全无敌 · 经典教材配套丛书

配套 · 高教社 · 龙永红《概率论与数理统计(第三版)》

概率论与数理统计
同步辅导与习题全解

(高教社 · 龙永红 · 第三版)

秦 衍 ◎ 主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

全无敌·经典教材配套丛书

概率论与数理统计
同步辅导与习题全解

（高教社·龙永红·第三版）

秦 衍 主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步辅导与习题全解/秦衍主编. —上海：华东理工大学出版社，2015.7

(经典教材配套丛书. 全无敌)

ISBN 978-7-5628-4299-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①秦… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 128927 号

全无敌·经典教材配套丛书

概率论与数理统计同步辅导与习题全解(高教社·龙永红·第三版)

主　　编 / 秦　衍
责任编辑 / 刘　婧
责任校对 / 张　波
出版发行 / 华东理工大学出版社
地址：上海市梅陇路 130 号，200237
电话：(021)64250306(营销部)
(021)64252344(编辑室)
传真：(021)64252707
网址：press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 江苏省句容市排印厂
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 14.5
字　　数 / 342 千字
版　　次 / 2015 年 7 月第 1 版
印　　次 / 2015 年 7 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978-7-5628-4299-6
定　　价 / 32.00 元

联系我们：电子邮箱 press@ecust.edu.cn
官方微博 e.weibo.com/ecustpress
天猫旗舰店 http://hdlgdxcbs.tmall.com

前言 PREFACE

为了帮助经济类和管理类的在校学生和自学者学好“概率论与数理统计”，同时给他们备考研究生提供一份复习资料，我们编写了这本配套龙永红主编的面向21世纪课程教材《概率论与数理统计(第三版)》同步辅导书。

本书按照龙永红主编的《概率论与数理统计(第三版)》的思路编写，全书对每一章给出了大纲要求，对基本知识点进行了梳理，在典型例题解析中引入了近年来部分经典的考研真题，并对各章每一小节后面的练习题和每一章后面的习题给出了详细的解答。考虑到经管类学生和自学者学习数学过程中缺少过程指导书的困难，编者编写此书时，在选材、理论推导、文字叙述等诸多方面尽量满足其需要，并且在典型例题解析中增加了注意要点、解题思路和分析，帮助学生总结解题经验，避免常犯的错误。

本书内容丰富，思路清晰，例题典型，注重分析解题思路，揭示解题规律，引导读者思考问题，有利于培养和提高学生的学习兴趣以及分析问题和解决问题的能力。本书既可作为高等学校经济和管理类各专业本科生学习“概率论与数理统计”课程的辅导参考用书，也可供自学者和有志攻读经济和管理类硕士研究生的读者朋友们参考。

在本书的编写过程中，得到了数学系一些老师的帮助，其中林爱红、朱坤平、方民参与了最后4章的编写，感谢冯刚为本书的编写所做的工作，感谢张丹、翟丹丹的协助。

由于编者水平有限，不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2015年4月

内容提要

本书是与龙永红主编的面向21世纪课程教材《概率论与数理统计(第三版)》配套的学习辅导书，根据全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲(经济类)的要求编写而成。为了与教材保持同步，本书按原书的编排顺序逐章编写，每章包括大纲要求、本章基本内容、典型例题解析、练习题全解、习题全解等五个栏目。

本书相对于教材有一定的独立性，可作为非数学专业概率论与数理统计课程的学习参考书，也可作为考研备考的复习指导书。

目录 CONTENTS

第1章 随机事件与概率

一、大纲要求

1. 了解样本空间的概念.
2. 理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.
3. 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质.
4. 会计算古典型概率和几何型概率.
5. 掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式等.
6. 理解事件的独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算.
7. 理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

