普通高等教育“十二五”规划教材

数学物理方法教程

主 编 蔡 托
副主编 桑 田

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

数学物理方法教程

主　编　蔡　托
副主编　桑　田

科学出版社
北　京

内 容 简 介

全书共分9章，第1章为预备知识，包含级数、留数定理及其应用、傅里叶级数与积分、傅里叶变换和拉普拉斯变换，其主要目的是给读者作简要的复习和适当的知识补充，为学习后面各章节知识作必要的准备.第2至第8章详细地讲述了数学物理方程的导出、基本的求解方法和技巧.第9章讲解了一些常见的非线性微分方程及其解法.

本书可作为高等师范院校和理工院校相关专业学生的教材，也可作为相关工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法教程/蔡托主编.—北京：科学出版社，2015.7
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-045111-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①蔡… Ⅲ.①数学物理方法-高等学校-教材
Ⅳ.①O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第132950号

责任编辑：罗 吉 昌 盛／责任校对：胡小洁
责任印制：徐晓晨／封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015年7月第 一 版 开本：720×1000 B5
2015年7月第一次印刷 印张：17
字数：328 000
定价：39.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是在作者总结多年从事“数学物理方法”课程教学经验的基础上，经过对历年教案的整理、提炼和充实并参阅部分相关优秀著作之后写成的.

全书主要由三部分组成，即“线性数学物理方程”、“特殊函数”和“非线性微分方程”.“线性数学物理方程”部分主要讲解了数学物理方程的导出以及三类典型的二阶线性偏微分方程各种定解问题的一些常用解法，包括分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法以及近似方法. 在这些解法中，重点介绍了分离变量法，较详细地讨论了三类典型方程在不同坐标系中进行分离变量的一般步骤及各种边界条件的处理.“特殊函数”部分主要讲解了贝塞尔函数及勒让德多项式，包括如何从求解数学物理方程的定解问题引出贝塞尔方程和勒让德方程，两个方程通解的表达式，贝塞尔函数和勒让德多项式的一些重要性质以及利用这两种特殊函数来解决数学物理方程的一些定解问题的全过程.“非线性微分方程”部分介绍并讲解了一些最为常见的数学物理方程的结构及其解法. 但一般而言，大多数非线性微分方程并无确定的解法可循，故对这部分未作更为深入的讨论，仅作为一个简短的入门来介绍，目的是让读者对非线性方程及其求解方法有一个基本的了解.

数学物理方程的内容是极其丰富的，作为高等师范院校和理工院校的教材，要想将所有的内容都包罗吸收进来并作详细的讲解是不可能的. 如何根据高等教育改革的需要，使学生在较短的时间内有效地掌握必需的数学工具，这是作者一直在思考的问题，也是促成作者完成此书写作的动因.

在组织写作过程中，作者摒弃了大部分艰涩的、过于“数学”的证明过程，在保证数学严谨性的前提下尽可能地用比较通俗易懂的语言表述各种概念和定义，书中例题部分的讲解充分体现了作者本人长期总结得出的一些巧妙而简练的讲解技巧和解题技巧，这些都是本书的特色所在. 在内容的编排上，注重突出了各部分知识的系统性、连贯性和实用性，突出了对数学物理方程解的物理图景的分析，这些则是本书不同于其他同类书籍的地方.

写作初期，中科院理论物理所的蔡荣根研究员、北京工业大学理论物理所的黄永畅教授给作者提供了不少建设性意见. 完稿后，中科院的武向平院士审阅了全稿. 此外，在拟定编写大纲过程中，唐延林教授、童红教授和岳莉教授提出了很好的建议，任银拴、周武雷老师和郑勇老师参与了部分章节的校对工作，在此一并深表谢意.

由于作者水平有限，书中疏漏和不足在所难免，敬请广大读者批评指正并不吝赐教.

作　者

2014 年 10 月

序

有幸拜读蔡托教授所著《数学物理方法教程》，仿佛又回到30年前风华正茂的岁月，置身于古朴淡雅的校园，重逢求知若渴的学子，特别是在多年追求所谓攀登科学高峰之碌碌无为中，人心已尽显浮躁，不经意间便沦为虚荣浮华之徒. 深入蔡托教授的著作，被其中纯朴的语言和详尽的公式所吸引，暂且远离了喧嚣的尘世，细细品尝着科学本来的韵味.

