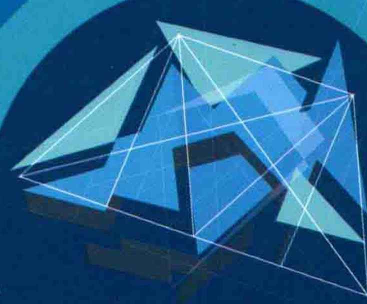
国家高职骨干院校重点专业建设教材

经济应用数学

张　毅　邵文凯　阮杰昌　主编



科学出版社

国家高职骨干院校重点专业建设教材

经济应用数学

主编　张　毅　邵文凯　阮杰昌

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书按照最新的职业教育理论要求，在打破传统的教材编排体系的基础上，遵从学科的知识逻辑编写而成. 本书由十个教学情景构成，其先后顺序就是学习微积分的知识递进，每一学习情景列出学习目标和学习方法，有利于学生自学；以实际背景引入数学概念，有利于学生体会数学思想来源于生活与生产实际这一概念，既解决了专业和生活中常见的计算问题，又照顾了数学学科循序渐进的知识逻辑体系。

本书可作为高职高专物流、经济管理及相关专业学生的教材用书，也可作为其他相关专业数学教育工作者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/张毅，邵文凯，阮杰昌主编. —北京：科学出版社，2015
国家高职骨干院校重点专业建设教材

ISBN 978-7-03-042910-0

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①张… ②邵… ③阮… Ⅲ. ①经济数学-高等职业学校-教材
Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 000502 号

责任编辑：李淑丽/责任校对：胡小洁
责任印制：霍　兵/封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2015 年 1 月第　一　版　　开本：787×1092 1/16
2015 年 1 月第一次印刷　　印张：11
字数：260 000
定价：24.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书以《国务院关于加快发展现代职业教育的决定》(国发[2014]19号)的具体内涵作为指导思想，遵从“坚持以立德树人为根本，以服务发展为宗旨，以促进就业为导向”的原则，以提高职业技能和培养职业精神高度融合为目的，结合编者多年教学实践经验与兄弟院校的先进做法编写而成，具有以下四个特点.

(1)既打破传统的教材编排体系，又遵从学科的知识逻辑. 本书由十个教学情景经过设计构成，十个情景的先后顺序就是学习微积分的知识递进，既解决了物流、经济管理专业和生活中常见的计算问题，又照顾了数学学科循序渐进的知识逻辑体系.

(2)编排结构科学合理，体现以学生为主体的思想. 每一学习情景列出学习目标和学习方法，利于学生自学；以实际背景引入数学概念，利于学生体会数学思想来源于生活与生产实际.

(3)与传授知识相比较，更注重综合能力的培养. 学生在系统获得知识的同时，也能比较系统地提高能力，体现知识教学与能力训练的统一；重视培养学生运用数学的意识，通过典型例题，将多种计算方法列出，择优而取，使学生既能牢固掌握知识，又能学到探求知识的思想方法和手段.

(4)强调理论联系实际，增强应用性. 让学生意识到“数学就在身边”“专业知识的分析必须靠数学”，力图做到语言流畅、简练，便于学生在做中学.

本书由张毅、邵文凯、阮杰昌任主编，李应、任建英、王晓平任副主编，张德刚、何向婷、李琰、周雪艳、刘少雄、龚书、聂跃波等参加编写. 在全书的编辑出版过程中，借鉴了兄弟院校的先进教学理念和科学的实际案例，得到了科学出版社和责任编辑的大力帮助与支持，收获了许多宝贵的意见和建议，在此一并致谢.

鉴于编者水平有限，书中难免出现一些不妥之处，敬请读者与同行批评指正.

