



文登教育

Wendeng Education



理工社®

2016

文登教育集团课堂用书

(理工类)

考研数学

题型集粹与水平测试

网络增值版

增值服务网址 www.wendengonline.com

陈文灯 黄先开 主 编
李 娜 副主编

本书使用说明:

- ◆ 关于答疑请登录: www.wendengonline.com。
- ◆ **以题型为纲**, 揭示出题规律, 提炼解题技巧。
- ◆ 建议与“复习指南”同步使用, 效果更佳!



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

责任编辑：高 芳

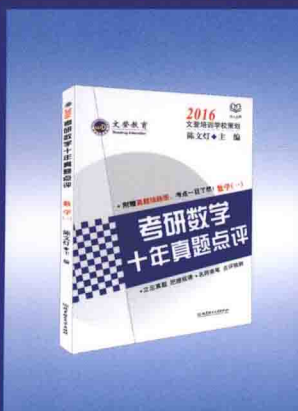
封面设计：尚庸坊 图文设计

名师介绍

陈文灯 中央财经大学教授，北京文登学校校长。原中央财经大学数学系主任，北京数学学会理事。在教学和科研上成果卓著，2000年获得“特殊贡献奖”，享受国务院特殊津贴，在考研学子和同仁中有口皆碑。



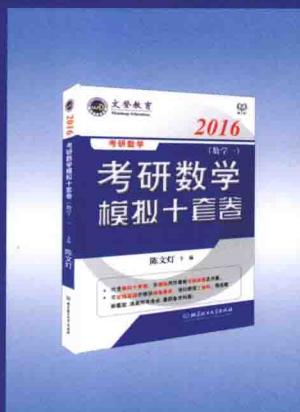
总结最独到 讲解最系统



十年点评，总结规律；
考点线路，按图索骥；
分值比重，题型清晰；
思路分析，详解精细；
技巧评注，总结对比；
把握命题，考场无敌！

冲刺阶段制胜宝典

冲刺加速，历年真题；
查缺补漏，十套模拟；
大纲考点，命题规律；
庖丁解牛，解析精辟；
温故知新，题题珍惜；
金榜题名，再创佳绩！



微信订阅号：wdxjy



微信服务号：wdxkaoyan

扫一扫享陈文灯考研图书增值服务

理工社网址：<http://www.bitpress.com.cn>

答疑论坛：<http://bbs.wendengonline.com>

ISBN 978-7-5640-9803-2



9 787564 098032 >

定价：43.80元



文登教育

Wendeng Education

2016

文登教育集团课堂用书

(理工类)

考研数学

题型集粹与水平测试

网络增值版

增值服务网址 www.wendengonline.com

陈文灯 黄先开 主 编
李 娜 副主编

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

考研数学题型集粹与水平测试:理工类 / 陈文灯, 黄先开主编. —北京:北京理工大学出版社, 2014.10

ISBN 978-7-5640-9803-2

I. ①考… II. ①陈… ②黄… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 225405 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

82562903(教材售后服务热线)

68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京文良精锐印刷有限责任公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 20.5

字 数 / 500 千字

版 次 / 2014 年 10 月第 1 版 2014 年 10 月第 1 次印刷

定 价 / 43.80 元

责任编辑 / 高 芳

文案编辑 / 胡 莹

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前 言

本书是我主编的 2016 版《考研数学复习指南》一书的续篇。读者在全面、系统地复习《指南》的基础上再看本书,将会进一步拓宽思路,掌握各类题型的解题方法和技巧,大大提高做题的准确性和速度。

本书在 2015 版的基础上作了很大程度的修订,有以下特点。

(1)重点突出。本书针对“考纲”要求重点掌握的概念、公式、定理,通过题型的形式予以强化,同时,指出解题的方法和技巧,尤其是读者感到比较难理解和掌握的问题,按本书所指的思路、方法去分析将会迎刃而解。

(2)针对性强,覆盖面大。本书不是一般性的题解书,不搞题海战术,而是以题型为纲,通过分析综合性较强、难度较大、覆盖面较宽的例题,总结出易被读者理解和掌握的解题方法和规律。