蔡托教授集数十载讲授数学物理方法之经验为一体，汇聚多年扎根教学一线的心得，给我们将要步入自然科学殿堂的青年学子奉献了一份掌握数学物理方法基础的厚礼. 蔡托教授把枯燥无味的数学物理公式和概念以通俗易懂的方式表达，注重数理方程的物理源头导引，深入浅出、条理清楚、逻辑严密、涉猎广泛，是理工科学生和青年科技工作者难得的一本入门和掌握数理方法基础的好书.

素闻蔡托教授讲授数学物理方法一课之精彩，读其书犹如身临其境，如未来有幸聆听蔡教授授课，当面求教，定会受益匪浅.

武向平

2014年7月12日于北京

目　　录

序

前言

第 1 章　预备知识 …… 1

1.1　复数及其运算 …… 1

1.1.1　复数及其共轭 …… 1

1.1.2　复数的运算 …… 1

1.2　复变函数的导数和积分 …… 2

1.2.1　复变函数 …… 2

1.2.2　复变函数的微商(导数) …… 3

1.2.3　复变函数的积分 …… 4

1.2.4　平面标量场 …… 9

1.3　级数 …… 10

1.3.1　复数项级数 …… 10

1.3.2　泰勒级数 …… 11

1.3.3　洛朗级数 …… 12

1.4　留数定理及其应用 …… 13

1.4.1　奇点的类型 …… 13

1.4.2　留数定理 …… 14

1.4.3　留数定理在实变函数定积分计算中的应用 …… 16

1.5　傅里叶级数与积分 …… 19

1.5.1　傅里叶级数 …… 20

1.5.2　复数形式的傅里叶级数 …… 21

1.5.3　实数傅里叶级数与复数傅里叶级数的比较 …… 22

1.5.4　傅里叶积分 …… 22

1.6　傅里叶变换 …… 24

1.7　拉普拉斯变换 …… 27

习题 1 …… 32

第 2 章　定解问题 …… 34

2.1　定解问题的提法 …… 34

2.2 数学物理方程的导出与归类…… 34
2.2.1 波动方程…… 34
2.2.2 运输方程…… 42
2.2.3 稳定分布问题…… 45
2.2.4 其他常见的数学物理方程…… 46
2.3 定解条件…… 47
2.3.1 初始条件…… 47
2.3.2 边界条件…… 47
2.4 定解问题的适定性…… 49
2.5 线性偏微分方程与叠加原理…… 49
2.6 δ 函数…… 50
2.6.1 δ 函数的定义及其性质…… 50
2.6.2 δ 函数的导数及其性质…… 52
2.6.3 δ 函数在定解问题中的应用…… 53
2.7 二阶线性偏微分方程的分类…… 54
2.7.1 方程的分类…… 54
2.7.2 方程的标准形式…… 55
习题 2…… 59
第 3 章 分离变量法…… 61
3.1 齐次方程齐次边界条件的定解问题…… 61
3.1.1 问题的提出…… 61
3.1.2 解的物理意义…… 64
3.2 分离变量法应用实例…… 67
3.3 非齐次波动方程和输运方程的解法…… 73
3.4 非齐次边界条件的处理…… 78
3.5 具有非齐次边界条件的定解问题…… 82
3.6 泊松方程的特解法…… 88
3.6.1 泊松方程任意特解的构造…… 88
3.6.2 泊松方程的解…… 89
3.7 施图姆-刘维尔本征值问题…… 92
3.7.1 施图姆-刘维尔方程…… 92
3.7.2 施图姆-刘维尔本征值问题…… 93
3.7.3 施图姆-刘维尔本征值问题的普遍性质…… 93

