线性代数

（第二版）

主　编　钟玉泉　周　建

副主编　罗　淼　刘冬兵　于　勇

科 学 出 版 社

线 性 代 数

(第二版)

主　编　钟玉泉　周　建
副主编　罗　淼　刘冬兵　于　勇

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书根据编者多年的教学实践，参考高等院校理工类本科专业线性代数课程的教学大纲及考研大纲编写而成. 内容涵盖了行列式、矩阵、向量组、线性方程组、特征值、二次型等知识；书中融入了数学文化和线性代数应用的教学内容. 本书选编题型丰富，习题题量适中，通俗易懂，便于自学，并增加了一些实际应用的例子，体现了线性代数在处理应用问题中的重要作用.

本书可作为理工类本科、专科线性代数教材，也可作为考研的复习资料.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/钟玉泉，周建主编. —2版. —北京：科学出版社，2015.1
ISBN 978-7-03-042580-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①钟… ②周… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第273686号

责任编辑：张中兴 周金权／责任校对：邹慧卿
责任印制：霍 兵／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011年1月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015年1月第 二 版 印张：11
2015年1月第四次印刷 字数：221 000

定价：26.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

数学是自然科学的基本语言, 对培养人的理性思维品格和思辨能力、自主创新能力有着重要的意义.

我国高等教育从精英教育向大众化教育的过渡, 给大学数学教学带来了一系列的变化和挑战. 编者认为, 在教材建设上不能继续按照传统的"追求逻辑的严密性和理论体系的完整性, 重理论、轻实践"的思想, 应遵循"打牢基础、强化能力、立足应用"的原则, 尽量体现数学的广泛应用.

为此, 编者削枝强干、夯实基础、密切联系实际、服务专业、体现数学建模思想. 本书注重数学的基础性、工具性和应用性, 力争为学生理解数学的抽象概念提供认知基础, 尽量促使学生实现从学数学到用数学的能力转变.

为满足考研的需要, 本书结合考研大纲, 增加了这方面的例题、习题, 供使用者参考.

本书第 1 章由罗淼老师编写, 第 2 章由刘冬兵老师编写, 第 3 章由周建老师编写, 第 4 章和第 5 章由于勇老师编写, 全书由钟玉泉、周建主编, 在编写过程中得到科学出版社的大力支持, 在此表示衷心感谢.

第二版在第一版的基础上, 系统更加完善, 各章节的表述更加一致, 前后的连贯性更好, 书中还有不足之处, 恳请使用者批评指正.

编　者

2014 年 7 月 10 日

目　　录

第 1 章　行　列　式

在数学中, 行列式是由解线性方程组产生的一种算式, 也是一种非常重要的数学工具. 在中国古代, 用筹算表示联立一次方程未知量的系数时, 就有了行列式的萌芽. 日本吸收了这种思想, 在 1683 年, 日本学者关孝和 (Seki Takakusu) 对行列式的概念和它的展开已有了清楚的叙述. 到 18 世纪, 瑞士数学家克拉默 (G.Gramer) 和法国数学家拉普拉斯 (P.S.Laplace) 建立了系统的行列式理论.

1.1　排列与逆序数

1.1.1　排列与逆序数

自然数 1, 2, $\cdots$, n 组成的有序数组称为一个 n 元排列, 记为 $p_1p_2\cdots p_n$, n 元排列共有 $n!$ 个. 排列 $12\cdots n$ 称为自然排列或标准排列, 规定其为标准顺序.

定义 1.1.1　在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中, 若一个大的数排在一个小的数的前面 (即某两个数的先后顺序与标准顺序相反), 则称这两个数产生一个逆序, 一个 n 元排列中所有逆序的总数称为该排列的逆序数, 记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

如果一个排列的逆序数是奇数 (偶数), 则称其为奇 (偶) 排列.

例如, 在五元排列 32514 中, 所有的逆序对为 32, 31, 21, 51, 54, 所以 $\tau(32514)=5$, 故此排列为奇排列.

具体计算一个排列的逆序数的方法如下:

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数 1, 2, $\cdots$, n 的一个排列, 考虑排列中的元素 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$, 如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的数有 t_i 个, 就称 p_i 这个元素的逆序数是 t_i, 排列中全体元素的逆序数的总和就是该排列的逆序数, 即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

当然也可以观察比 p_i 小且排在 p_i 后面的数的个数总和.