(3)超前性与独创性。本书所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中很多综合题是基于作者多年的教学心得,并经多个不眠之夜思索而得的。读者通过做这些例题不仅可以各知识点串在一起,而且可以拓展思路,遇到从未见到的题时,可以从容应对。

成书仓促,定有不妥及错误之处,恳请广大读者、数学同仁批评指正。

陈文灯

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续	1
§ 1 函 数	1
§ 2 极 限	6
§ 3 函数的连续性	21
第二章 导数与微分	26
第三章 不定积分	39
第四章 定积分	54
第五章 中值定理	80
第六章 一元微积分的应用	87
§ 1 导数的应用	87
§ 2 定积分的应用	98
第七章* 向量代数与空间解析几何 ...	103
第八章 多元函数微分学	113
第九章 重积分	125
第十章* 曲线曲面积分	137
第十一章* 无穷级数	154

第十二章 常微分方程	169
------------------	-----

第二篇 线性代数

第一章 行列式	185
第二章 矩阵	198
第三章 向量	216
第四章 线性方程组	228
第五章 矩阵的特征值与特征向量	241
第六章 二次型	253

第三篇* 概率论与数理统计初步

第一章 事件的概率	265
第二章 随机变量及其分布	273
第三章 随机变量的数字特征	287
第四章 大数定律和中心极限定理	299
第五章 数理统计初步	305

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续

§1 函 数

一、有关函数概念的题型

题型 I 判别函数的等价性

【解题提示】 当且仅当两函数的定义域和对应关系完全相同时,才表示同一函数,否则为不同函数.

【例 1.1】 设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在,且 $f(x) = x^2 + 2x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则与 $f(x)$ 等价的函数是【 】

(A) $y = \int_0^x (x^2 - 2x) dx.$

(B) $y = \int_0^1 (x^2 - 2x) dt.$

(C) $y = \int f'(x) dx.$

(D) $y = e^{\ln(x^2 - 2x)}.$

【解】 设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l$, 则 $f(x) = x^2 + 2xl$,

两边取 $x \rightarrow 1$ 时的极限,得 $l = 1 + 2l \Rightarrow l = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x$.

(A) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ 与 $f(x)$ 的对应关系不同.

(B) $y = \int_0^1 (x^2 - 2x) dt = x^2 - 2x.$

(C) $y = f(x) + C = x^2 - 2x + C$ 与 $f(x)$ 对应关系不同.

(D) $y = e^{\ln(x^2 - 2x)}$, 定义域 $x < 0$ 或 $x > 2$, 与 $f(x)$ 定义域不同,故(B)入选,实际做题时不必像以上那样处理,求出 $f(x)$ 的表达式后一眼即可看出(B)入选.

题型 II 利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式

【解题提示】 一种是所谓“凑法”——将给出的表达式凑成对应符号 $f(\quad)$ 内的中间变量的表达形式,然后用“无关特性”即可得出 $f(x)$ 的表达式.另一种方法是先作变量替换再用“无关特性”,然后通过联立方程得出 $f(x)$ 的表达式.多元函数也可以用这两种方法处理.

【例 1.2】 求解以下各小题中 $f(x)$ 的表达式:

(1) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} + \sin\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2, |x| \geq 1.$

(2) $f(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x, 0 < x < 1.$

【解】 (1) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1} + \sin\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + 2,$

故 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sin(x^2 - 2) + 2, |x| > 2.$

$$(2) f(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{1 - \sin^2 x} - 1,$$

故 $f(x) = -2x + \frac{1}{1-x}, 0 < x < 1.$

【例 1.3】 设 $f(x)$ 满足方程: $af(x) + bf\left(-\frac{1}{x}\right) = \sin x$, 其中 $|a| \neq |b|$, 求 $f(x)$.

【解】 令 $t = -\frac{1}{x}$, 则 $x = -\frac{1}{t}$, 于是原方程变为 $bf(t) + af\left(-\frac{1}{t}\right) = -\sin \frac{1}{t}$,

由“无关特性”得 $bf(x) + af\left(-\frac{1}{x}\right) = -\sin \frac{1}{x}.$

$$\text{解联立方程组} \begin{cases} af(x) + bf\left(-\frac{1}{x}\right) = \sin x \\ bf(x) + af\left(-\frac{1}{x}\right) = -\sin \frac{1}{x} \end{cases},$$

得 $f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2} \left(a \sin x + b \sin \frac{1}{x} \right).$

【例 1.4】 设 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2 + \cos(xy)$, 求 $f(x, y)$.