3.7.4 施图姆-刘维尔本征值问题与厄米算符本征值问题的关系 …… 97
习题 3 …… 100
第 4 章　行波法与积分变换法 …… 102
4.1　一维波动方程的达朗贝尔公式 …… 102
4.2　三维无界空间中的波动方程 …… 106
4.3　积分变换法 …… 113
4.3.1　傅里叶变换的应用 …… 113
4.3.2　拉普拉斯变换的应用 …… 116
习题 4 …… 120
第 5 章　格林函数法 …… 122
5.1　拉普拉斯方程两种常见的定解问题 …… 122
5.1.1　内问题 …… 122
5.1.2　外问题 …… 123
5.2　调和函数的基本性质 …… 124
5.3　格林函数 …… 128
习题 5 …… 133
第 6 章　贝塞尔函数 …… 134
6.1　贝塞尔方程的导出 …… 134
6.2　贝塞尔方程的解 …… 136
6.3　n 为整数时贝塞尔方程的通解 …… 139
6.4　贝塞尔函数的递推公式 …… 140
6.5　将函数展为贝塞尔函数的级数 …… 144
6.5.1　贝塞尔函数的零点 …… 144
6.5.2　贝塞尔函数的正交性 …… 145
6.5.3　广义傅里叶级数 …… 147
6.6　虚宗量贝塞尔函数与开尔文函数 …… 151
习题 6 …… 153
第 7 章　勒让德多项式 …… 155
7.1　勒让德方程的导出 …… 155
7.2　勒让德方程的解 …… 157
7.2.1　勒让德方程的解 …… 157
7.2.2　勒让德多项式 …… 159
7.3　勒让德多项式的性质 …… 162

7.3.1　勒让德多项式的几条基本性质 …… 162
7.3.2　勒让德多项式的正交性 …… 162
7.3.3　勒让德多项式的母函数(或生成函数) …… 164
7.3.4　勒让德多项式的递推公式 …… 166
7.4　勒让德多项式的应用 …… 168
7.5　连带勒让德方程的解 …… 171
7.5.1　连带勒让德函数 …… 171
7.5.2　球函数 …… 175
习题 7 …… 177
第 8 章　求解线性偏微分方程近似方法简介 …… 179
8.1　变分法 …… 179
8.1.1　泛函 …… 179
8.1.2　变分问题 …… 179
8.1.3　变分法的类型及例子 …… 180
8.1.4　带有附加条件的变分问题 …… 184
8.2　差分法 …… 185
8.2.1　将微分方程化为差分方程 …… 185
8.2.2　差分方程的求解方法 …… 187
习题 8 …… 194
第 9 章　非线性微分方程 …… 195
9.1　特殊高次一阶微分方程的解法 …… 195
9.2　非线性数学物理方程 …… 199
9.2.1　非线性常微分方程 …… 199
9.2.2　非线性偏微分方程 …… 202
9.2.3　函数方程 …… 204
9.3　某些非线性微分方程的求解方法 …… 205
9.4　椭圆方程及其雅可比椭圆函数解 …… 210
9.4.1　第一类椭圆方程 …… 210
9.4.2　第二类椭圆方程 …… 216
9.4.3　第三类椭圆方程 …… 219
9.4.4　第四类椭圆方程 …… 220
9.5　二阶非线性微分方程及其解法 …… 222
9.6　非线性微分方程的物理分析 …… 226

9.7　非线性微分方程的行波法 …… 236
习题 9 …… 238
习题参考答案 …… 240
参考书目 …… 251
附录 …… 252
附录 A　矢量微分算符∇的相关公式 …… 252
附录 B　Γ 函数 …… 254
附录 C　椭圆积分与椭圆函数 …… 256
附录 D　拉普拉斯变换简表 …… 258

第1章 预备知识

1.1 复数及其运算

1.1.1 复数及其共轭

任一复数均可表为某一实数 x 与某一纯虚数 $\mathrm{i}y$ 之和,即

$$z=x+\mathrm{i}y \tag{1.1.1}$$

且将 $x=\mathrm{Re}z$ 和 $y=\mathrm{Im}z$ 分别称为复数 z 的实部和虚部.

若将 x、y 看成平面上点的坐标,则复数 z 将与平面上的点一一对应,这一平面称为复平面,x 轴与 y 轴分别称为实轴与虚轴.这样一来,复数 z 就相当于复平面上的矢量(图 1.1).

在平面极坐标下,因为 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$,于是复数 z 可分别用三角函数形式或指数函数形式表为

$$z=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \quad 或 \quad z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.1.2}$$

其中 ρ 称为该复数的模($|z|$),而 θ 则称为该复数的辐角($\arg z$).

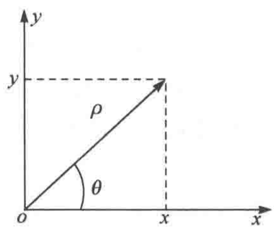

图 1.1

值得强调的是:复数的复角不能唯一地确定,它可增减 2π 的整数倍.