例 1.1.1　求下列排列的逆序数:

(1) 436251;　　(2) $n(n-1)\cdots 21$.

解　(1) 在排列 436251 中, 观察元素 p_i 前面比 p_i 大的数的个数;

4 排在首位, 逆序数为 0;

3 的前面比 3 大的数只有一个, 逆序数为 1;

6 的前面没有比 6 大的数, 逆序数为 0;
2 的前面比 2 大的数有三个, 逆序数为 3;
5 的前面比 5 大的数有一个, 逆序数为 1;
1 的前面比 1 大的数有 5 个, 逆序数为 5.
于是排列 436521 的逆序数为

$$\tau(436521) = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 + 5 = 10.$$

(2) 同理可得

$$\tau[n(n-1)\cdots 21] = 0 + 1 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

自然数 1, 2, 3 共有 3! =6 个排列, 分别为 123, 132, 213, 231, 312, 321, 其逆序数分别为 0, 1, 1, 2, 2, 3, 三个奇排列, 三个偶排列.

1.1.2 对换

定义 1.1.2 在一个排列中, 将任意两个元素对调 (即位置互换), 其余元素不动, 这种产生新排列的过程称为对换, 将两个相邻元素对换, 称为相邻对换.

定理 1.1.1 对一个排列进行一次对换, 则改变排列的奇偶性.

证明 先证相邻对换的情形. 设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$, 对换 a 与 b 得到新的排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$.

显然, $a_1\cdots a_l$ 与 $b_1\cdots b_m$ 的逆序数没有改变, 只有 a 与 b 的逆序数改变了.

当 $a<b$ 时, 对换后, a 的逆序数增加 1, 而 b 的逆序数不变;

当 $a>b$ 时, 对换后, a 的逆序数不变, 而 b 的逆序数减少 1.

所以相邻对换改变排列的奇偶性.

再证一般对换的情形. 设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_t$, a 与 b 之间相隔了 m 个数, 要实现 a 与 b 的对换, 可先将 a 与 b_1 作相邻对换, 再将 a 与 b_2 作相邻对换, 依次类推, 最后 a 与 b 作相邻对换经过 m+1 次相邻对换, 所得排列为

$$a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m bac_1\cdots c_t.$$

然后再将 b 依次与 $b_m,\cdots,b_1$ 作 m 次相邻对换, 所得对换为

$$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_t,$$

这样, 对换 a 与 b 共经过了 $2m$+1 次相邻对换, 由相邻对换改变排列的奇偶性, 可得到: 对换改变排列的奇偶性.

推论 1.1.1 将奇 (偶) 排列变成标准排列的对换次数为奇 (偶) 数.

证明 因为自然排列 (标准排列)$12\cdots n$ 是偶排列. 由定理 1.1.1 可知, 一次对换就改变排列的奇偶性, 当排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇 (偶) 排列时, 必须作奇 (偶) 次对换才能变成自然排列 $12\cdots n$, 故所作的对换次数与排列具有相同的奇偶性.

推论 1.1.2 全体 n 元排列 ($n>1$) 的集合中, 奇、偶排列各占一半.

证明 n 元排列的总数有 $n!$ 个, 设其奇排列为 p 个, 偶排列为 q 个, 现将每个奇排列都施以同一对换, 由定理 1.1.1 可知 p 个奇排列全部变为偶排列, 于是有 $p\leqslant q$; 同理将全部偶排列也都施以同一对换, 则 q 个偶排列也将全部变为奇排列, 于是又有 $q\leqslant p$. 从而 $p=q$, 即 n 元排列 ($n>1$) 的集合中, 奇、偶排列各占一半.

1.2 行列式的定义

行列式的概念是数学家在研究线性方程组的公式解时逐渐形成和完善的, 它是很多数学家在漫长的岁月中共同努力的结晶, 17 世纪德国的杰出数学家莱布尼茨 (Leibniz) 就是其中之一. 利用行列式可以给出线性方程组在有解的情况下的一种公式解.

1.2.1 二、三阶行列式

1. 二阶行列式

求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

其中, x_1 和 x_2 为未知数, a_{ij} 为第 i 个方程第 j 个未知数的系数, b_1 和 b_2 为常数项.