【解】 令 $u = x+y, v = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$, 则

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2} = \frac{u^2(1-v)}{1+v} + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2},$$

故 $f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y} + \cos \frac{x^2 y}{(1+y)^2} \quad (y \neq -1).$

二、函数的性质

题型 III 函数奇偶性的判别

【解题提示】 判别函数奇偶性的方法: ① 主要依据奇偶性的定义, 有时也用其运算性质 (奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数; 偶函数之积为偶函数; 偶数个奇函数之积为偶函数; 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数). ② $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法. ③ 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若函数的定义域关于原点不对称, 则函数就无奇偶性可言.

【例 1.5】 判别下列函数的奇偶性:

$$(1) F(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 为连续的偶函数.}$$

$$(2) F(x) = f(x) + \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt \right] du, \text{ 其中 } f(x) \text{ 是连续的奇函数.}$$

$$(3) F(x) = \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right) f(x), \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, f(x) \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上有定义, 且对任何 } x, y \text{ 恒有 } f(x+y) = f(x) + f(y).$$

【解】 (1) $F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t=-u} \int_0^x f(-u) (-du) \xrightarrow{\substack{f(x) \text{ 为} \\ \text{偶函数}}} \int_0^x f(u) du,$

因为 $F(x) + F(-x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = 0,$

所以 $F(x)$ 为奇函数.

(2) $F(x) = f(x) + \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt \right] du, \quad \textcircled{1}$

$F(-x) = f(-x) + \int_0^{-x} \left[\int_0^u f(t) dt \right] du, \quad \textcircled{2}$

因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x) + f(-x) = 0, \quad \textcircled{3}$

又因为 $\int_0^{-x} \left[\int_0^u f(t) dt \right] du \xrightarrow{\text{令 } u=-v} \int_0^x \left[\int_0^{-v} f(t) dt \right] (-dv) = -\int_0^x \left[\int_0^{-u} f(t) dt \right] du, \quad \textcircled{4}$

由 ①, ②, ③, ④ 得

$F(x) + F(-x) = \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt - \int_0^{-u} f(t) dt \right] du = \int_0^x \left[\int_{-u}^u f(t) dt \right] du = 0,$

故 $F(x)$ 为奇函数.

(3) 令 $g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$

因为 $g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0,$

所以 $g(x)$ 为奇函数.

又因为 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 令 $y=0$, 得 $f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0,$

又显然有 $0 = f(0) = f[x + (-x)] = f(x) + f(-x),$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

故 $F(x) = g(x)f(x)$ 为偶函数.

题型 IV 求解给定函数的周期或周期性证明

【解题提示】 利用周期函数的定义及周期函数的运算性质求解或证明.

【例 1.6】 设 $f(x)$ 是以 $T > 0$ 为周期的函数, 证明 $f(ax) (a > 0)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的函数.

【证】 令 $F(x) = f(ax)$, 由于

$F\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left[a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right] = f(ax + T) \xrightarrow[\substack{\text{因为 } T \text{ 是} \\ f(x) \text{ 的周期}}]{=} f(ax) = F(x),$

故 $\frac{T}{a}$ 是 $f(ax)$ 的周期.

【例 1.7】 设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于 $x = a, x = b$ 均对称 ($a \neq b$), 求证: $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.

【证】 由题设有 $f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x),$

于是, $f(x) = f[a + (x-a)] = f[a - (x-a)] = f(2a-x) = f[b + (2a-x-b)]$
 $= f[b - (2a-x-b)] = f[x + 2(b-a)],$

故 $f(x)$ 是周期函数, 其周期 $T = 2(b-a).$

题型 V 函数 $f(x)$ 在某区间 I 上单调性的判别

【解题提示】 若没有言明函数 $f(x)$ 可导, 则用单调性定义判别; 若言明函数 $f(x)$ 可导, 则利用函数的一阶导数判别.

【例 1.8】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, 证明 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ 在 (a, b) 内单调增加.