复数 z 的共轭复数用 z^* 表示,即

$$z^*=x-\mathrm{i}y=\rho(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \tag{1.1.3}$$

1.1.2 复数的运算

1. 复数的和与差

设有复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则其和定义为

$$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2) \tag{1.1.4}$$

即实部与实部相加,虚部与虚部相加,显然有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.1.5}$$

而复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的差则定义为

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2) \tag{1.1.6}$$

即实部与实部、虚部与虚部分别相减,显然有

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2| \tag{1.1.7}$$

2. 复数的积与商

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的积定义为

$$z=z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) \tag{1.1.8}$$

即复数的积满足乘法交换律、结合律和分配律.

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的商定义为

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1z_2^*}{z_2z_2^*}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.1.9}$$

3. 复数的乘方与开方

为方便计算,我们采用复数的指数式或三角式表示. 复数的 n 次幂定义为

$$z^n=\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=\rho^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta) \tag{1.1.10}$$

而复数的 n 次根式为

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right) \tag{1.1.11}$$

由于复角 θ 可增减 2π 的整数倍,于是根式 $\sqrt[n]{z}$ 的辐角 θ/n 也可增减 $2\pi/n$ 的整数倍. 故对给定的 z 而言, $\sqrt[n]{z}$ 可取 n 个不同的值. 对于复数的积与商,采用三角式与指数式同样是方便的,它们分别表示为

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}=\rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{1.1.12}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.1.13}$$

特别需要强调的是: z^2 与 $|z|^2$ 是不同的, $z^2=zz$ 是复数 z 的自乘,而 $|z|^2$ 是复数 z 的模方, $|z|^2=zz^*$,即模方是复数 z 与其共轭 z^* 的积.

1.2 复变函数的导数和积分

1.2.1 复变函数

当复变数 z 在复平面上的某一区域 Ω 中连续变化时,若复变数 ω 的值随着 z 的值而变,则称 ω 为该区域上的复变数 z 的函数. 记为

$$\omega=f(z)$$

若区域 Ω 包括边界上的点,则称为闭域;若 Ω 不包括边界上的点而只包括边界内的点,则称 Ω 为开域(设 Ω 是连通的). 由定义可知

$$f(z)=\mathrm{e}^z,\quad f(z)=\cos z,\quad f(z)=\mathrm{sh}z,\quad f(z)=\ln z$$

……

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

等都是复变函数的具体例子.

需要指出的是:

(1) 在实数域中有 $|\cos\theta|\leqslant 1$,但在复数域中,由欧拉公式及复数定义可得

$$|\cos z|=\frac{1}{2}\left|e^{iz}+e^{-iz}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\cos^2 x-\sin^2 x)}$$

可见,在复数域中,复变函数 $\cos z$(或 $\sin z$)的模完全可以大于 1.

(2) 在实数域中,负数的对数无意义. 但在复数域中,若 z 取负值,则

$$\ln z=\ln(|z|e^{i\pi})=\ln(|z|e^{i\pi+i2n\pi})=\ln|z|+i(2n+1)\pi$$

即在复数域中,负复变数的对数仍有意义.

1.2.2 复变函数的微商(导数)

定义:当 Δz 无论以何种方式趋于零时,比值

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

总是趋于同一有限的极限,则该极限称为复函数 $f(z)$ 在点 z 上的微商,表示为

$$f'(z)=\frac{df(z)}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{1.2.1}$$

由以上定义可知,复变函数的导数在形式上与实变函数导数的定义一样,故关于导数的规则与公式,可从实变函数论中借用过来,即

$$\frac{d}{dz}(\omega_1\pm\omega_2)=\frac{d\omega_1}{dz}\pm\frac{d\omega_2}{dz},\quad \frac{d}{dz}(\omega_1\omega_2)=\omega_2\frac{d\omega_1}{dz}+\omega_1\frac{d\omega_2}{dz}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)=\frac{\omega_1'\omega_2-\omega_2'\omega_1}{\omega_2^2},\quad \frac{d}{dz}F(\omega)=\frac{dF}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dz},\quad \frac{d}{dz}(e^z)=e^z$$

$$\frac{d}{dz}(z^n)=nz^{n-1},\quad \frac{d}{dz}(\sin z)=\cos z$$

……

需要注意的是:复变数 Δz 可沿复平面上的任意曲线趋于零. 现在将说明:复变函数可导的必要条件是实部与虚部满足柯西-黎曼方程.

