考研数学大纲配套系列用书推荐

高教版

考研数学综合大题精编精析100例

（数学三适用）

主　编　张　宇　副主编　严守权　徐　兵

高等教育出版社

- 按常考知识点分类，归纳常考大题题型特点
- 研究综合大题命题思路，分析题目特点
- 总结解题思想方法，指出考生典型错误

考研数学大纲配套系列用书推荐

考研数学综合大题精编精析100例

（数学三适用）

KAOYAN SHUXUE ZONGHE DATI JINGBIAN JINGXI 100 LI (SHUXUE SAN SHIYONG)

主 编 张 宇 副主编 严守权 徐 兵

高等教育出版社·北京

- 按常考知识点分类，归纳常考大题题型特点
- 研究综合大题命题思路，分析题目特点
- 总结解题思想方法，指出考生典型错误

内容简介

《考研数学综合大题精编精析 100 例（数学三适用）》一书，定位于考研数学强化和冲刺阶段的考生。为在茫茫题海中航行的考生提供一盏导航的灯塔。在总结归纳历年考试题的基础上，本书将微积分常考综合大题分为 25 类题型，选讲 56 例，延伸 29 例。将线性代数常考综合大题分为 25 类题型，选讲 25 例，延伸 55 例。将概率论与数理统计常考综合大题分为 27 类题型，选讲 27 例，延伸 55 例。对各类题型点评、小结解题方法。对多数选例给以详细讲解，侧重解题思路、方法和技巧，并有点拨、延伸。成为考生提高求解综合大题能力的强力推进器。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学综合大题精编精析 100 例／张宇主编. --北京:高等教育出版社,2015. 8

数学三适用

ISBN 978-7-04-043475-0

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 163658 号

策划编辑　张耀明　　责任编辑　张耀明　　封面设计　王　洋　　版式设计　余　杨　杜微言

插图绘制　杜晓丹　　责任校对　王　雨　　责任印制　赵义民

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	11.75	版　　次	2015 年 8 月第 1 版
字　　数	290 千字	印　　次	2015 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	28.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　43475-00

前　言

考研数学综合大题最常见、最基本的题型有哪些？如何使备考更有针对性？如何能将复习的努力更有成效地转化为应试实战能力，取得理想的效果？作者分析了历年考研试题，集几十年教学经验与考研辅导经验编写此《考研数学综合大题精编精析 100 例》。将此书定位于考研数学强化和冲刺阶段的考生，为在茫茫考研题海中航行的考生提供一盏导航的灯塔。

本书依照考研数学考试大纲，按常考知识点分类，归纳常考大题题型特点，对常考的综合大题题型研究命题思路、分析题目特点，总结解题思想方法，指出考生的典型错误。将常考的综合大题依微积分、线性代数、概率论与数理统计三部分分别归类：

一、微积分中综合大题常考题型：

分为 25 类题型，选讲 56 例，延伸 29 例。

二、线性代数中综合大题常考题型：

分为 25 类题型，选讲 25 例，延伸 55 例。

三、概率论与数理统计中综合大题常考题型：

分为 27 类题型，选讲 27 例，延伸 55 例。

在各题型的分析中，指出题型特点、给出范例分析，大多数选例都有点拨、延伸，并对题型有小结，分析解题方法等。

对常考综合大题题型分类是以题目的关键考查知识点划分。意在使考生明确考试方向，有利于考生理出知识框架。

例题中指出考查的知识点，以利于考生明确试题的立意。

例题中给出分析、解题思路、考生的典型错误，以利于考生理清解题方法与防范错误。

对部分试题给出题目可能的变式，指出识别题目中隐含且常被考生忽略的条件或怎样利用概念、性质的内涵与外延求解问题等，以利于考生深入复习。

对于多数例题给出了难度系数，以利于考生检查自己对知识的掌握程度。

书中例题中标号如（15-3），（08-3）分别表示 2015 年数学三试题与 2008 年数学三试题。书中标注“本题难度系数 0.358”表示在当年考试中教育部考试中心发布的统计数据中所给题目的难度值，表明这个题目的平均得分率。

多年来在考研数学的选择题、填空题、解答题三大部分中，以解答题得分率最低。由此可以得到两点启示：一是意味着解答题这部分提分空间更大些；二是意味着得综合大题者能赢全局。因此在综合大题这部分多花些力气是值得的。综合大题有些是综合考查多个知识点；有些是一道题需要多种方法综合使用才能求解。很多情形是只要认真分析题意，谨慎运算，就能求解。