二、本章基本内容

1. 随机事件

表 1-1 随机事件

名 称	定 义	说 明
随机现象	事先无法准确预知其结果的现象	
随机现象的统计规律性	随机现象在大量重复出现时所表现出来的量的规律性	
随机试验	对随机现象的观察	一般要求满足:①相同条件下可重复试验;②试验的结果是可观察的;③每次试验的结果是事先不可预知的
样本点	随机试验的每个可能的结果,用 ω 表示	
样本空间	随机试验的所有样本点构成的集合,用 Ω 表示	
随机事件(简称事件)	随机试验的一个可观察的特征,记作 $A,B,\cdots$	可用满足相应特征的可能结果(即样本点)的集合表示
事件 A 发生	一个随机试验的结果为 ω,且 $\omega\in A$	
必然事件	在试验中一定发生的事件,用 Ω 表示	由所有样本点构成的集合
不可能事件	在试验中一定不发生的事件,用 $\varnothing$ 表示	不包含任何样本点的集合,即空集
基本事件	由一个样本点所构成的事件	

2. 事件的关系与运算

表 1-2　关系与运算

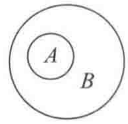
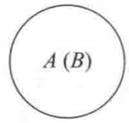
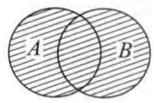
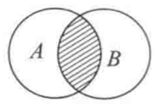
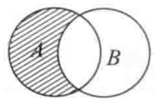
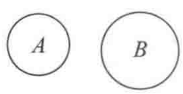
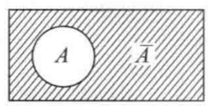
名　称	定　　义	图例和说明
事件的包含	如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$	 一般有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$
事件的相等	如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$	
事件的并(和)	“A 与 B 中至少有一个事件发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的并(和)，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$	
事件的交(积)	“A 与 B 两个事件均发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的交(积)，记作 $A\cap B$ 或 AB	
事件的差	“事件 A 发生而 B 不发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$	 $A-B=A-AB=A(\Omega-B)$
互不相容事件	若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容	
对立事件	“事件 A 不发生”这一事件称为事件 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$	 一般有 $\overline{A}=\Omega-A,\overline{\overline{A}}=A.$ 事件 A 与事件 B 互为对立事件当且仅当 (1) $AB=\varnothing$；(2) $A+B=\Omega$
完备事件组	有限个或可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，如果两两互不相容且 $\bigcup\limits_i A_i$ 为必然事件，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为一个完备事件组	$\bigcup\limits_i A_i$ 表示“有限个或可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生”这一事件，有限个也可记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$（可数个可记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$）. 类似地，$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示“有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 均发生”这一事件

表 1-3　运算律

交换律	$A\cup B=B\cup A$；　$A\cap B=B\cap A$
结合律	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
De Morgan 对偶律	$\overline{\bigcup\limits_i A_i}=\bigcap\limits_i \overline{A}_i$；　$\overline{\bigcap\limits_i A_i}=\bigcup\limits_i \overline{A}_i$

3. 随机事件的概率

表 1-4　概率

名　称	定　　义
概率的描述性定义	一个事件发生的可能性大小的度量
频率	在 n 次试验中，事件 A 发生的次数为 $r_n(A)$，称 $f_n(A)=\dfrac{r_n(A)}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的频率
概率的频率解释（统计定义）	在 n 次独立重复试验中，事件 A 发生的频率为 $f_n(A)$. 当 $n\to\infty$ 时，$f_n(A)$ 趋于一个稳定值，这个稳定值就是事件 A 在每次试验中发生的概率
概率的公理化定义	设 Ω 是样本空间，定义在 Ω 上的事件域 $\mathscr{F}$（全体事件构成的集合）上的实值函数 $P(\cdot)$ 称为 Ω 上的一个概率测度，如果它满足下列三条公理： 公理 1：$P(\Omega)=1$； 公理 2：对任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$； 公理 3：对任意可数个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

表 1-5　概率的性质

不可能事件的概率	$P(\varnothing)=0$	
非负性	$0\leqslant P(A)\leqslant 1$	
有限可加性	如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$	对任意的 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$
对立事件的概率	$P(\overline{A})=1-P(A)$	
减法公式	$P(A-B)=P(A)-P(AB)$	如果 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$
单调性	如果 $B\subset A$，则 $P(B)\leqslant P(A)$	
加法公式	$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$	