将复变函数 $f(z)$ 用实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 表示为

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{1.2.2}$$

若 Δz 只沿实轴趋于零,则有 $\Delta y\equiv 0$,$\Delta z=\Delta x\to 0$,于是

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

若 Δz 沿虚轴趋于零，则有 $\Delta x\equiv 0, \Delta z=\Delta y\to 0$，于是

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x,y+\Delta y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y}\\&=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}-\mathrm{i}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}\right]\\&=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

若 $f(z)$ 在 z 点可导，上面两个极限应相等，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

上式恒等的条件是等号两边的实部与虚部分别相等，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\tag{1.2.3}$$

这两个公式称为柯西-黎曼方程，这是复变函数可导的必要条件. 由此看出，复变函数可导要比实变函数可导更为严格.

1.2.3　复变函数的积分

在复平面上，复变函数 $f(z)$ 沿任意一条光滑曲线 l 的积分定义为

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k\tag{1.2.4}$$

将 z 和 $f(z)$ 都用实部和虚部表出，有

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z=\left[\int_l u(x,y)\mathrm{d}x-\int_l v(x,y)\mathrm{d}y\right]+\mathrm{i}\left[\int_l v(x,y)\mathrm{d}x+\int_l u(x,y)\mathrm{d}y\right]\tag{1.2.5}$$

这就把复变函数的积分归结为两个实变函数的积分，它们分别是路径积分的实部和虚部.

1. 柯西定理

现在来讨论复变函数论中一个有用的定理——柯西定理，进而给出柯西公式.

将 $f(z)$ 看成复平面上的矢量，则其实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 就是该矢量的两个直角分量. 在式(1.2.5)中，第一个积分就相当于功函数，而第二个积分则相当于通量. 若积分

$$\oint_l [u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y]=0$$

即积分与路径无关,则说明复矢量场的旋度$\nabla\times \boldsymbol{f}(z)=0$,即

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial(-v)}{\partial x}=0 \tag{1.2.6}$$

若积分

$$\oint_l (v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)=0$$

即穿过l所围曲面的通量为零,则说明复矢量场的散度$\nabla\cdot \boldsymbol{f}(z)=0$,即

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.2.7}$$

式(1.2.6)和式(1.2.7)不是别的,它们正是柯西-黎曼方程. 对解析函数而言,柯西-黎曼方程总是满足的,于是我们得到**柯西定理:回路l所围区域上的解析函数$f(z)$沿l的回路积分**

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{1.2.8}$$

2. 奇点

若复变函数$f(z)$在某点z_0不可导,则点z_0称为$f(z)$的奇点. 若$f(z)$在某个奇点有限小的邻域(不含该奇点)上是解析的,则这类奇点称为孤立点. 例如,点α是$1/(z-\alpha)$的孤立奇点.

柯西定理指出:复变函数$f(z)$在无奇点的区域上沿闭合回路l的线积分为零. 但若在l包围的区域内存在孤立奇点,则将该奇点及其小邻域"挖掉",此时l所围区域将围成所谓的复通区域(图1.2). 与此对应,无孤立奇点的区域则称为单通区域. 在复通区域Ω上$f(z)$仍为处处解析. 将柯西定理应用于该区域有

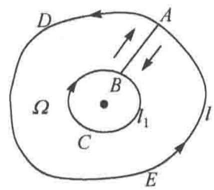

图1.2

$$\oint_{ABCBADEA} f(z)\mathrm{d}z=\int_{AB} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{l_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{BA} f(z)\mathrm{d}z+\oint_l f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{l_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_l f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{1.2.9}$$

线积分的方向为:当人沿着边界线行进时,区域始终保持在人的左边. 这样约定之后,式(1.2.9)中的积分箭头可略去,有

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z+\oint_{l_1} f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{1.2.10}$$

这说明沿内外边界线的正方向积分之和为零.

若l内含有多个孤立奇点(图1.3),可将柯西定理推广为

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z=-\sum_{k=1}^{n}\oint_{l_k} f(z)\mathrm{d}z \tag{1.2.11}$$

即解析函数沿外边界线正方向的积分等于沿所有内边界线正方向积分之和的负值. 柯西定理还指出，只要积分起点和终点不变，积分路径连续变形不会改变路径积分的值.