选例很精彩，越仔细研读，越能品味其精妙之处。如“（05-2）设函数 $f(x)$ 连续且 $f(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}$。”

分析　本题考查的知识点　可变限积分求导,洛必达法则,定积分换元法、积分中值定理。

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}$$

$$\xlongequal[u=x-t]{在分母中令}\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u} \qquad ①$$

$$\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+xf(x)}$$

$$\xlongequal[(\xi 在 0 与 x 之间)]{积分中值定理}\lim_{x\to 0}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)} \qquad ②$$

$$=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}。$$

点拨　典型运算错误　(1)有一些考生没有对所给表达式的分母积分换元,而是在①处直接利用洛必达法则。

(2)一些考生在②处没有利用积分中值定理,而是再次利用洛必达法则求解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x)+f(x)+xf'(x)}=\frac{f(0)}{2f(0)}=\frac{1}{2}.$$

这是不正确的,因为题目的条件只给出$f(x)$连续,并没有给出$f(x)$可导,这表明上式分母的表达式不能求导运算。

如果仔细研读上述解法,则可以品味出更多的精妙之处:

1°　原式为求极限。表达式为可变限积分形式的分式。由于$f(x)$连续,$x\to 0$,可知所给极限为"$\frac{0}{0}$"型。通常求可变限积分这种形式的极限多采用洛必达法则。

2°　所给可变限积分的被积函数中含有可变限的变元,因此不能直接利用可变限积分求导公式。对于表达式的分子利用积分关于被积函数的可加性之后,可将前者被积函数中可变限变元的因子游离出积分号。

3°　对于分母中可变限的变元含于被积函数的抽象函数中,只能对其进行积分换元。

4°　变为①之后可以利用洛必达法则,但是一次洛必达法则之后,所求极限依然为$\frac{0}{0}$型,且分子与分母仍为可变限积分形式。由于题设条件为$f(x)$连续,并没有说其可导,因此所给表达式不能第二次利用洛必达法则。

5° 由于$f(x)$为连续函数，因此可以对$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$与$\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$分别利用定积分中值定理。由于定积分的值与积分变元无关，可知上述两式利用定积分中值定理之后都可以表示为$f(\xi)(x-a)$，从而得到②。

6° 由于$f(x)$连续，$f(0)\neq 0$，因此②取极限之后得$\dfrac{f(0)}{f(0)+f(0)}$。

希望考生对每个例题都能仔细研读，相信一定能发现每个题设条件的作用，每一步演算的法理依据何在，其结果必然提高求解综合大题的能力，为取得好成绩打下良好基础，登上读研殿堂。

编者

2015.4

目 录

微 积 分

线 性 代 数

概率论与数理统计

微　积　分

一、函数、极限、连续

1. 极限运算

回顾历年试题可以发现,极限是几乎每年必考的知识.其试题涵盖了极限性质、极限四则运算法则、重要极限公式、未定型极限等内容.题目多为中等难度题,但一些题目中的各细微之处可能存在"陷阱",应特别注意.

例 1(97-2)　求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

分析　**本题考查的知识点**　无穷小量的性质:无穷大量的倒数为无穷小量;有界变量与无穷小量之积为无穷小量.

所给极限为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型问题,不能利用极限四则运算法则,也不能利用洛必达法则求之.通常对无穷大量运算的基本原则是转化为无穷小量运算.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}\xlongequal{(*)}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

点拨　**本题解题技巧**　在上述(*)处,将无穷大量的运算转化为无穷小量的运算.

典型运算错误　上述运算(*)处,忽略了条件 $x\to-\infty$,得出

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x+1}{x\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}},$$

导致了错误.当 $x\to-\infty$,且 $|x|$ 足够大时,$\sqrt{x^2}=|x|=-x$,这是解题中的关键.相当多的考生在此处出现错误,误答为 3.

本题难度系数　0.45

延伸 在试题命制时,曾考虑以下两种变式:

变式 1 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$________.此变式较例 1 简单,可以免掉出现 $\sqrt{x^2}$ 去掉平方根符号时产生的符号错误.

变式 2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.此变式较例 1 复杂,需分别讨论 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$ 两种情形.

例 1 的难度介于变式 1 与变式 2 之间.

这表明在作题时,应该注意题设条件.

例 2(98-2) 确定常数 a,b,c 的值,使

$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq0).$$

分析 ***本题考查的知识点*** 极限的性质、洛必达法则.

所给问题为求极限的反问题.虽然问题与“$\dfrac{0}{0}$”型极限相仿,但题设并没有直接给出其类型,此时不能直接利用洛必达法则.