表 1-6　古典概型与几何概型

名　称	概型的假设条件	相应的概率计算公式
古典概型	(1) 随机试验只有有限个可能结果； (2) 每一个可能结果出现的可能性与所在的区域的几何测度成正比	$P(A)=\dfrac{A\text{ 中的样本点个数}}{\Omega\text{ 中的样本点个数}}$ $=\dfrac{\text{使 }A\text{ 发生的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$
几何概型	(1) 试验的样本空间 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界区域； (2) 每一个样本点出现的可能性相同	$P(A)=\dfrac{\mu(A\cap\Omega)}{\mu(\Omega)}$ 这里 $\mu(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的几何测度，当 $n=1,2,3$ 时，分别表示长度、面积和体积

4. 条件概率与事件的独立性

表 1-7　条件概率

定义	若 $P(A)>0$，称 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率
性质	(1) 满足概率的三条公理： ① $P(\Omega\mid A)=1$； ② $P(B\mid A)\geqslant 0$； ③ $A_1,A_2,\cdots$ 为一列两两互不相容的事件，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\mid A)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i\mid A)$； (2) 满足概率的其他性质(见表 1-5)

表 1-8　事件的独立性

名　称		定　义	注　意
两个事件的相互独立		若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A 与 B 相互独立	
有限个事件	两两独立	$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若其中任何两个事件均相互独立，即 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立	
	相互独立	$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若对任意 $2\leqslant k\leqslant n$ 及 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，均有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$， 则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立	相互独立一定是两两独立的，但两两独立的有限个事件不一定相互独立
可数个事件	两两独立	$A_1,A_2,\cdots$ 是可数个事件，如果其中任意两个事件均相互独立，则称 $A_1,A_2,\cdots$ 两两独立	任意两个事件
	相互独立	$A_1,A_2,\cdots$ 是可数个事件，如果其中任意有限个事件均独立，则称 $A_1,A_2,\cdots$ 相互独立	任意有限个事件

表 1-9　相互独立的性质

事件 A 与事件 B 独立的两个等价条件： (1) 若 $P(A)>0$，则 A 与 B 相互独立等价于 $P(B\|A)=P(B)$； (2) 若 $P(B)>0$，则 A 与 B 相互独立等价于 $P(A\|B)=P(A)$
任意事件与不可能事件相互独立，也与必然事件相互独立
任意两个非零概率事件，若其互不相容，则一定不独立
若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件均相互独立；特别地，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立
若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则将其中任意一个或多个事件换成相应的对立事件，新的事件组仍然相互独立
若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i)=1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$

5. 乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

表 1-10　乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

乘法公式	两个事件	若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B\|A)$
	n 个事件	若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\|A_1)P(A_3\|A_1A_2)\cdots P(A_n\|A_1A_2\cdots A_{n-1})$
全概率公式	设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则对任意事件 B，有 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$	
贝叶斯公式	设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则对任意事件 B，$P(B)>0$，有 $P(A_i\|B)=\dfrac{P(BA_i)}{P(B)}=\dfrac{P(A_i)P(B\|A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\|A_i)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$	

6. 独立试验概型

表 1-11　独立试验概型

名　称	定　义	注意
独立试验序列	如果在一系列试验中，各次试验的结果之间相互独立，则称这一系列试验为一个独立试验序列	独立
伯努利试验	只有两个可能结果的试验称为伯努利试验	两个可能结果
伯努利试验序列	独立重复进行的一系列伯努利试验称为伯努利试验序列	独立、两个结果

表 1-12　伯努利试验下的两个概率

伯努利定理	设在一次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1),q=1-p$	在 n 次独立重复试验中,“事件 A 恰好发生 k 次”的概率为 $b(k;n,p)=C_n^k p^k q^{n-k}$
等待概率		在伯努利试验序列中,“直到第 k 次试验事件 A 才首次发生”的概率为 $g(k,p)=q^{k-1}p$

三、典型例题解析

例 1　设 A,B,C 为三个事件,则“A,B,C 中至少有一个不发生”这一事件可表示为(　　).

(A) $AB+AC+BC$　　(B) $A+B+C$

(C) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$　　(D) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

分析　根据事件的并的定义,凡是出现“至少有一个”,均可由“事件的并”来表示,而事件“不发生”可由对立事件来表示,于是“A,B,C 至少有一个不发生”等价于“$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 中至少有一个发生”,故选(D).

