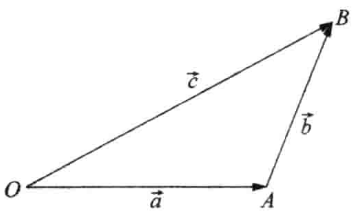

图 8-4

定义 1　设已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，以空间任意一点 O 为始点接连作向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，得一折线 OAB，从折线的端点 O 到另一端点 B 的向量 $\overrightarrow{OB}=\vec{c}$，叫作两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. 求两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和 $\vec{a}+\vec{b}$ 的运算叫作向量的加法.

根据定义，由图 8-4 有

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB},$$

这种求两个向量和的方法叫作三角形法则.

由此再根据图 8-3，如果以两个向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边组成一个平行四边形 $OACB$，那么对角线向量

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},$$

这种求两个向量和的方法叫作平行四边形法则．

向量加法满足下面的运算规律：

(1)交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

(2)结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

(3)$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

(4)$\vec{a}+(-\vec{a})=0$.

这是由于，按向量加法的定义，由图 8－3 可得：

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$
$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

所以满足交换律

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

又如图 8－5 所示，自空间任意点 O 开始依次引 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$，根据向量加法定义有

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

所以满足结合律

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

上述的式(3)与式(4)，根据定义显然成立．

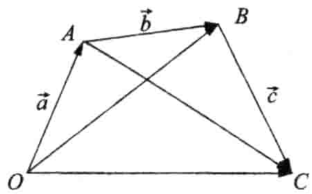

图 8－5

由于向量的加法满足交换律与结合律，所以三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 相加，不论它们的先后顺序与结合顺序如何，它们的和总是相同的，因此简单地写成 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

推广到任意 n 个向量 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$ 的和，就可以记作

$$\vec{s}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$；再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和．如图 8－6 所示，有

$$\vec{s}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n.$$

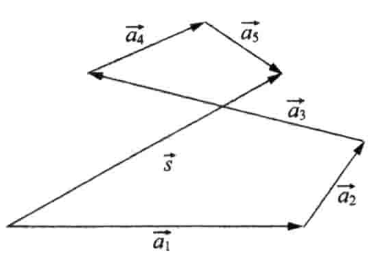

图 8－6

前面讲过向量的负向量概念，由此，我们规定向量的减法，即设两向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，则

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

从向量减法的这个规定，可以得出向量等式的移项法则：在向量等式中，将某一向量从等号的一端移到另一端，只需改变它的符号．例如将等式 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$ 中的 $\vec{c}$ 移到另一端，那么有 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}-\vec{c}$. 这是因为从等式 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$ 两边减去 $\vec{c}$，即加上 $-\vec{c}$，而 $\vec{c}+(-\vec{c})=\vec{0}$.

根据向量加法的三角形法则，可得向量减法的几何作图法(如图 8－7 所示)：自空间任意点 O 引向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$. 如果以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为一对邻边构成平行四边形 $OACB$(如图 8－8 所示)，那么显然它的一条对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$，而另一条对角线向量 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$.

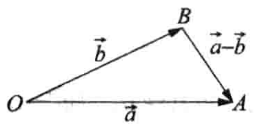

图 8－7

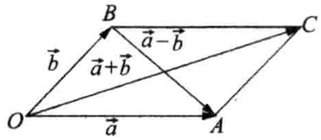

图 8－8

我们还要指出，由三角形两边之和大于第三边，对于任何的两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，有

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}| \text{ 及 } |\vec{a}-\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

其中等号在 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向或反向时成立．

2. 向量与数的乘法

我们知道，位移、力、速度与加速度等都是向量，而时间、质量等都是数量，这些向量与数量间常常会发生某些结合的关系，如我们熟知的公式

$$\vec{f}=m\vec{a},$$

这里 $\vec{f}$ 表示力，$\vec{a}$ 表示加速度，m 表示质量．再如公式

$$\vec{s}=\vec{v}t,$$

这里 $\vec{s}$ 表示位移，$\vec{v}$ 表示速度，t 表示时间．

在向量的加法中，我们也已看到，n 个向量相加仍然是向量，特别是 n 个相同的非零向量 $\vec{a}$ 相加的情形，显然这时的和向量的模为 $|\vec{a}|$ 的 n 倍，方向与 $\vec{a}$ 相同．n 个 $\vec{a}$ 相加的和常记作 $n\vec{a}$.

定义 2 实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\vec{a}$，它的模是 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；$\lambda\vec{a}$ 的方向，当 $\lambda>0$ 时与 $\vec{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\vec{a}$ 相反．我们把这种运算叫作数量与向量的乘法，简称为数乘．

从这个定义我们立刻知道，当 $\lambda=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$ 时，$|\lambda\vec{a}|=0$，即 $\lambda\vec{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的．

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\vec{a}=\vec{a},\ (-1)\vec{a}=-\vec{a}.$$

数与向量的乘法满足下面的运算规律：

(1)结合律：$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$.