编　者

2014年7月

目　录

学习情景一　常见经济函数

第一部分　学习任务分解

学习领域	数学核心能力应用
学习目标	1. 理解函数的概念和性质； 2. 掌握极限的概念和运算； 3. 理解成本函数、收入函数及利润函数的概念； 4. 掌握成本函数、收入函数及利润函数的关系及计算方法； 5. 理解供给函数与需求函数的概念； 6. 了解市场均衡的意义； 7. 掌握利息的不同算法
学习重点	1. 掌握成本函数、收入函数及利润函数的计算方法； 2. 掌握利息的各种算法
学习难点	1. 数学知识和实际问题的结合； 2. 建立数学模型； 3. 连续复利的公式推导
学习思路	函数基础—极限运算—了解经济函数的概念—掌握各函数的特性—挖掘各函数的联系—建立模型计算相关经济问题—掌握利息的算法—巩固练习—小结
数学工具	函数、极限
教学方法	讲授法、案例教学、启发式
学时安排	建议学时 12～16

第二部分　情 景 学 习

在社会经济活动中，存在着许多经济变量，如成本、收益、利润等. 下面介绍一些常见的经济函数.

1　总成本函数、总收入函数、总利润函数

产品成本是以货币形式表现的企业生产和销售产品的全部费用支出，成本函数表示费用总额与产量(或销售量)之间的依赖关系，产品成本可分为固定成本和变动成本两部分. 其中固定成本 F 指在一定时期内不随产量变动而支出的费用，如厂房、设备的固定费用和管理费用等；可变成本 V 是指随产品产量变动而变动的支出费用，如税收、原材料、电力燃料等. 一般地，以货币计值的(总)成本 C 是产量 x 的函数，即

$$C = C(x)(x \geqslant 0).$$

称为**(总)成本函数**. 当产量 $x=0$ 时,对应的成本函数值 $C(0)$ 就是产品的固定成本值. 固定成本和可变成本是相对于某一过程而言的. 在短期生产中,固定成本是不变的,可变成本是产量 x 的函数,所以 $C(x)=F+V(x)$, 在长期生产中,支出都是可变成本,此时 $F=0$. 实际应用中,产量 x 为正数,所以总成本函数是产量 x 的单调增加函数,常用以下初等函数来表示:

(1)线性函数　$C=a+bx$, 其中 $b>0$ 为常数;

(2)二次函数　$C=a+bx+cx^2$, 其中 $c>0,b<0$ 为常数;

(3)指数函数　$C=be^{ax}$, 其中 $a,b>0$ 为常数.

成本函数是单调增加函数,其图像称为**成本曲线**.

设 $C(x)$ 为成本函数,称 $\overline{C}=\dfrac{C(x)}{x}(x>0)$ 为单位成本函数或**平均成本函数**.

例 1　某工厂生产某产品,每日最多生产 100 个单位. 日固定成本为 130 元,生产每一个单位产品的可变成本为 6 元,求该厂每日的总成本函数及平均单位成本函数.

解　设每日的总成本函数为 C, 平均单位成本函数为 $\overline{C}$. 因为总成本为固定成本与可变成本之和,据题意有

$$C=C(x)=130+6x(0\leqslant x\leqslant 100),$$

$$\overline{C}=\overline{C}(x)=\frac{130}{x}+6(0<x\leqslant 100).$$

总收益函数是指生产者出售一定产品数量(x)所得到的全部收入,常用 R 表示,即

$$R=R(x).$$

其中, x 为销售量. 显然, $R|_{Q=0}=R(0)=0$, 即未出售商品时,总收益为 0. 若已知需求函数 $Q=Q(p)$, 则总收益为 $R=R(Q)=P\cdot Q=Q^{-1}(p)\cdot Q$, 平均收益为 $\overline{R}=\dfrac{R(x)}{x}$, 若单位产品的销售价格为 p, 则 $R=p\cdot x$, 且 $\overline{R}=p$.