用加减消元法可得

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1&=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2&=b_2a_{11}-b_1a_{21}. \end{aligned}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时, 方程组 (1.2.1) 的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2.2}$$

为讨论问题的方便, 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

称 D 为二阶行列式, 它代表一个数, 简记为 $D=\det(a_{ij})_2$, 其中数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式 D 的第 i 行第 j 列的元素. i 为元素 a_{ij} 的行标, j 为元素 a_{ij} 的列标.

二阶行列式可用对角线法帮助记忆. 它是两项的代数和, 其中第一项是从左上角到右下角的主对角线上两元素的乘积, 带正号; 第二项是从右上角至左下角的副对角线上两元素的乘积, 带负号.

$$_{-}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}_{+} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

根据二阶行列式的定义, 方程组 (1.2.1) 的解 (1.2.2) 中的分子也可以用二阶行列式表示出来, 若记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

其中 $D_j(j=1,2)$ 表示将 D 中第 j 列换成 (1.2.1) 式右边的常数项所得到的行列式.

于是, 当系数行列式 $D\neq 0$ 时, 二元一次方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},$$

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}.$$

例 1.2.1　求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1, \\ 3x_1-x_2=-3. \end{cases}$$

解　系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-6=-7\neq 0,$$

可求得

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-6,$$

因此方程组的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{5}{7}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{6}{7}.$$

2. 三阶行列式

求解三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

如果满足一定条件, 可利用加减消元法解此方程组, 先由前两个方程消去 x_3, 得到一个只含有 x_1, x_2 的二元一次方程; 再后两个方程消去 x_3, 得到另一个只含有 x_1, x_2 的二元一次方程, 最后联立这两个二元一次方程, 消去 x_2, 可得

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ =&b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

若将 x_1 的系数记为

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned}$$

则称 D 为三阶行列式. 为便于记忆和计算, 三阶行列式的对角线法如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

$\ominus \qquad \oplus$

类似于解二元一次线性方程组，当方程组 (1.2.3) 中的系数行列

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 三元一次线性方程组有唯一解为 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, x_3 = \dfrac{D_3}{D}$, 其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.2.2　解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=-4, \\ x_1-x_2+x_3=5, \\ 7x_1-6x_2-4x_3=1. \end{cases}$$

解　系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & -6 & -4 \end{vmatrix}=52,$$

又有

$$D_1=\begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{vmatrix}=52, \qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & -4 \end{vmatrix}=-52,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix}=156,$$

解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1, \quad x_3=\frac{D_3}{D}=3.$$

利用二、三阶行列式可将二、三元线性方程组的解表示得更为简单, 所以在解 n 元线性方程组时, 自然会想到其解能否用 n 阶行列式来表示. 为此, 我们先来研究二、三阶行列式的展开式结构, 找出其共性, 以便给出 n 阶行列式的定义.

通过分析, 我们可以看出三阶行列式的展开式具有以下特点.

(1) 三阶行列式的每一个展开项都是由位于不同行不同列的三个元素的乘积构成的, 即每项的三个元素的行标列标无重复.

(2) 每项的三个元素的行标按自然顺序排列时, 即该项为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 时, 可以看出列标 $p_1p_2p_3$, 是自然数 1, 2, 3 的某个排列, 所以三阶行列式的展开式一共有 $3!$ 项.

(3) 行标按自然顺序排列时, 每一个展开项所带的符号与列标的排列有关：如果列标是奇排列, 则前面是负号; 如果列标是偶排列, 则前面是正号.

因此, 三阶行列式也可以写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数, 即 $t=\tau(p_1p_2p_3)$, 上式 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 1, 2, 3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

仿此, 可以给出 n 阶行列式的定义.

1.2.2 n 阶行列式的定义

定义 1.2.1 称由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式, 简记为 $D_n=\det(a_{ij})_n$.

它表示所有取自不同行不同列的 n 个数乘积的代数和, 各项行标按标准排列后, 列标构成的排列为偶排列时, 此项带正号, 为奇排列时, 此项带负号. 因此, 一般项可写为

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 元排列, t 为此排列的逆序数, 当 $p_1p_2\cdots p_n$ 取遍所有 n 元排列时, 则得到 n 阶行列式表示的代数和中的所有项, 即 n 阶行列式可表示为

$$D=\det(a_{ij})_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列取和, 右边的式子称为 n 阶行列式的展开式, 它共有 $n!$ 项.

通过分析, 可以看出 n 阶行列式具有以下特点.