【证】
$$F'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt + \frac{f(x)}{x-a} = -\int_a^x \frac{f(t)}{(x-a)^2} dt + \int_a^x \frac{f(x)}{(x-a)^2} dt$$
$$= \int_a^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-a)^2} dt.$$

因为 $(x-a)^2 > 0$ 且 $f(x)$ 单调上升, 当 $x > t$ 时, $f(x) - f(t) \geq 0$, 所以 $F'(x) \geq 0$, 故 $F(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

题型 VI 函数有界性的判别

【解题提示】 证明或判别函数有界性的思路:

- (1) 利用有界性定义;
- (2) 闭区间上连续函数的有界性;
- (3) 有极限数列必有界;
- (4) $x \rightarrow x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

【例 1.9】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (l 为有限数), 试证: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【证】 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, 所以对于取 $\epsilon = \frac{|l|}{2}$, $\exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, 恒有

$$|f(x) - l| < \frac{|l|}{2},$$

又 $|f(x) - l| > |f(x)| - |l|$, 所以 $|f(x)| - |l| < \frac{|l|}{2}$,

即 $|f(x)| < \frac{3}{2} |l|$.

因为 $f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 由闭区间上连续函数有界性, 可知 $\exists S$, 使 $|f(x)| < S, x \in [a, X]$.

取 $M = \max\left\{S, \frac{3}{2} |l|\right\}$, 则对 $\forall x \in [a, +\infty)$ 恒有 $|f(x)| \leq M$, 即函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【例 1.10】 试证 $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x te^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

【证】 令 $g(x) = \int_0^x te^{t^2} dt$,

因为 $g(-x) = \int_0^{-x} te^{t^2} dt \xrightarrow{\text{令 } u = -t} \int_0^x -ue^{(-u)^2} (-du) = \int_0^x ue^{u^2} du,$

所以 $g(x)$ 为偶函数. 因此 $f(x) = e^{-x^2} g(x)$ 也为偶函数, 所以只需证明 $f(x)$ 在

$[0, +\infty)$ 上有界即可.

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x te^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{2},$$

所以 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists X > 0$, 当 $x \in [X, +\infty)$ 时, 有

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}, \quad \text{即 } 0 < f(x) < 1.$$

又 $f(x)$ 在 $[0, X]$ 上连续, 于是, $\exists l > 0$, 使对 $\forall x \in [0, X]$, 恒有 $0 \leq f(x) \leq l$, 取 $M = \max\{1, l\}$, 则 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $0 \leq f(x) \leq M$. 同理可证 $(-\infty, 0]$ 的情形, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

三、复合函数

【解题提示】 将两个或两个以上函数进行复合, 通常有三种方法: 代入法 (适用于初等函数的复合), 分析法 (适用于初等函数与分段函数的复合, 或两分段函数的复合), 图示法 (适用于两分段函数的复合).

【例 1.11】 设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)], f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

$$\text{【解】 } f[f(x)] = \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)},$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)-1} = \frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1} = \frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【例 1.12】 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n \text{ 次}}$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)]$.

$$\text{【解】 } f_2(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \bigg/ \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

比较以上两式可知 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. (由数学归纳法可证)

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} = \frac{x}{|x|}.$$

【例 1.13】 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 用分析法求解. 所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 从而得出复合函数的方法.

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}.$$

(1) 当 $\varphi(x) < 1$ 时,

$$\text{或 } x < 0, \varphi(x) = x + 2 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1,$$

$$\text{或 } x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2};$$

(2) 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时,

$$\text{或 } x < 0, \varphi(x) = x + 2 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 0,$$

$$\text{或 } x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{2};$$

$$\text{综上所述, 有 } f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1, \\ x+2, & -1 \leq x < 0, \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2}, \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

【例 1.14】 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $\varphi(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 图示法的解题程序: 1° 画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图像; 2° 将 $y = f(u)$ 的分界点在 xOu 坐标面上画出(这是若干条平行于 x 轴的直线); 3° 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间; 4° 将 3° 所得结果代入 $y = f(u)$ 中便得复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + |\varphi(x)|], \quad (*)$$

作出 $u = \varphi(x)$ 的图像, 如图 1.1 所示, 以及 $f(u) = \frac{1}{2}(u + |u|)$

u 的分界点 $u = 0$ (xOu 平面上的 x 轴).