答案　(D).

注　(1) 答案中的(A)表示“A,B,C 中至少有两个发生”,(B)表示“A,B,C 中至少有一个发生”,(C)表示“A,B,C 中恰好有两个发生”.

(2) 事件的表示往往不是唯一的,比如本例中,(D)还可表示为“恰好一个不发生或恰好两个不发生或三个都不发生”,或者“三个都发生”的对立事件等来得到相应的表示.

(3) 在学习和复习时,不要仅限于事件表示的“简单”,要多考虑同一事件的不同表示. 例如

$$A+B=A+(B-A)=A+(B-AB)=(A-B)+(B-A)+AB.$$

在实际中,特别是概率计算中,要根据问题的需要选择相应的表示方法.

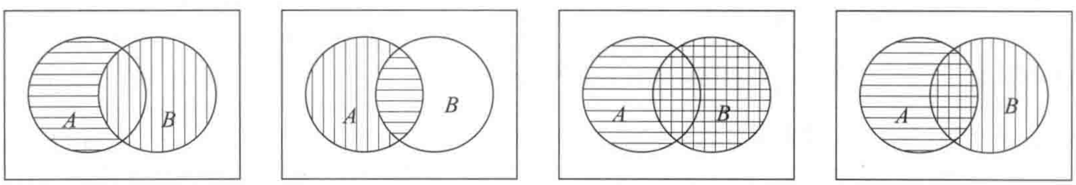
例 2　A,B 是两个事件,则下列关系正确的是(　　).

(A) $(A-B)+B=A$　　(B) $AB+(A-B)=A$

(C) $(A+B)-B=A$　　(D) $(AB+A)-B=A$

分析　集合(事件)运算与代数运算有较大的区别. 在事件运算中和、差运算不能简单地抵消,事件的结合律和交换律只有在纯粹的并运算或纯粹的交运算中成立. 不能随意去掉运算中的括号. 解决这类问题的关键在于正确理解事件运算的定义和性质,分析时可以借助于文氏图. 注意到本题的四个选项的等式右边都是 A,故分别给出四个选项左边的文氏图. 下图中横线表示选项左边的第一个事件,竖线表示选项左边的第二个事件. 可见选项(A)左边的运算结果为 $A+B$,选项(C)左边的运算结果为 $A-B$,选项(D)左边的运算结果也是 $A-B$,而选项(B)的左边实际上等于 $AB+A\overline{B}=A$,故选(B).

答案　(B).



(A)　(B)　(C)　(D)

例 3　已知 $P(B)=0.4$, $P(AB)=0.2$, $P(A\overline{B})=0.6$，则 $P(\overline{A}\,\overline{B})=$________.

分析　由于事件 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A}-\overline{A}B=\overline{B}-A\overline{B}=\Omega-(A+B)$，再根据题中已知 $P(B)$ 和 $P(A\overline{B})$，注意到 $P(\overline{B})=1-P(B)$ 以及 $A\overline{B}\subset\overline{B}$. 由此可计算 $P(\overline{B}-A\overline{B})=P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0$.

答案　0.

注　如果注意到 $A=AB+A\overline{B}$，而题设中已知 $P(AB)$ 和 $P(A\overline{B})$. 因此本题也可以先计算 $\overline{A}\,\overline{B}$ 的对立事件 $A+B$ 的概率：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，然后再计算 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

例 4　如果 $P(AB)=0$，则(　　).

(A) A 与 B 互不相容　　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容

(C) $P(A-B)=P(A)$　　(D) $P(A-B)=P(A)-P(B)$

分析　首先注意到零概率事件不一定是不可能事件，排除(A)，其次利用文氏图 1-1 和 $\overline{A}\,\overline{B}=\Omega-(A\cup B)$，因而(B)也不成立，事实上，由 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$ 立即得知(C)正确，而(D)不成立.

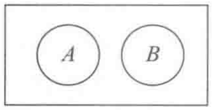


图 1-1

答案　(C).

例 5　设事件 A 与事件 B 互不相容，则(　　).