(1) n 阶行列式的每一个展开项都是由位于不同行不同列的 n 个元素的乘积构成的, 即每项 n 个元素的行标列标无重复.

(2) 每项的 n 个元素按行标的自然顺序排列时, 该项为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$, 可以看出列标 $p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 $12\cdots n$ 的某个排列, 所以 n 阶行列式的展开式一共有 $n!$ 项.

(3) 每一个展开项所带的符号当行标按标准顺序时, 与列标的排列有关: 如果列标是奇排列, 则前面是负号; 如果列标是偶排列, 则前面是正号.

特别地, 当 $n=1$ 时, $|a_{11}|=a_{11}$ 称为**一阶行列式**, 注意不要与绝对值记号混淆.

定理 1.2.1 n 阶行列式也可定义为

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{q,q_2\cdots q_n}(-1)^t a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n},$$

其中 t 为行标 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数.

证明 按行列式的定义有

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

记 $D_1=\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^t a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$, D 中任一项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

当列标的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 经过 k 次对换后变成标准排列, 相应的行标的标准排列经相同次对换变成排列 $q_1q_2\cdots q_n$, 由于数的乘法是可交换的, 所以有

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

由推论 1.1.1 可知, 对换次数 k 与 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 有相同的奇偶性, 同理 k 与 $\tau(q_1q_2\cdots q_n)$ 也有相同的奇偶性, 从而 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 与 $\tau(q_1q_2\cdots q_n)$ 有相同的奇偶性, 所以有

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n},$$

即 D 中的任一项总有且仅有 D_1 中的某一项与之对应并相等; 反之, 对于 D_1 中的任一项也总有且仅有 D 中的某一项与之对应并相等, 于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应且相等, 从而 $D=D_1$.

注意 对角线展开法仅适用于二、三阶行列式.

例 1.2.3 证明对角线行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \tag{1.2.6}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{1.2.7}$$

证明 仅证 (1.2.7) 式：根据行列式的定义, 展开式的每一项为来自不同行不同列的元素之积, 所以 $\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$ 的非零展开项只有一项：$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 下面考虑此项的符号 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 的行标号为标准排列时, 列标号顺序是 $n(n-1)(n-2)\cdots 21$, 其逆序数 $t=\tau[n(n-1)\cdots 21]=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$, 所以 (1.2.7) 式成立.

例 1.2.4 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

解 此行列式的非零展开项只有一项：$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, 又 $\tau(3214)=3$ 为奇数, 因此

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4! = -24.$$

一般地, 当行列式的 0 元素较多时, 按行列式的定义进行计算.

定义 1.2.2 对角线以下 (上) 的元素全部为 0 的行列式称为上 (下) 三角行列式. n 阶上 (下) 三角行列式如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{11} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 1.2.5 在四阶行列式的展开式中, 求含有 a_{12}, a_{34} 的项.

解 根据行列式的定义, 展开式的每一项为来自不同行且不同列的元素 (行列标无重复) 之积, 含有 a_{12}, a_{34} 的项的另两个元素为 a_{21}, a_{43} 或 a_{23}, a_{41}, 即 $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$ 或 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$, 还要考虑其符号, 因为 $\tau(2143) = 2$, $\tau(2341) = 3$, 所以含有 a_{12}, a_{34} 的项为 $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$ 和 $-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$.

例 1.2.6 多项式 $p(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & -6 & x \end{vmatrix}$ 中, 求 x^3 的系数.

解 展开项中, 每一项为来自不同行、不同列的元素之积, 能出现 x^3 的项只有 $(-1)^{\tau(123)}2x \cdot (-x) \cdot x = -2x^3$. 所以 x^3 的系数为 -2.

1.3 行列式的性质

用行列式定义计算一般行列式非常困难, 因为用定义计算一个 n 阶行列式需要 $(n-1)n!$ 次乘法、$n!-1$ 次加减法, 计算量非常大. 因此有必要探究行列式的一些性质, 以简化其运算, 并且这些性质对行列式的理论研究也有重要意义.

定义 1.3.1 把行列式 D 的行与列互换所得到的新的行列式称为 D 的转置行列式, 记为 D^{T}.

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.3.1 转置行列式与原行列式的值相等, 即 $D^{\mathrm{T}} = D$.

证明 设 $D = \det(a_{ij})_n$ 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$