这是因为由向量与数的乘积的规定可知，向量 $\lambda(\mu\vec{a})$、$\mu(\lambda\vec{a})$、$(\lambda\mu)\vec{a}$ 都是平行的向量，它们的指向也是相同的，而且

$$|\lambda(\mu\vec{a})|=|\mu(\lambda\vec{a})|=|(\lambda\mu)\vec{a}|=|\lambda\mu|\,|\vec{a}|,$$

所以

$$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}.$$

(2)分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来证明，这里从略.

向量加法及数乘向量统称为向量的线性运算.

例 1　设 AM 是$\triangle ABC$ 的中线，求证

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

证　如图 8-9 所示，有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM},$$

所以　$$2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}).$$

但　$$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MB}=\vec{0},$$

因而　$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

即　$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

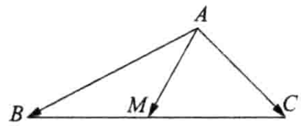

图 8-9

前面已经讲过，模等于 1 的向量叫作单位向量. 设$\vec{e}_{\vec{a}}$表示与非零向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量，那么按照向量与数的乘积的规定，由于$|\vec{a}|>0$，所以$|\vec{a}|\vec{e}_{\vec{a}}$与$\vec{e}_{\vec{a}}$的方向相同，即$|\vec{a}|\vec{e}_{\vec{a}}$与 $\vec{a}$ 的方向相同. 又因$|\vec{a}|\vec{e}_{\vec{a}}$的模是

$$|\vec{a}|\,|\vec{e}_{\vec{a}}|=|\vec{a}|\cdot 1=|\vec{a}|,$$

即$|\vec{a}|\vec{e}_{\vec{a}}$与 $\vec{a}$ 的模也相同，因此，

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e}_{\vec{a}}.$$

我们规定，当 $\lambda\neq 0$ 时，$\dfrac{\vec{a}}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\vec{a}$. 由此，上式又可写成

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{e}_{\vec{a}}.$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

由于向量 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 平行，因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理　设向量 $\vec{a}\neq\vec{0}$，那么，向量 $\vec{b}$ 平行于 $\vec{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

证　条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\vec{b}//\vec{a}$，取 $|\lambda|=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向时 λ 取负值，即有 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. 这是因为此时 $\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向，且

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=|\vec{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性．设 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，又设 $\vec{b}=\mu\vec{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\vec{a}=\vec{0}，即|\lambda-\mu||\vec{a}|=0.$$

因 $|\vec{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

证毕．

上述定理是建立数轴的理论依据．我们知道，给定一个点、一个方向及单位长度，就确定了一条数轴．由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴．设点 O 及单位向量 $\vec{i}$ 确定了数轴 Ox(如图 8 - 10 所示)，对于轴上任一点 P，对应的向量 $\overrightarrow{OP}$，由于 $\overrightarrow{OP}//\vec{i}$，由定理 1 可知，必存在唯一实数 x，使 $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$；反之，任给一个实数 x，都有一个向量 $\overrightarrow{OP}$ 与之对应．由此可知 Ox 轴上点 P 的坐标为 x.

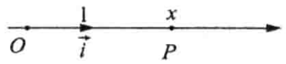

图 8 - 10

下面我们就来建立三维空间直角坐标系．

8.1.3　空间直角坐标系

过空间一点 O 作三条两两互相垂直的数轴，它们以 O 为原点，取同样的长度单位．这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称为坐标轴．它们的正方向符合右手规则：以右手握住 z 轴，右手的四指从 x 轴的正方向逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 y 轴正方向时，大拇指的指向即为 z 轴的正方向．通常将 x 轴，y 轴配置在水平面上，z 轴垂直于水平面，如图 8 - 11所示．

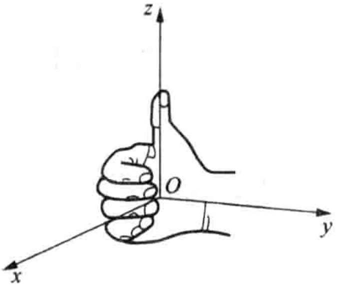

图 8 - 11

这样的三条坐标轴就构成一个空间直角坐标系 $Oxyz$. 称点 O 为坐标原点．每两条坐标轴确定一个平面，称为坐标面. 比如由 x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 面．类似地，有 yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面将空间分成八个部分，每一个部分叫作一个卦限．其中第Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限位于 xOy 面上方，由 x 轴、y 轴、z 轴正方向确定的那个卦限叫第Ⅰ卦限，由第Ⅰ卦限开始逆时针依次为第Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限．第Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限位于 xOy 面下方，由第Ⅰ卦限下方的第Ⅴ卦限开始逆时针依次为第Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限，如图 8 - 12 所示．