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B})=0$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A)=1-P(B)$　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

分析　因为 A,B 互不相容，所以 $P(AB)=0$.

(A)$P(\overline{A}\,\overline{B})=P\,\overline{(A\cup B)}=1-P(A\cup B)$，因为 $P(A\cup B)$ 不一定等于 1，所以(A)不正确.

(B)当 $P(A)$, $P(B)$ 不为零时，(B)不成立，故排除.

(C)只有当 A,B 互为对立事件时才成立，故排除.

(D)$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(AB)=1$，故只有(D)正确.

答案　(D)

例 6　若 A,B 为任意两个随机事件，则(　　).

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$　　(B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　　(D) $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

分析　注意到 $AB\subset A$, $AB\subset B$，根据概率的基本性质可得 $P(AB)\leqslant P(A)$ 且 $P(AB)\leqslant P(B)$，从而有 $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$，因此选(C).

答案　(C).

例 7　袋中有 a 只黑球，b 只白球，现把球一只一只摸出，求第 k 次摸出黑球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

分析　这是一个古典概型问题. 在古典概型概率的计算中常涉及样本空间中某子集所含的样本点个数的计数问题. 例如，从 n 个元素中抽取 r 个元素($1\leqslant r\leqslant n$)，问有多少种抽法，其答案与每次抽取后是否放回以及所抽到的 r 个元素是否要考虑不同次序有关. 由题目可知，这里的抽样方式是不放回抽样，如果认为总数为$(a+b)$个球中不仅区分黑白，而且黑球间有差别，白球间亦有差别，即考虑记序，那么样本空间的样本点总数可按排列数来计算，即$(a+b)!$. 现在考虑事件“第 k 次摸出黑球”的样本点数，把摸出的球按先后次序排成一行，形成如下形式

$$* * \cdots * \text{ 黑 } * \cdots * ,$$

其中第 k 个位置要求是黑球，对该位置当然可有 a 种选择，而一旦取定某黑球以后，余下的球可在$(a+b-1)$个球中仍用$(a+b-1)!$ 计算其不同排法，从而样本点数为 $a\times(a+b-1)!$现在可以按照表 1-6 的古典概型概率的计算公式计算了.

解 设事件 A 表示"第 k 次摸出黑球",则

$$P(A)=\frac{a\times(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

注 (1) 在本题的计算中,如果对总数为$(a+b)$个球仅区分黑白,而黑球之间无差别,白球之间亦无差别. 即考虑不记序,那么样本空间的样本点总数必须按组合数来计算,选择 a 个位置放置黑球,即 C_{a+b}^{a},而事件"第 k 次摸出黑球"的样本点数,则先要求第 k 个位置是黑球,再在余下的$(a+b-1)$个位置中选择$(a-1)$个位置放置黑球,即 C_{a+b-1}^{a-1},用古典概型概率的计算公式计算,得到同样的结果.

(2) 注意本题的答案与 k 无关,这就是说不管 k 如何,可用 $k=1$ 时的结果来计算,这结论应记住.

(3) 本题还有另外一种解法,它运用于 k 较小时的情况,下面以 $k=3$ 时情况为例加以说明,设 A_i 为第 i 次抽到黑球$(i=1,2,3)$,故所求的是 A_3 的概率,先把事件 A_3 分解为 $A_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,从而利用加法公式可有 $P(A_3)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$. 由于涉及不放回抽样,故独立性在此不适用,从而对交事件概率要用条件概率计算. 例如,$P(A_1A_2A_3)=P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)=\dfrac{a-2}{a+b-2}\times\dfrac{a-1}{a+b-1}\times\dfrac{a}{a+b}$,类似可得另外三式,把它们相加可得概率为$\dfrac{a}{a+b}$.

例 8 某城有 N 辆车,车牌号从 1 到 N,某观察员在某地把所遇到的 n 辆车的车牌号抄下(可能重复抄到车牌号),抄到的最大车牌号正好为 k 的概率$(1\leqslant k\leqslant N)$是多少?