总利润函数是指生产中获得的纯收入,为总收益与总成本之差,常用 L 表示,即

$$L(x)=R(x)-C(x).$$

例 2　设某商店以每件 a 元的价格出售商品,若顾客一次购买 50 件以上,则超出部分每件优惠 10%,试将一次成交的销售收入 R 表示为销售量 x 的函数.

解　由题意,一次售出 50 件以内的收入为 $R=ax$ 元,而售出 50 件以上的收入为

$$R=50a+(x-50)\cdot a\cdot 90\%.$$

所以一次成交的销售收入 R 是销售量 x 的分段函数

$$R=\begin{cases}ax, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 50a+0.9a(x-50), & x>50.\end{cases}$$

2　需求函数与供给函数

需求量指的是在一定时间内,消费者对某商品愿意而且有支付能力购买的商品数量.

经济活动的主要目的在于满足人们的需求,经济理论的主要任务之一就是分析消费及由此产生的需求. 但需求量不等于实际购买量,消费者对商品的需求受多种因素影响. 例如,季节、收入、人口分布、价格等. 其中影响的主要因素是商品的价格,所以,经常将需求量 Q_d 看作价格 p 的函数,记为

$$Q_d = Q_d(p).$$

通常假设需求函数是单调减少的，需求函数的反函数

$$p = Q^{-1}(p)(Q \geqslant 0).$$

在经济学中也称为需求函数，有时称为价格函数.

一般来说，降价使需求量增加，价格上涨需求量反而会减少，即需求函数是价格 p 的单调减少函数. 常用以下简单的初等函数来表示：

(1)线性函数　$Q_d = -ap + b$，其中 $a,b > 0$ 为常数；

(2)指数函数　$Q_d = ae^{-bp}$，其中 $a,b > 0$ 为常数；

(3)幂函数　$Q_d = bp^{-a}$，其中 $a,b > 0$ 为常数.

例 3　设某商品的需求函数是线性函数 $Q = -ap + b$，其中 $a,b > 0$ 为常数，求 $p = 0$ 时的需求量和 $Q = 0$ 时的价格.

解　当 $p = 0$ 时，$Q = b$，表示价格为零时，消费者对某商品的需求量为 b，这也是市场对该商品的饱和需求量. 当 $Q = 0$ 时，$p = \dfrac{b}{a}$ 为最大销售价格，表示价格上涨到 $\dfrac{b}{a}$ 时，无人愿意购买该产品.

供给量是指在一定时期内生产者愿意生产并可向市场提供出售的商品量，供给价格是指生产者为提供一定量商品愿意接受的价格，将供给量 Q_s 也看成价格 p 的函数，记为

$$Q_s = Q_s(p).$$

一般来说，价格上涨刺激生产者向市场提供更多的商品，使供给量增加，价格下跌使供给量减少，即供给函数是价格(p)的单调增加函数. 常用以下简单的初等函数来表示：

(1)线性函数：$Q_s = ap + b$，其中 $a > 0$ 为常数；

(2)指数函数：$Q_s = ae^{bp}$，其中 $a,b > 0$ 为常数，供给量也受多种因素影响；

(3)幂函数：$Q_s = bp^{a}$，其中 $a,b > 0$ 为常数.

当市场上需求量 Q_d 与供给量 Q_s 一致时，即 $Q_d = Q_s$，商品的数量称为**均衡数量**，记为 Q_e，商品的价格称为**均衡价格**，记为 p_e. 例如，由线性需求和供给函数构成的**市场均衡**模型可以写成

$$\begin{cases} Q_d = a - bP(a > 0, b > 0), \\ Q_s = -c + dP(c > 0, d > 0), \\ Q_d = Q_s. \end{cases}$$

解方程，可得均衡价格 p_e 和均衡数量 Q_e

$$p_e = \frac{a + c}{b + d}, \qquad Q_e = \frac{ad - bc}{b + d}.$$

由于 $Q_e > 0$，$b + d > 0$，因此有 $ad > bc$.