由题设可知所给表达式为分式,其极限存在.当 $x\to0$ 时分子的极限为零,因此由题意可知,分母的极限应为零.由于极限过程为 $x\to0$,可知应有 $b=0$.此时

$$\text{原式左端}\xlongequal{(*)}\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{x^3}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{x^2},$$

由于分母当 $x\to0$ 时以零为极限,且此极限存在,可知分子的极限也应为零,因此 $\lim\limits_{x\to0}(a-\cos x)=a-1=0$,可知 $a=1$.因此

$$\text{原式左端}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\xlongequal{(**)}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2},$$

可知 $c=\dfrac{1}{2}$.

综合之,$a=1,b=0,c=\dfrac{1}{2}$.

也可以在(**)处改用等价无穷小量代换:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

点拨 **典型运算错误** 考生中出现的典型错误是不判定所给极限是否符合洛必达法则条件，而是直接使用洛必达法则，虽然形式上也得到 $a=1$ 和 $c=\frac{1}{2}$，但是不能确定 b，从而认为 b 可以为任意值，导致错误.

本题难度系数 0.71

说明 在上述运算(＊)处，由于所给极限符合洛必达法则条件，因此利用洛必达法则，通过求导将可变上限积分形式去掉，这是对分式中分子或分母为可变上(下)限积分形式的极限问题的最有效、常见的求解方法.

例 3(04-3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

分析 **本题考查的知识点** 利用洛必达法则求解"$\infty-\infty$"型问题.

所给极限为"$\infty-\infty$"型极限.若先将求极限的函数恒等变形，化为"$\frac{0}{0}$"型极限问题，再考虑利用等价无穷小量代换、分组等技巧能简化运算.

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\\
&\xlongequal{(*)}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{x^4}\\
&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\sin x\cdot\cos x}{x}\cdot\frac{x-\sin x\cdot\cos x}{x^3}\right)\\
&\xlongequal{(**)}\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x\right)\cdot\frac{x-\sin x\cdot\cos x}{x^3}\right]\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{3x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{(2x)^2}{2}}{3x^2}=\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

点拨 **本题解题技巧** ① 上述运算(＊)处利用了等价无穷小量代换以简化运算.多数考生利用倍角公式代换

$$\frac{x^2-\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{x^4}=\frac{4x^2-\sin^2 2x}{4x^4},$$

然后利用洛必达法则求解，其解法要比上述分组求解方法复杂.

② 在上述运算(＊)处，变形之后分组求极限可以简化运算，这是本例的典型技巧.较少数的考生利用此技巧.

③ 在上述运算(＊＊)处，非零因子$\left(\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x\right)$单独求极限而不参与洛必达法则运算可以简化运算.

本题难度系数 0.566

例 4(91-5) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

分析 本题考查的知识点 利用洛必达法则求解“∞^0”型极限.

所给极限为“∞^0”型.

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}.$$

由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=0,$$

因此 $$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

延伸 在试题命制时,曾考虑以下两种变式:

变式 1 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

此时为“$(\infty-\infty)^0$”,不是标准形式,需作变换.令 $x=-t$,则 $x\to-\infty$ 时,$t\to+\infty$,则

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{1+t^2}-t)^{-\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{1+t^2}+t)^{\frac{1}{t}},$$

化为例 4 形式.

变式 2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

需要分别考察 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 两种情形,并利用 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

以上两种变式都比例 4 难度大.

小结

应该明了,并熟记:

1. (1) 极限值是个固定常数.(2) 运算中要注意问题的条件与运算的依据.(3) 常见的等价无穷小量代换:当 $x\to0$ 时,

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x.$$

2. 明确通常无穷大量的运算要转化为无穷小量运算.

3. 若当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大量,此时 $a^{f(x)}$ 不一定为无穷大量,需讨论 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情形;还需讨论:当 $x\to x_0$ 时,是 $f(x)\to+\infty$,还是 $f(x)\to-\infty$.见二、4.延伸(07-3)题多数考生没注意此点,导致错误.

4. 对于分段函数在分段点处的极限需分析左、右极限.