分析 本题仍是古典概型,由于可重复抄到同一车牌号,故属于有放回抽样而且记序. 因此本题的概率计算中,样本空间的样本点总数可用 N^n 计算. 为计算事件"抄到的最大车牌号正好为 k"的样本点数,我们用$(A-B)$方法化简之,抄到的最大车牌号正好为 k 的事件概率等于抄下的车牌号不超过 k 的事件概率减去抄下车牌号不超过$(k-1)$的事件概率,"抄下的车牌号不超过 k"可理解为从车牌号为 1 到 k 的车中去抄号,故该事件的样本点数仍可用 k^n 计算.

解 设 A 为抄下的车牌号不超过 k,B 为抄下车牌号不超过$(k-1)$的事件. 从而所求概率为

$$P(A-B)=P(A)-P(B)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}.$$

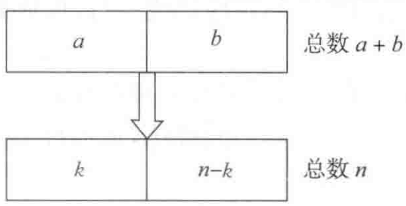
例 9 (超几何分布) 一批产品共有$(a+b)$个,其中 a 个正品,b 个次品. 今采用不放回抽样 n 次,抽到的 n 个产品里恰有 k 个是正品的概率是多少?

分析 本题还是古典概型,由于采用不放回不记序抽样,故样本空间的样本点总数为 C_{a+b}^{n},在计算事件"抽到的 n 个产品里恰有 k 个是正品"的样本点数时不需涉及正品、次品的位置,仅与正品、次品的样本数有关,故样本点数为 $C_a^kC_b^{n-k}$.

解 设事件 A 表示"抽到的 n 个产品里恰有 k 个是正品",则

$$P(A)=\frac{C_a^kC_b^{n-k}}{C_{a+b}^{n}},\quad k=1,2,\cdots,\min(n,a).$$

注 上述公式对应的随机变量常称为服从超几何分布,上述公式有时也可简记为"正抽正,次抽次,全体抽总数". 用图表示为



这种表示有利于不同形式下的概率公式的记忆. 例如，若记 $a+b=N$，则

$$P(A)=\frac{C_a^k C_{N-a}^{n-k}}{C_N^n},\quad k=1,2,\cdots,\min(n,a).$$

例 10　从[0,1]中随机取两个数，求两数之和小于 $\frac{6}{5}$ 的概率.

分析　如果从[0,1]中取出的两个数视为平面上的坐标，根据题意，它等可能取正方形区域 $[0,1]\times[0,1]$ 上的点，故本题属几何概型.

解　设 x，y 表示从[0,1]中取出的两个数，考虑二维平面集合 $\Omega=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$，此时相应的几何度量应为正方形的面积，$L(\Omega)=1$. 设事件 A 表示"两数之和小于 $\frac{6}{5}$"，则 A 为 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$x+y<\frac{6}{5}$ 的交集(见图 1-2)，所以由几何概率公式

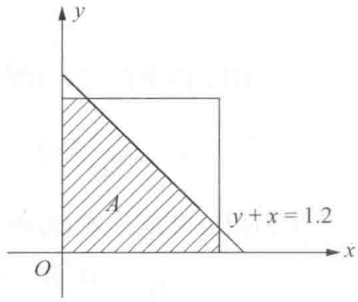


图 1-2

$$P(A)=\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\right)\Big/1=\frac{17}{25}.$$

例 11　设 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，且 $P(A|B)\geqslant P(A)$，则下列结论中不成立的是(　　).

(A) $P(B|A)\geqslant P(B)$　　(B) $P(A|\overline{B})\leqslant P(A)$

(C) $P(\overline{A}|\overline{B})\geqslant P(\overline{A})$　　(D) $P(\overline{A}|B)\leqslant P(\overline{A})$

分析　由题设 $P(A|B)\geqslant P(A)$，有 $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$. 从而 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\geqslant P(B)$，即(A)成立，又由 $P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\overline{B})}\leqslant\frac{P(A)-P(A)P(B)}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)P(\overline{B})}{P(\overline{B})}=P(A)$，知(B)成立. 由 $P(\overline{A}|\overline{B})+P(A|\overline{B})=1$，$P(A)+P(\overline{A})=1$，故 $P(\overline{A}|\overline{B})=1-P(A|\overline{B})\geqslant 1-P(A)=P(\overline{A})$，导出(C)成立，从而只有(D)不成立.