当 $x < 0$ 时, $u = x$. ($u < 0$)

当 $x \geq 0$ 时, $u = x^2$. ($u \geq 0$)

将以上所得结果代入(*)式, 得 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

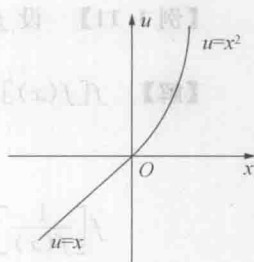


图 1.1

§ 2 极 限

一、数列的极限

题型 I 已知数列的前几项数值及通项的表达式, 求数列的极限

【解题提示】 或者利用单调有界数列必有极限定理求解(求解程序:①判断极限的存在性 { 单调性, 方法可用数学归纳法或不等式的放缩法; ②先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后通过解关于 l 的方程, 求得 l 的值, 从而得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$). 或者利用数列极限的定义求解(先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后在通项的两边取极限得出 l 的数值, 再证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性, 此步通常是利用 $|x_n - l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

【例 1.15】 设 $x_1 = 2, x_2 = 2 + \frac{1}{x_1}, \dots, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限

$$\Rightarrow l = 2 + \frac{1}{l} \Rightarrow l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow l = 1 \pm \sqrt{2}.$$

因为由题设可知 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} > 2$, 所以 $l = 1 + \sqrt{2}$.

以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在:

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= \left| \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{l}\right) \right| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{l} \right| \\ &= \frac{|x_{n-1} - l|}{lx_{n-1}} \quad (\text{因为 } x_{n-1} = 2 + \frac{1}{x_{n-2}} > 2, l = 2 + \frac{1}{l} > 2) \\ &< \frac{|x_{n-1} - l|}{4} < \frac{|x_{n-2} - l|}{4} \\ &= \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} < \frac{|x_{n-3} - l|}{4^3} < \dots < \frac{|x_1 - l|}{4^{n-1}} \\ &= \frac{|2 - (1 + \sqrt{2})|}{4^{n-1}} = \frac{|1 - \sqrt{2}|}{4^{n-1}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}}. \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}} = 0$ 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0$,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} + 1$.

【例 1.16】 设 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1+x_1}, \dots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限

$$\Rightarrow l = 1 + \frac{l}{1+l} \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ 由题设可知 } l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在:

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= \left| \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{l}{1+l}\right) \right| \\ &= \frac{|x_{n-1} - l|}{|(1+x_{n-1})(1+l)|} < \frac{|x_{n-1} - l|}{2(1+l)} < \dots < \frac{|x_1 - l|}{2^{n-1}(1+l)} \\ &= \frac{1+l}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2}. \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2} = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0$,

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

【另解】 由题设可知 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$),

$$x_2 - x_1 = \left(1 + \frac{x_1}{1+x_1}\right) - 1 = \frac{x_1}{1+x_1} > 0. \text{ 于是, } x_2 > x_1.$$

设 $x_n > x_{n-1}$, 则

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(1 + \frac{x_n}{x_n+1}\right) - \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right) = \frac{x_n}{1+x_n} - \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} \\ &= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} > 0, \end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 单调增加.

因为 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ (因为 $x_{n-1} > 0$) < 2 , 所以 $\{x_n\}$ 有界.

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 设其为 l , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right), \text{ 即 } l = 1 + \frac{l}{1+l} \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ 由题设可知 } l \text{ 非负.}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

【例 1.17】 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, 其中 $a > 0, x_0 > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【证】 因为 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$, 所以 $\{x_n\}$ 有界.

又因为 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2}\right) = 1$, 所以 $\{x_n\}$ 单调,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 则由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \text{ 可得 } l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{a}{l}\right) \Rightarrow l = \sqrt{a},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$.

注 单调数列的极限既可用极限定义法, 又可用单调有界数列必有极限的定理去求解. 若数列不单调则只能用极限的定义法.

题型 II 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限

【解题提示】 方法有: ① 特殊级数求和法. ② 利用幂级数求和法. ③ 利用定积分定义求极限. ④ 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 剩余的可用一个通式表示, 则用定积分定义求解数列的极限; 若数列的各项虽可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 而剩余的不能用一个通式表示, 但其各项是按递增或递减排列的, 则用夹逼定理求极限.