5. 洛必达法则是求未定型“$\frac{0}{0}$”,“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限的有效方法,求未定型“$0\cdot\infty$”,“$\infty-\infty$”,

“0^0”，“1^∞”，“∞^0”型极限的共同特点是将它们通过恒等变形转化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限：

对于“$0\cdot\infty$”或“$\infty-\infty$”型，通常可以利用代数或三角恒等变形，将其转化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型；

对于“$\infty-\infty$”型，必须两者同为正无穷大或同为负无穷大；

对于“0^0”，“1^∞”或“∞^0”型，极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$通常利用对数性质，将幂指函数的极限化为初等函数的极限问题.即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\mathrm{e}^{\ln f(x)^{g(x)}}=\lim_{x\to x_0}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)},$$

其中$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)$为“$0\cdot\infty$”型极限.

6. 使用洛必达法则应该注意如下几个问题：

(1) 使用洛必达法则之前，应该先检验其条件是否满足.

(2) 如果“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限中含有非零因子，可以单独求极限，不必参与洛必达法则运算，以简化运算.

(3) 如果能进行等价无穷小量代换或恒等变形，配合使用洛必达法则，也可以简化运算.

(4) 使用洛必达法则之后，如果问题仍然是未定型极限，且仍符合洛必达法则条件，可以再次使用洛必达法则.

2. 无穷小量阶的比较

无穷小量阶的比较是考试中的常见内容，这部分题目需要借助于极限运算完成，或利用特殊方法简化运算.

例 1(15-3)　设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若$f(x)$与$g(x)$在$x\to0$时是等价无穷小，求$a,b,k$的值.

分析　***本题考查的知识点***　无穷小量阶的比较.

由于$f(x)$与$g(x)$为等价无穷小，可知$k\neq0$，$g(x)$为三阶无穷小.可以利用泰勒展开或$f'(x)$与$g'(x)$阶的比较来实现.

解法 1　由于$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

所以
$$f(x)=x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+bx^2+o(x^3)$$

$$=(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3),$$

因为$f(x)$与$g(x)=kx^3$在$x\to0$时为等价无穷小，所以$1+a=0$，$b-\frac{a}{2}=0$，$k=\frac{a}{3}$.解得

$$a=-1,\quad b=-\frac{1}{2},\quad k=-\frac{1}{3}.$$

解法 2 因为

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{a}{1+x}+b(\sin x+x\cos x)}{3kx^2},$$

可知应有 $1+a=0$，即 $a=-1$.否则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$，与题设矛盾.又

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}+b(2\cos x-x\sin x)}{6kx},$$

仿上可知应有 $1+2b=0$，即 $b=-\dfrac{1}{2}$.

因此

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-2}{(1+x)^3}+\dfrac{1}{2}(3\sin x+x\cos x)}{6k}=-\frac{1}{3k},$$

可得 $k=-\dfrac{1}{3}$.

延伸 由洛必达法则可知，当 $x\to x_0$ 时，α,β 为无穷小量，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在（或为$\infty$），则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

由此可以得到启示：为了比较当 $x\to x_0$ 时无穷小量 α,β 的阶，可以考虑比较当 $x\to x_0$ 时，α',β' 的阶.

这种解法对于可变限积分形式无穷小量阶的比较具有特效.如（04-1,2）把 $x\to 0^+$时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来，使排列在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是（　　）.

(A) α,β,γ　　(B) α,γ,β　　(C) β,α,γ　　(D) β,γ,α

分析　*本题考查的知识点* 无穷小量阶的比较.

所给问题为三个无穷小量阶的比较问题，可以利用$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\gamma}{\beta}$来比较，但有可能经过三个

极限运算，才能得出所需要的结论.由洛必达法则的结论可以得到启发：只需比较在 $x\to0^+$ 时的 α',β',γ'三者的阶数：

$$\alpha'=\cos x^2,\beta'=2x\tan x\sim2x^2,\gamma'=\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\sim\frac{1}{2}x,$$

可知当 $x\to0^+$时，依据题意的排列次序应为

$$\alpha',\gamma',\beta'.$$

因此所求的排列次序为 α,γ,β.故应选(B).

小结

1. 无穷小量阶的比较，通常依题目特点选取下述不同方法更有实效：

(1) 比较无穷小量 α,β 阶的高低，考查$\lim\frac{\alpha}{\beta}$利用定义确定.

(2) 有时比较无穷小量 α,β,γ 阶的高低，先利用已知条件确定它们的阶数，再比较.

(3) 如果 α,β,γ 可导，且为无穷小量，可以考查它们的导数 α',β',γ'的阶，这对于 α,β,γ 为可变限积分形式时，更有实效.

2. 无穷大量阶的比较仿无穷小量阶的比较问题.

说明 考试大纲中用语为无穷小量、无穷大量.而往年的考试试题中，用词不规范，有些年份用无穷小，无穷大；有些年份用无穷小量、无穷大量.本书是依原试题而用词.