答案　(D).

例 12　设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|\overline{C})=$_____.

分析　由于 A,C 互不相容，故 $P(AC)=0$，再利用概率性质由 $ABC\subset AC$ 可得 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AC)=0$，故 $P(ABC)=0$，于是有

$$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=P(AB)=\frac{1}{2},$$

根据条件概率的定义，得到

$$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{3}{4}.$$

答案　$\frac{3}{4}$.

例 13　玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0,1,2 只残次品的概率分别为 0.8,0.1,0.1. 顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时售货员随意取一箱，而顾客随机查看该箱中 4 只玻璃杯，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回. 试求：

(1) 顾客买下该箱的概率 α；

(2) 在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 β.

分析 在问题(1)中,顾客买下一箱玻璃杯,意味着顾客随机查看的 4 只玻璃杯无残次,这依赖于箱含残次品的个数,因而要用全概率公式,其中在箱中有 i 只残次品条件下,顾客买下该箱玻璃杯(取到的 4 只玻璃杯都无残次品)的概率可参照例 7 的方法计算. 而问题(2) 讨论的是在顾客买下一箱的条件下,该箱玻璃杯确实没有残次品的概率,故用贝叶斯公式.

解 设事件 $A=\{$顾客买下该箱$\}$, $B_i=\{$箱子中有 i 只残次品$\}$,$i=0,1,2$. 由题意 $P(B_0)=0.8$, $P(B_1)=P(B_2)=0.1$, 又

$$P(A|B_i)=\frac{C_{20-i}^4}{C_{20}^4}\quad(i=0,1,2).$$

(1) 利用全概率公式,可得

$$\alpha=P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=0.8\times1+0.1\times\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+0.1\times\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=0.943\ 16.$$

(2) 利用贝叶斯公式,可得

$$\beta=P(C|A)=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\frac{0.8\times1}{P(A)}=0.848\ 21.$$

例 14 设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(B)=0.5$,$P(A-B)=0.3$,则 $P(B-A)=($ $)$.

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

分析 因为随机事件 A 与 B 相互独立,所以随机事件 A 与$\overline{B}$相互独立,利用题中的已知条件知,

$$0.3=P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.5P(A),$$

解得 $P(A)=0.6$. 于是

$$P(B-A)=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=(1-0.6)\times0.5=0.2.$$

即(B)是正确的.

答案 (B).

例 15 将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$,$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$,$A_4=\{$正面出现两次$\}$,则事件( ).

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立 (B) A_2,A_3,A_4 相互独立

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立 (D) A_2,A_3,A_4 两两独立

分析 根据题意,$P(A_1)=\frac{1}{2}$,$P(A_2)=\frac{1}{2}$,$P(A_3)=\frac{1}{2}$,$P(A_4)=\frac{1}{4}$,$P(A_1A_2)=\frac{1}{4}$,$P(A_1A_3)=\frac{1}{4}$,$P(A_2A_3)=\frac{1}{4}$,$P(A_2A_4)=\frac{1}{4}$ 和 $P(A_1A_2A_3)=0$,由于 $P(A_1A_2A_3)=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$,故排除(A);由于 $P(A_2A_4)=\frac{1}{4}\neq P(A_2)P(A_4)$,故排除了(B),(D);又由于 $P(A_1A_2)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_2)$,$P(A_1A_3)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_3)$,$P(A_2A_3)=\frac{1}{4}=P(A_2)P(A_3)$,故 A_1,A_2,A_3 两两独立,即(C)是正确的.

答案 (C)

例 16 射手对目标独立地射击三次,每次射击的命中率均为 $p(0<p<1)$,求目标被击中的概率.

分析 这个问题有多种方法求解. 其关键在于将要求其概率的事件分解成一些简单事件或已知概率值的事件之并或交,由于分解式不唯一,所以解法也不唯一. 在下面的方法中,后两种方法比较简单,而前三种方法对于每次射击的命中率不相同时也适用. 解题的关键在于事件的分解要