当市场价格高于 p_0 时，需求量减少而供给量增加，反之，当市场价格低于 p_0 时，需求量增加而供给量减少. 市场价格的调节就是利用供需均衡来实现的.

经济学中常见的还有生产函数(生产中的投入与产出关系)、消费函数(国民消费总额与国民生产总值即国民收入之间的关系)、投资函数(投资与银行利率之间的关系)等.

例 4　已知某商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q_d = 14 - 1.5p,\quad Q_s = -5 + 4p,$$

求该商品的均衡价格.

解　由均衡条件 $Q_d = Q_s$ 可知

$$14 - 1.5p = -5 + 4p,$$
$$19 = 5.5p,$$

所以均衡价格为 $p_0 = 3.45$.

例 5　已知某产品的价格为 p(元),需求函数为 $Q = 50 - 5p$,成本函数为 $C = 50 + 2Q$(元),求产量 Q 为多少时利润 L 最大? 最大利润是多少?

解　因为需求函数为 $Q = 50 - 5p$,$p = 10 - \frac{Q}{5}$,所以收益函数为

$$R = p \cdot Q = 10Q - \frac{Q^2}{5}.$$

利润函数

$$L = R - C = 8Q - \frac{Q^2}{5} - 50$$
$$= -\frac{1}{5}(Q - 20)^2 + 30.$$

因此,$Q = 20$ 时利润最大,且最大利润是 30 元.

3　基本初等函数

对经济问题的研究过程中,一个变量往往与多种因素相关,当用数学方法研究变量间的关系时,经常是找出其中的主要因素,忽略其他次要变量,使问题转化为一个自变量的函数关系. 为此具体介绍一下函数的一些基本理论.

定义 1　常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

3.1　常数函数

$y = C$ (C 为任意实数).

定义域: $(-\infty, +\infty)$;

图像:与 x 轴平行或重合(图 1-1);

性质:有界,偶函数,没有最小正周期的周期函数.

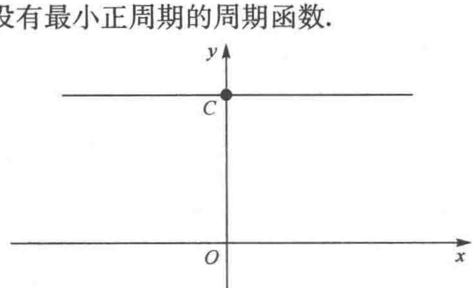


图 1-1

3.2　幂函数

$y = x^{\mu}$（μ 任意实数）.

定义域：随 μ 取值而异；

性质：$x > 0$ 的情形，当 $\mu > 0$ 时，$y = x^{\mu}$ 是增函数且无界（图 1-2）；当 $\mu < 0$ 时，$y = x^{\mu}$ 是减函数且无界.

3.3　指数函数

$y = a^{x}$（$a > 0, a \neq 1$）.

定义域：$(-\infty, +\infty)$；

图像：过点 $(0,1)$，恒在 x 轴的上方（图 1-3）；

性质：当 $0 < a < 1$ 时，$y = a^{x}$ 是减函数且无界；当 $a > 1$ 时，$y = a^{x}$ 是增函数且无界.

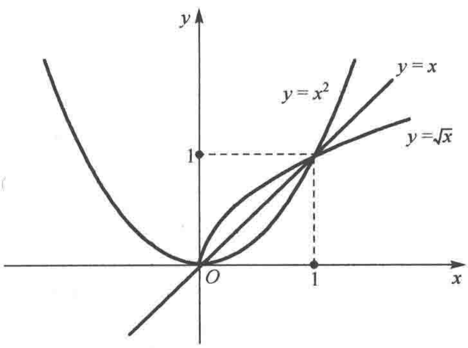


图 1-2

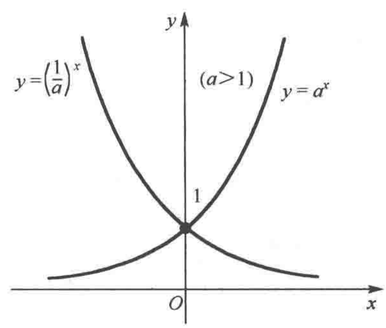


图 1-3

其中最为常用的以无理数 $e = 2.7182818\cdots$ 为底数的指数函数是 $y = e^{x}$.