3. 连续性

连续性也是常考的内容.单独成题的多为判定函数的连续性或判定函数的间断点及其类型.这类题目多为选择题，且多为易题或中等难度题.连续函数在闭区间上的性质也常出现在一些综合性的解答题中.

例 1(03-3) 设 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)},x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$.试补充定义 $f(1)$使得 $f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续.

分析 ***本题考查的知识点*** 连续性定义、洛必达法则.

$f(x)$是初等函数，在$\left[\frac{1}{2},1\right)$有定义，因而是连续的.$f(x)$在 $x=1$ 处没有定义，因而是间断点，要使$f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续，根据函数在闭区间连续的概念，只要补充定义$f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$即可.该题实际是一个求函数极限的问题，经检验计算该极限，可以用极限四则运算法则及洛必达法则，若在计算过程中利用变量代换，会使问题更加简单.

解
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}.$$

令 $y=1-x$，当 $x\to1^-$时 $y\to0^+$，则

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}\xlongequal{(*)}\lim_{y\to0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi y\sin\pi y}\qquad\text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{\pi y-\sin \pi y}{\pi^2 y^2}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\pi-\pi\cos \pi y}{2\pi^2 y} \qquad \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{\pi^2\sin \pi y}{2\pi^2}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{\pi}.$$

定义 $f(1)=\frac{1}{\pi}$,使 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

点拨　**本题解题技巧**　为在(*)处引入变量代换 $y=1-x$,从而简化运算.运算中还利用了 $\sin(\pi-\pi y)=\sin y$.

延伸　其他年份不同类的试卷中也多次出现连续性的题目值得借鉴:如(01-2)求极限 $\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,记此极限为 $f(x)$,求函数 $f(x)$ 的间断点,并指出其类型.

分析　**本题考查的知识点**　判定间断点,并将其分类.

又如(03-2)　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$

问 a 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

分析　**本题考查的知识点**　连续性的定义、判定间断点类型.

及(03-4)　设 $f(x)=\frac{1}{\sin \pi x}-\frac{1}{\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}$,$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$,试补充定义 $f(0)$,使得 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上连续.

分析　**本题考查的知识点**　连续性定义、洛必达法则.

解法与例 1 相仿.

小结

连续性试题常见的题目为判定连续性与间断点类型.

1. 判定 $f(x)$ 在点 x_0 处的连续性.

(1) 若 $f(x)$ 为初等函数,x_0 为 $f(x)$ 的定义区间内的一点,则依初等函数的性质可以得知,x_0 为 $f(x)$ 的连续点.

(2) 若 $f(x)$ 为分段函数,x_0 为 $f(x)$ 的分段点,则:

① 若在点 x_0 的两侧 $f(x)$ 的表达式相同,只需判定是否有 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

② 若在点 x_0 的两侧 $f(x)$ 的表达式不同，则需判定是否有 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

(3) 若判定 $f(x)$ 在区间端点的连续性，只需判定 $f(x)$ 的单边连续性.

2. 判定间断点的类型.

(1) 若问题为判定间断点的类型，在知道 x_0 为 $f(x)$ 的间断点之后，当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在时，x_0 为第一类间断点；否则 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

(2) 若问题为判定间断点 x_0 为跳跃间断点、无穷间断点、振荡间断点等几何性态时，需考察 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 的相关性态.

二、一元函数微分学

1. 导数与微分运算

导数与微分的运算是历年考试的基本内容之一.试题涵盖了考试大纲中所列举的各种运算.包括考查导数与微分定义的内涵与外延，导数与微分的几何意义，奇偶函数的导数性质、周期函数的导数性质、带有绝对值符号的导数运算等.这部分题目多为中等难度题.在填空题、选择题中居多.

例 1(03-3) 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围为________.

分析 ***本题考查的知识点*** 导数的定义、复合函数求导及连续性定义.

λ 为参变量，x 为自变量.当 $x\neq 0$ 时，x^{λ} 有意义.点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的分段点.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x},$$

当 $\lambda>1$ 时，$f'(0)=0$.当 $x\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}\right)'=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}-x^{\lambda}\sin\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x};\end{aligned}$$

当 $\lambda>2$ 时，

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0).$$

可知当 $\lambda>2$ 时 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.当 $\lambda\leqslant 2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在，因此 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.可知应填 $\lambda>2$.

点拨 虽然本题为填空题，但其得分率太低，为引起考生的关注而在此引出.

本题难度系数 0.219

例 2(00-2) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式