现在考察一重要积分$\oint_l (z-\alpha)^n \mathrm{d}z$（$n$ 为整数）. 若回路 l 不包含点 α，被积函数在 l 所围区域上为解析，按柯西定理积分值为零. 若 $n<0$，且 l 包含点 α 时，则被积函数包含奇点 α（图 1.4）. 此时可将 l 变形为以点 α 为圆心、任意大小的 R 为半径的圆周 C，则在 C 上，$z-\alpha=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，于是

$$I=\oint_l (z-\alpha)^n \mathrm{d}z=\oint_c R^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}(\alpha+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\int_0^{2\pi} R^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$
$$=\mathrm{i}R^{n+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta$$

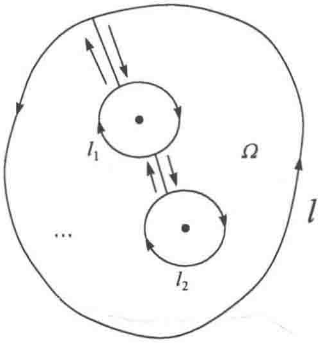

图 1.3

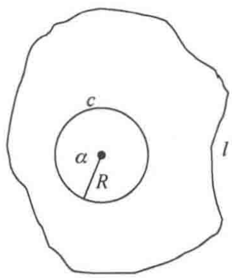

图 1.4

若 $n\neq-1$，$I=\mathrm{i}R^{n+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}R^{n+1}\dfrac{1}{\mathrm{i}(n+1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\Big|_0^{2\pi}=0$

若 $n=-1$，$I=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi\mathrm{i}$

合并而得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha}=\begin{cases}0, & l\text{ 不含 }\alpha\\ 1, & l\text{ 含 }\alpha\end{cases} \tag{1.2.12}$$

$$\oint_l (z-\alpha)^n \mathrm{d}z=0,\quad n\neq-1 \tag{1.2.13}$$

3. 柯西公式

设 α 是 l 所围的一内点，$f(z)$在该区域上解析，可将式(1.2.12)表示为

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \frac{f(\alpha)}{z-\alpha}\mathrm{d}z \tag{1.2.14}$$

现以 α 为圆心，ε 为半径作一小圆周 c(图 1.5)，我们将证明式(1.2.14)右边被积函数中的 $f(\alpha)$ 可用 $f(z)$ 代替．为此，只需证明

$$\oint_l \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\mathrm{d}z = 0$$

即可. 将 c 所围区域挖掉，则在 l 与 c 所围的闭复通区域上 $[f(z)-f(\alpha)]/(z-\alpha)$ 单值解析. 由柯西定理有

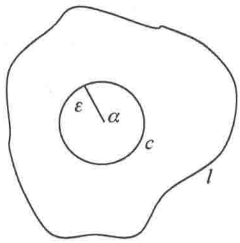

图 1.5

$$\oint_l \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\mathrm{d}z = \oint_{c_\varepsilon} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\mathrm{d}z$$

上式左边积分与 ε 无关，故右边的积分实际上也不依赖于 ε 的大小．右边积分可估算出

$$\left|\oint_c \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\max|f(z)-f(\alpha)|$$

其中，$\max|f(z)-f(\alpha)|$ 为 $|f(z)-f(\alpha)|$ 在 c 上的最大值．当 $\varepsilon\to0$，即 $c\to\alpha$ 时，由于 $f(z)$ 连续，故 $f(z)\to f(\alpha)$，所以有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\max|f(z)-f(\alpha)|\to0$$

所以式(1.2.14)的被积函数中的 $f(\alpha)$ 用 $f(z)$ 代替是自然的．再将区域的内点用 z 表示，而沿边界的积分变量用 ξ 表示，则有第一柯西公式如下：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \tag{1.2.15}$$

该公式指出：只要知道解析函数 $f(\xi)$ 沿边界线 l 如何变化，则解析函数在任意一个内点 z 上的值 $f(z)$ 便可由边界线上的回路积分表出．从物理上看，解析函数与平面标量场紧密联系，而平面标量场的边界条件决定了区域内场的分布．由式(1.2.15)对内点依次求导得

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\mathrm{d}\xi$$

……

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi \tag{1.2.16}$$

式(1.2.16)称为第二柯西公式．这说明解析函数的任意阶导数都存在. 换言之，复变函数只要处处存在一阶导数，则其任意阶导数也处处存在.

若附加上条件 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)\to0$，则可将第一柯西公式推广到无界情形，即

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \tag{1.2.17}$$

只是此时路径积分的方向为顺时针方向，即规定：人沿边界线行进时，保持区域始