【例 1.18】 求下列各极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{1/n}}{n+1} + \frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}} \right).$$

【解】 (1) 因为每一项中提出 $\frac{1}{n}$ 后, 剩余各项不能用一个通项表示出来, 因此不能用定积分定义求解.

$$1 \leftarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$(3) \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \leq \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i.$$

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_0^1 = \frac{1}{\ln 2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2},$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

【例 1.19】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n^2}}$.

【解】 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2+1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}.$

$$\text{因为 } \frac{i^2}{n^2} \leq \frac{i^2+1}{n^2} \leq \frac{(i+1)^2}{n^2},$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2+1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}.$$

$$\text{又因为 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1 + \frac{(n+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} = \arctan x \Big|_0^1 + 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}, \text{故原极限} = \frac{\pi}{4}.$$

题型 III 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限

【解题提示】 解法有: (1) 分子, 分母同乘以一个因子, 使之出现连锁反应; (2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式, 在整个相乘过程中中间项相消, 从而化简为易求极限; (3) 利用夹逼定理; (4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

【例 1.20】 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{3^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

【解】 (1) 因为 $\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$,

$$\text{又 } \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n(n+1)}, \quad \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1} = \frac{n^2 + n + 1}{3},$$

$$\text{所以原极限} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \text{ 因为 } \begin{cases} 1 \cdot 3 < 2^2 \\ 3 \cdot 5 < 4^2 \\ \dots \\ (2n-1)(2n+1) < (2n)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2 (2n+1) < 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2 \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \sqrt{2n+1} < 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \\ \dots \\ 0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{cases}$$

$$\text{又因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0,$$

故由夹逼定理, 原极限 = 0.

$$(3) \text{ 取对数得 } \frac{1}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) + \ln \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right] = \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n},$$

两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 得

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2} \\ &= \ln 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \ln 2 + \frac{\pi-4}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{故原极限} = e^{\ln 2 + (\pi-4)/2} = e^{\ln 2} \cdot e^{(\pi-4)/2} = 2e^{(\pi-4)/2}.$$

题型 IV 通项为积分形式的数列的极限

【解题提示】 注意:一般地 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx$, 求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ 的方法: (1) 利用不等式放缩法对 $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$ 进行估值, 再用夹逼定理求极限. (2) 利用积分中值定理求极限.

【例 1.21】 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt.$$

【解】 (1) 因为在 $[0, 1]$ 上, $x^n \geq 0$, 且 $\frac{1}{1+x}$ 连续,

$$\text{所以 } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1},$$

$$\text{其中 } 0 \leq \xi \leq 1, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1} = 0.$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad \text{其中 } \epsilon > 0 \text{ 为任意正数,}$$

$$\text{而 } 0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \sin^n x dx = \sin^n \xi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} dx = \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) \sin^n \xi \leq \frac{\pi}{2} \sin^n \xi,$$

$$\text{其中 } 0 < \xi < \frac{\pi}{2} - \epsilon, \text{ 由于 } 0 < \sin \xi < 1, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \sin^n \xi = 0.$$

$$\text{又 } 0 < \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) = \epsilon, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0,$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

$$(3) \text{ 因为 } \cos 2t = 1 - \frac{1}{2!}(2t)^2 + o(t^2), \text{ 所以 } 1 - 2t^2 \leq \cos 2t \leq 1, \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1-2t^2}{4t^2} dt &\leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{4t^2} dt \\ \Rightarrow -\frac{3}{4} + \frac{n}{4} + \frac{1}{2n} &\leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq -\frac{1}{4} + \frac{n}{4}, \text{ 两边同乘以 } \frac{1}{n}, \text{ 得} \\ -\frac{3}{4n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n^2} &\leq \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq -\frac{1}{4n} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{4n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4n} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt = \frac{1}{4}.$$

题型 V 利用子序列的极限与函数的极限等值定理, 求数列极限

【解题提示】 将序列中的自然数 n 换成连续变量 x , 求出形式相同的函数的极限, 即得数列的极限.

【例 1.22】 求下列极限: