全无敌·经典教材配套丛书

配套·高教社·朱来义《微积分(第三版)》

微积分
同步辅导与习题全解

(高教社·朱来义·第三版)

李红英 ◎ 主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

全无敌·经典教材配套丛书

微积分同步辅导与习题全解

(高教社·朱来义·第三版)

李红英　主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步辅导与习题全解:高教社·朱来义·第三版/李红英主编.
上海:华东理工大学出版社,2015.8
(全无敌·经典教材配套丛书)
ISBN 978-7-5628-4342-9

Ⅰ.①微… Ⅱ.①李… Ⅲ.①微积分—高等学校—教学
参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 174101 号

内容提要

本书是与朱来义主编的面向 21 世纪课程教材《微积分(第三版)》配套的学习辅导书,根据全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲(经济类)的要求编写而成。为了与教材保持同步,本书按原书的编排顺序逐章编写。每章内容包括:大纲要求、知识结构图、基本内容、重点难点剖析、典型例题解析、练习题全解、习题全解等七个栏目。

本书相对于教材有一定的独立性,可作为非数学专业微积分课程的学习参考书,也可作为考研的复习指导书。

全无敌·经典教材配套丛书

微积分同步辅导与习题全解(高教社·朱来义·第三版)

主　　编 / 李红英
责任编辑 / 李　晔
责任校对 / 金慧娟
出版发行 / 华东理工大学出版社
地址:上海市梅陇路 130 号,200237
电话:(021)64250306(营销部)
(021)64252344(编辑室)
传真:(021)64252707
网址:press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 常熟市华顺印刷有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 20.5
字　　数 / 551 千字
版　　次 / 2015 年 8 月第 1 版
印　　次 / 2015 年 8 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978-7-5628-4342-9
定　　价 / 42.00 元

联系我们:电子邮箱 press@ecust.edu.cn
官方微博 e.weibo.com/ecustpress
天猫旗舰店 http://hdlgdxcbs.tmall.com

華東理工大學出版社
客户端扫码进入天猫旗舰店

前言 PREFACE

为了帮助经济类和管理类在校学生和自学者学好“微积分”，为了给他们备考研究生提供一份复习资料，我们总结在教学中积累的大量资料和汇集的考题，编写了这本配套朱来义主编的面向21世纪课程教材《微积分(第三版)》同步辅导书。

全书根据全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲(经济类)的要求编写。为了与教材保持同步，本书按原书的编排顺序逐章编写。每章内容包括：大纲要求、知识结构图、基本内容、重点难点剖析、典型例题解析、练习题全解、习题全解等七个栏目。此外，还归纳了考研题和例题的解答过程中的常用方法、技巧及易错之处，尽量使解题方法标准、简捷、巧妙。

考虑到经管类学生和自学者学习数学过程中缺少过程指导书的困难，编写此书时，在选材、理论推导、文字叙述等诸多方面尽量满足其需要，并且在例题后增加了注意要点、解题思路和分析，帮助学生总结解题经验，避免常犯错误。

本书可作为经济和管理类本科生的学习辅导书，更是自学者和有志攻读经济和管理类硕士研究生青年的良师益友，对于从事“微积分”教学的教师也有一定的参考价值。

由于水平有限，不足与不当之处在所难免，恳请读者和专家批评指正。

编者

2015年6月

目录 CONTENTS

第1章 函 数

一、大纲要求

1. 理解函数的概念
2. 掌握函数的单调性、周期性、奇偶性和有界性
3. 理解反函数和复合函数的概念
4. 熟悉基本初等函数的性质及图形
5. 理解初等函数和隐函数的概念
6. 了解简单函数关系的建立

二、本章知识结构图

- 函数
  - 函数的定义
    - 求定义域
    - 求函数表达式
    - 求反函数
  - 函数的性质
    - 有界性
    - 单调性
    - 奇偶性
    - 周期性
  - 函数的类型
    - 基本初等函数
    - 初等函数
    - 非初等函数
  - 函数的形式
    - 显函数
    - 隐函数
    - 复合函数
    - 参数方程确定的函数
    - 分段函数
  - 简单函数关系的建立
    - 总成本函数
    - 总收入函数
    - 总利润函数
    - 需求函数
    - 供给函数

三、本章基本内容

1. 预备知识

表 1-1 绝对值、邻域

名称	定义	注意
实数与数轴	有理数和无理数统称为实数,数轴是一条有原点、正方向和长度单位的直线	微积分中的函数都是在实数范围里讨论
实数的绝对值及其基本性质	$x\in\mathbf{R}$ $\lvert x\rvert=\begin{cases}x,当\ x\geqslant 0\ 时;\\-x,当\ x<0\ 时\end{cases}$ $x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}$ 1. $\lvert x\rvert\geqslant 0$; 2. $\lvert -x\rvert=\lvert x\rvert$; 3. $-\lvert x\rvert\leqslant x\leqslant\lvert x\rvert$; 4. $\lvert x\pm y\rvert\leqslant\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$; 5. $\lvert\lvert x\rvert-\lvert y\rvert\rvert\leqslant\lvert x-y\rvert$; 6. $\lvert xy\rvert=\lvert x\rvert\lvert y\rvert$; 7. $\left\lvert\dfrac{x}{y}\right\rvert=\dfrac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}(y\neq 0)$	
区间与邻域	设 $\delta>0$,我们称 $O_\delta(x_0)$ 为 x_0 的 δ 邻域(实心邻域),即 $O_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$;我们称 $O_\delta(x_0)/\{x_0\}$ 为 x_0 的 δ 去心邻域(空心邻域),即 $O_\delta(x_0)/\{x_0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$;设 $M>0$,我们称 $\lvert x\rvert>M$ 为 ∞ 点的 M 邻域,记为 $O_M(\infty)$	1. 实心邻域与空心邻域的区别 2. $(x_0-\delta,x_0)$ 为 x_0 的左邻域,$(x_0,x_0+\delta)$ 为 x_0 的右邻域 3. 邻域是开区间

2. 函数概念

表 1-2 函数

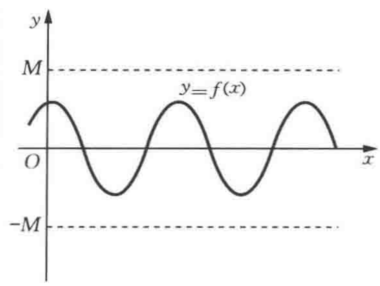
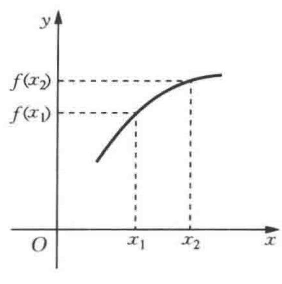
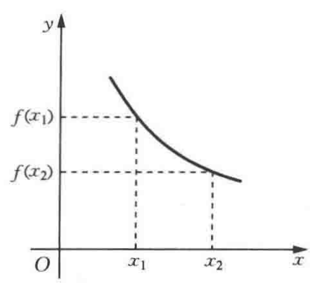
名称	定义	注意
函数	设有两个变量 x 与 y,变量 x 属于某实数集合 D,如果存在一个确定的法则(也说对应规则)f,使得对于每一个 $x\in D$,都有唯一的一个实数 y 与之对应,则称这个对应法则 f 为定义在实数集合 D 上的一个一元函数,简称函数,D 称为 f 的定义域 $R(f)=\{y\mid y=f(x),x\in D(f)\}$,$R(f)$ 称为 f 的值域	二要素:定义域、对应法则
复合函数	已知函数 $y=f(u)$,$u\in D(f)$,$y\in R(f)$,$u=g(x)$,$x\in D(g)$,$u\in R(g)$. 如果 $D(f)\cap R(g)\neq\varnothing$(空集),则称函数 $y=f[g(x)]$,$x\in\{x\mid g(x)\in D(f)\}$ 为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数	$D(f)\cap R(g)\neq\varnothing$ 为复合条件,否则不能复合
反函数	设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $D(f)$,值域是 $R(f)$,如果对每一个 $y\in R(f)$,都有唯一确定的 $x\in D(f)$ 与之对应且满足 $y=f(x)$,则 x 是定义在 $R(f)$ 上以 y 为自变量的函数,记此函数为 $x=f^{-1}(y)$,$y\in R(f)$ 并称其为函数 $y=f(x)$ 的反函数	

续 表

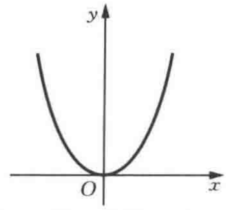
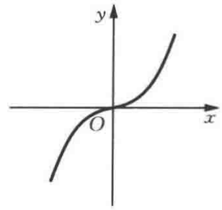
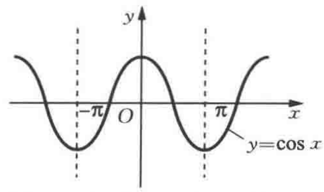
名 称	定 义	注 意
初等函数	由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的函数称为初等函数	有限次
隐函数	设二元方程 $F(x,y)=0$，对于某一实数集合 D 内的每一个 x，均有上述方程唯一确定的 y 与之对应（此处的 y 与 x 一起满足方程），称由方程 $F(x,y)=0$ 确定了一个定义在 D 上的隐函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 也称方程 $F(x,y)=0$ 为隐式方程	

3. 函数的性质

表 1－3 函数的几种特性

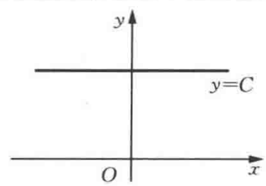
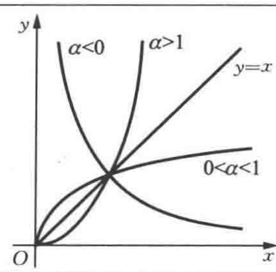
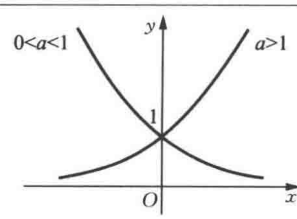
<table>
<tr><th colspan="2">性 质</th><th>定 义</th><th>图例或说明</th></tr>
<tr><td colspan="2">有界性</td><td>函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在 $M>0$，对 $\forall x\in D$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，称 $f(x)$ 在 D 内有界，或称 $f(x)$ 为 D 内的有界函数. 上界：$\exists M_1$，对 $\forall x\in D$，有 $f(x)\leqslant M_1$；下界：$\exists M_2$，对 $\forall x\in D$，有 $f(x)\geqslant M_2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">无界性</td><td>函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对 $\forall M>0$，$\exists x_0\in D$，使 $|f(x_0)|>M$，称 $f(x)$ 在 D 上无界</td><td>如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界；
$\forall M>0$，$\exists x_0=\dfrac{1}{2M}$，$f(x_0)=2M>M$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">单调性</td><td>单调增加</td><td>函数 $f(x)$ 的定义域为 D，$\forall x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，称 $f(x)$ 在区间 D 上单调增加，若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 在区间 D 上严格单调增加</td><td>
</td></tr>
<tr><td>单调减少</td><td>函数 $f(x)$ 的定义域为 D，$\forall x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，称 $f(x)$ 在区间 D 上单调减少，若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 在区间 D 上严格单调减少</td><td>
</td></tr>
</table>

续 表

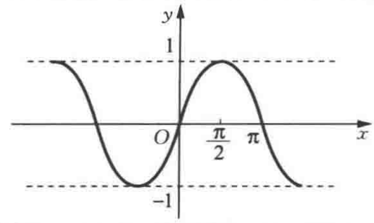
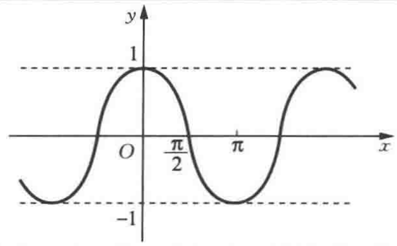
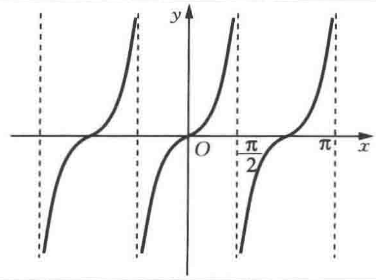
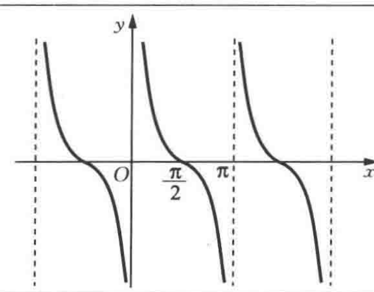
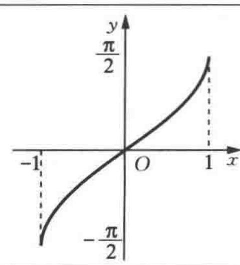
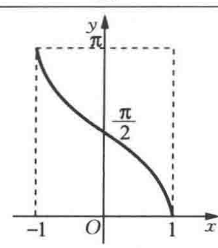
性 质	定 义		图例或说明
奇偶性	偶函数	函数 $f(x)$ 在一个关于原点对称的实数集合 D 内有定义，若对 $\forall x\in D$，有 $f(x)=f(-x)$，称 $f(x)$ 为集合 D 内的偶函数	
	奇函数	函数 $f(x)$ 在一个关于原点对称的实数集合 D 内有定义，若对 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为集合 D 内的奇函数	
周期性	函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个非零常数 T，使对 $\forall x\in D$，有 $(x+T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，称 $f(x)$ 为 D 上的周期函数，满足上式的最小正数 T_0 称为 $f(x)$ 的基本周期，简称周期		

4. 基本初等函数

表 1-4 定义、性质、图形

名称	定义与性质	图 形
常数函数	$y=C$，C 为常数， 定义域为 $(-\infty,+\infty)$， 其图形为平行于 x 轴的直线	
幂函数	$y=x^{\alpha}$（α 为实数），当 $x>0$ 时， $\alpha>0$，为增函数； $\alpha<0$，为减函数	
指数函数	$y=a^{x}\ (a>0, a\neq 1)$， 定义域为 $(-\infty,+\infty)$， 当 $a>1$ 时，为严格单调增加函数； 当 $0<a<1$ 时，为严格单调减少函数	

续 表

名称	定义与性质	图 形
三角函数	正弦函数：$y=\sin x$， 定义域为$(-\infty,+\infty)$， 奇函数，周期 $T=2\pi$，$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$， 最大值为 1，最小值为$-1$	
	余弦函数：$y=\cos x$， 定义域为$(-\infty,+\infty)$， 偶函数，周期 $T=2\pi$，$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$， 最大值为 1，最小值为$-1$	
	正切函数：$y=\tan x$， 定义域为$\{x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$， 奇函数，周期 $T=\pi$	
	余切函数：$y=\cot x$， 定义域为$\{x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$， 奇函数，周期 $T=\pi$	
反三角函数	反正弦函数：$y=\arcsin x$， 定义域为$[-1,1]$， 值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$， 奇函数，单调增函数	
	反余弦函数：$y=\arccos x$， 定义域为$[-1,1]$， 值域为$[0,\pi]$， 非奇非偶函数，单调减函数	

四、重点难点剖析

1. 函数定义两要素:定义域及对应规则 f.

2. $f(x)$有界,则 $f(x)$有下界$-M$ 和上界M;反之,若 $f(x)$有上界 M_1 和下界 M_2,则 $f(x)$必有界,$M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$.

3. 注意复合函数 $y=f[g(x)]$的定义及构成复合函数的条件. 如果 $D(f)\cap R(g)\neq\varnothing$(空集),则可以复合成复合函数;如果 $D(f)\cap R(g)=\varnothing$,不能复合成复合函数.

例 $y=f(u)=\ln(u^2-1)$,$u=g(x)=\cos x$ 不能复合为 $y=\ln(\cos^2x-1)$.

4. 周期函数的周期是指最小正周期,但最小正周期不一定存在,如常数函数 $y=C$、狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数};\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 均为周期函数,但无最小正周期.

5. 掌握分段函数的表示法和定义域.

五、典型例题解析

例 1 指出下面各组中两个函数是否相同,并说明理由.

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$;

(2) $f(x)=x+1$, $g(x)=\sqrt{(x+1)^2}$;

(3) $f(x)=x$, $g(x)=\sin(\arcsin x)$.

解 (1) $f(x)$与 $g(x)$相同. 因为它们的定义域相同,都是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,对应关系也相同,是 $y=\begin{cases}1, & x>0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(2) $f(x)$与 $g(x)$不同. 因为它们的对应关系不同,$g(x)=|x+1|$.

(3) $f(x)$与 $g(x)$不同. 因为它们的定义域不同.

$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域为$[-1,1]$.

例 2 已知 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$,求 $f(x)$的定义域及 $f[f(-7)]$.

解 要使函数 $f(x)$有意义,应有$\begin{cases}3-x>0,\\ 3-x\neq1,\\ -7\leqslant x\leqslant7\end{cases}$

解之得$-7\leqslant x<2$ 及 $2<x<3$,因为 $f(-7)=\dfrac{1}{\lg 10}=1$,

所以 $f[f(-7)]=f(1)=\dfrac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}$.

关于定义域的求法应注意:如果函数是一个抽象的数学式子,则其定义域是使这个式子有意义的一切实数,这时应注意到:① 分式的分母不能为零;② 偶次根号下应大于或等于零;③ 对数的真数应大于零;④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$,其中$|x|\leqslant1$;⑤ 若函数表达式由几项组成,则其定义域是各项定义域的公共部分;⑥ 分段函数定义域是各段定义域的并集.

例3 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试求 $f(f(x))$，$f(f(f(x)))$，$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

$$f(f(x))=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x\quad(x\neq1).$$

$$f(f(f(x)))=\frac{f(f(x))}{f(f(x))-1}=\frac{x}{x-1}=f(x)\quad(x\neq1).$$

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}-1}=\frac{1}{1-f(x)}=1-x\quad(x\neq0,1).$$

本题是考查对函数符号的理解以及函数符号的运用，若令 $f_n(x)=\underbrace{f[\cdots f}_{n\text{层}}(x)]$，则可利用数学归纳法证得 $f_{2k}(x)=x$，　$f_{2k+1}(x)=f(x)$.

例4 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2-x^2}, & |x|\leqslant1;\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解 因为 $f[f(x)]=\begin{cases}\sqrt{2-(f(x))^2}, & |f(x)|\leqslant1;\\ 0, & |f(x)|>1.\end{cases}$

所以关键是要找出使 $|f(x)|\leqslant1$ 和 $|f(x)|>1$ 时的 x 的范围.

当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\sqrt{2-x^2}>1$；$|x|=1$ 时，$f(x)=1$；$|x|>1$ 时，$f(x)=0$，所以

$$f[f(x)]=\begin{cases}0, & |x|<1;\\ 1, & |x|=1;\\ \sqrt{2}, & |x|>1.\end{cases}$$

例5 证明下列函数在所示区间内是单调的：

(1) $f(x)=2^{1-x}\quad(-\infty<x<+\infty)$；　　　(2) $f(x)=\dfrac{1+x}{x}\quad(0<x<+\infty)$.

证明 (1) 设 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$，则 $f(x_1)-f(x_2)=2^{1-x_1}-2^{1-x_2}=2^{1-x_2}(2^{x_2-x_1}-1)$.

因为 $x_2-x_1>0$，故 $2^{x_2-x_1}>1$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x)$ 是单调减少的.

(2) 设 $0<x_1<x_2<+\infty$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1+x_1}{x_1}-\dfrac{1+x_2}{x_2}=\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}$.

因为 $x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x)$ 是单调减少的.

例6 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=e^{x^2}\sin x$；　　　(2) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & 0<x\leqslant\pi;\\ 0, & x=0;\\ 2x-3, & -\pi\leqslant x<0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\quad(a>0,a\neq1)$.

解 (1) $f(-x)=-e^{(-x)^2}\sin x=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

(2) $x\in[-\pi,0)$ 时，$-x\in(0,\pi]$，$f(-x)=-2x+3=-f(x)$；

　$x\in(0,\pi]$ 时，$-x\in[-\pi,0)$，$f(-x)=-2x-3=-f(x)$.

又 $f(0)=0$，综上所述，对任何 $x\in[-\pi,\pi]$，$f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

(3) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

例 7 证明下列函数的有界性:

(1) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ $(-\infty<x<+\infty)$; (2) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

证明 (1) 对任何实数 x,有 $0<\dfrac{1+x^2}{1+x^4}=\dfrac{1}{1+x^4}+\dfrac{x^2}{1+x^4}\leqslant 1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$,

即 $0<f(x)\leqslant\dfrac{3}{2}$,所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是有界函数.

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$,此时,$0\leqslant f(x)<1$;

当 $x<0$ 时,$f(x)=-1+\dfrac{2}{e^{-2x}+1}$,此时,$-1<f(x)<0$.

故对任何 x,$-1<f(x)<1$,即 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是有界函数.

例 8 设 $f(x)$是以 $T>0$ 为周期的函数,证明 $f(Cx)(C>0)$是以$\dfrac{T}{C}$为周期的函数.

证明 令 $F(x)=f(Cx)$,则

$$F\left(x+\frac{T}{C}\right)=f\left[C\left(x+\frac{T}{C}\right)\right]=f(Cx+T)=f(Cx)=F(x),$$

故 $f(Cx)$是以$\dfrac{T}{C}$为周期的函数.

例 9 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x+1)=x^2+x+1$,试求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解 因为 $g(x+1)=x^2+x+1=(x+1)^2-(x+1)+1$,

于是 $g(x)=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$,所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)<0;\\ g(x), & g(x)\geqslant 0\end{cases}=x^2-x+1\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$g[f(x)]=f^2(x)-f(x)+1=\begin{cases}1, & x<0;\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

例 10 设某商品的需求函数为 $Q_d=15-0.4P$,其中 P 为销售价格,总成本函数为 $C=12+0.3Q_d$,求该商品总利润对于销售价格的函数.

解 当销售量为 Q_d 时,总收入为 $R(P)=Q_dP=(15-0.4P)P$.

于是总利润对于销售价格的函数为

$$L(P)=R(P)-C(Q_d)=(15-0.4P)P-[12+0.3(15-0.4P)]=15.12P-0.4P^2-16.5.$$

六、练习题全解

练习 1.1

1. 解下列不等式,并用区间表示不等式的解集:

(1) $|x+1|<3$; (2) $|x-2|\geqslant 5$; (3) $|2x+1|>|x-1|$; (4) $|x|>x+1$;

(5) $0<|ax+b|<\delta$ (a,b,δ 均为正的常数); (6) $|x+1|+|x-1|\leqslant 4$.

解 (1) 原不等式等价于$-3<x+1<3$ $-4<x<2$ $(-4,2)$

(2) 原不等式等价于 $x-2\geqslant 5$ $x\geqslant 7$ 或 $x-2\leqslant -5$ $x\leqslant -3$ $(-\infty,-3]\cup[7,+\infty)$

(3) 原不等式等价于 $(2x+1)^2>(x-1)^2$ $x(x+2)>0$ $\begin{cases}x>0\\x+2>0\end{cases}$ 得 $x>0$

或 $\begin{cases}x<0\\x+2<0\end{cases}$ 得 $x<-2$ $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

(4) 原不等式等价于 $\begin{cases}x+1\geqslant 0\\x^2>x^2+2x+1\end{cases}$ 或 $x+1<0\Rightarrow -1\leqslant x<-\dfrac{1}{2}$ 或 $x<-1\Rightarrow x<-\dfrac{1}{2}$

故原不等式的解集为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$

(5) 因为 $ax+b\neq 0$ 所以 $x\neq -\dfrac{b}{a}$ $|ax+b|<\delta$ $-\delta<ax+b<\delta$

$\dfrac{-\delta-b}{a}<x<\dfrac{\delta-b}{a}$ $\left(-\dfrac{1}{a}(\delta+b),-\dfrac{b}{a}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{a},\dfrac{1}{a}(\delta-b)\right)$

(6) 当 $x\leqslant -1$ 时 $-(x+1)-(x-1)\leqslant 4$ $x\geqslant -2$

当 $x\geqslant 1$ 时 $x+1+x-1\leqslant 4$ $x\leqslant 2$

当 $-1<x<1$ 时 $x+1-(x-1)\leqslant 4$ $2\leqslant 4$ 恒成立,所以原不等式的解集为 $[-2,2]$

2. 利用不等式 $|a+b|<|a|+|b|$,证明:

(1) 当 $|x+1|<\dfrac{1}{2}$ 时,$|x-2|<\dfrac{7}{2}$; (2) 当 $|x-1|\leqslant 1$ 时,$|x^2-1|\leqslant 3|x-1|$.

证明 (1) 因为 $|a+b|<|a|+|b|$ $|x-2|=|x+1-3|<|x+1|+|-3|<\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{7}{2}$

(2) 当 $|x-1|\leqslant 1$ 时 $|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|=3|x-1|$

3. 证明不等式:

(1) $|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$; (2) $|a-b|\leqslant|a|+|b|$.

证明 (1) 因为 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$

所以 $|a-b|=|(a-c)+(c-b)|\leqslant|a-c|+|c-b|$

(2) $|a-b|=|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|=|a|+|b|$

练习 1.2

1. 试判断下列每对函数是否是相同的函数,并说明理由:

(1) $y=x$ 与 $y=2^{\log_2 x}$; (2) $y=\sin(\arcsin x)$ 与 $y=x$; (3) $y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$;

(4) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$; (5) $y=\sqrt{1+\cos 2x}$ 与 $y=\sqrt{2}\cos x$;

(6) $y=\arctan(\tan x)$ 与 $y=x$; (7) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$;

(8) $y=f(x)$ 与 $x=f(y)$; (9) $y=\ln(x^2-1)$ 与 $y=\ln(x+1)+\ln(x-1)$.

解 (1) $y=x$,它的定义域为 $D(f)=(-\infty,+\infty)$,

$y=2^{\log_2 x}$,它的定义域为 $D(g)=(0,+\infty)$

因为定义域不同,故 $y=x$ 与 $y=2^{\log_2 x}$ 不相同.

(2) $y=\sin(\arcsin x)$,它的定义域为 $D(f)=[-1,1]$,

$y=x$,它的定义域为 $D(g)=(-\infty,+\infty)$

定义域不同,故 $y=\sin(\arcsin x)$ 与 $y=x$ 不相同.

(3) $y=2\ln x$,它的定义域为:$D(f)=(0,+\infty)$

$y=\ln x^2$,它的定义域为:$D(g)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

定义域不同,故 $y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$ 不相同.

(4) $f=y=|x|$ $\quad D(f)=(-\infty,+\infty)$ $\quad R(f)=[0,+\infty)$

$g=y=\sqrt{x^2}$ $\quad D(g)=(-\infty,+\infty)$ $\quad R(g)=[0,+\infty)$

定义域相同,对应规则相同,所以 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 相同.

(5) $f=y=\sqrt{1+\cos 2x}$ $\quad R(f)=[0,\sqrt{2}]$

$g=y=\sqrt{2}\cos x$ $\quad R(g)=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

对应规则不同,所以 $y=\sqrt{1+\cos 2x}$ 与 $y=\sqrt{2}\cos x$ 不相同.

(6) $f=y=\arctan(\tan x)$ $\quad D(f)=\{x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$

$g=y=x$ $\quad D(g)=(-\infty,+\infty)$

定义域不同,所以 $y=\arctan(\tan x)$ 与 $y=x$ 不相同.

(7) $f=g=\sin^2 x+\cos^2 x$ $\quad D(f)=D(g)=(-\infty,+\infty)$ $\quad R(f)=R(g)=1$ $\quad g=y=1$,

定义域相同,对应规则相同,所以 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$ 相同.

(8) 由函数表示法“无关特性”知 $f(x)=f(y)$,其定义域和对应关系完全相同,所以 $y=f(x)$ 与 $x=f(y)$ 相同.

(9) $f=y=\ln(x^2-1)$ $\quad D(f)=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$g=y=\ln(x+1)+\ln(x-1)$ $\quad D(g)=(1,+\infty)$

定义域不同,所以 $y=\ln(x^2-1)$ 与 $y=\ln(x+1)+\ln(x-1)$ 不相同.

2. 求下列函数的定义域,并用区间表示:

(1) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ln(5-x)$; (2) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-x}$; (3) $y=2^{\frac{1}{x}}+\arcsin\ln\sqrt{1-x}$;

(4) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$; (5) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; (6) $y=\ln\sin x$; (7) $y=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\dfrac{1}{1-\ln x}$.

解 (1) $\begin{cases}x-2\geqslant0\\x-3\neq0\\5-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant2\\x\neq3\\x<5\end{cases}\Rightarrow D(f)=[2,3)\cup(3,5)$

(2) $\begin{cases}x+2\geqslant0\\|x|-x\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant-2\\x<0\end{cases}\Rightarrow D(f)=[-2,0)$

(3) $\begin{cases}x\neq0\\|\ln\sqrt{1-x}|\leqslant1\\1-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq0\\1-e^2\leqslant x\leqslant1-e^{-2}\\x<1\end{cases}\Rightarrow D(f)=[1-e^2,0)\cup(0,1-e^{-2}]$

(4) $\begin{cases}x\neq0\\\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq0\\x\geqslant1\text{ 或 }x\leqslant-1\end{cases}\Rightarrow D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

(5) $\begin{cases}1+x\neq0\\\dfrac{1-x}{1+x}\geqslant0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq-1\\-1\leqslant x\leqslant1\end{cases}\Rightarrow D(f)=(-1,1]$

(6) $\begin{cases}\sin x>0\\x\in(-\infty,+\infty)\end{cases}\Rightarrow D(f)=(2k\pi,(2k+1)\pi)\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

(7) $\begin{cases}x\neq0\\1-\ln x\neq0\\x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq0\\x\neq e\\x>0\end{cases}\Rightarrow D(f)=(0,e)\cup(e,+\infty)$