3.4　对数函数

$y = \log_a x$（$a > 0, a \neq 1$）.

定义域：$(0, +\infty)$；

图像：过点 $(1,0)$，恒在 y 轴的右方（图 1-4）；

性质：当 $0 < a < 1$ 时，$y = \log_a x$ 单调递减且无界；当 $a > 1$ 时，$y = \log_a x$ 单调递增且无界.

注意　指数函数与对数函数互为反函数，它们的图像关于 $y = x$ 对称.

以无理数 $e = 2.7182818\cdots$ 为底的对数函数称为自然对数函数，记为 $y = \ln x$.

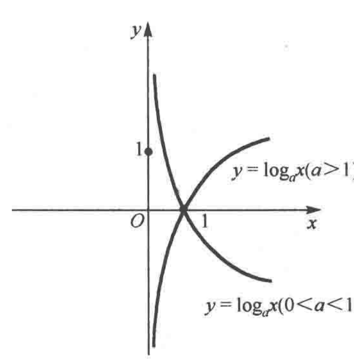


图 1-4

3.5　三角函数

$y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$，$y = \sec x$，$y = \csc x$.

(1)正弦函数 $y = \sin x$，定义域：$(-\infty, +\infty)$，值域：$[-1, +1]$，如图 1-5 所示；性质:有界,奇函数,最小正周期为 2π.

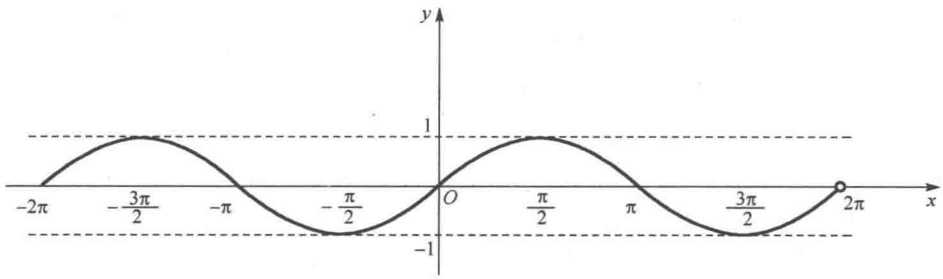


图 1-5

(2)余弦函数 $y = \cos x$，定义域：$(-\infty, +\infty)$，值域：$[-1, +1]$，如图 1-6 所示；性质:有界,偶函数,最小正周期为 2π.

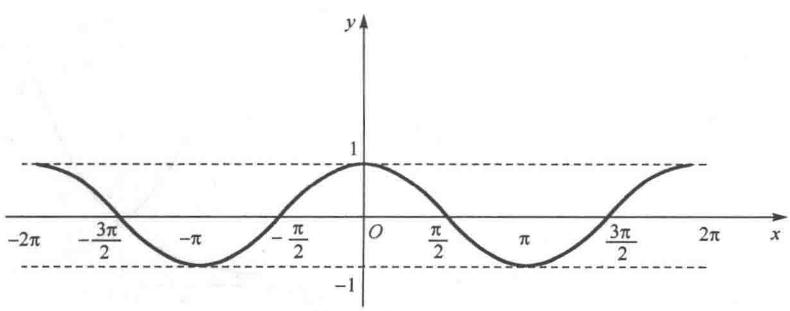


图 1-6

(3)正切函数 $y = \tan x$，定义域：$\left\{x \middle| x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$，如图 1-7 所示；

性质:无界,奇函数,单调递增,最小正周期为 π.

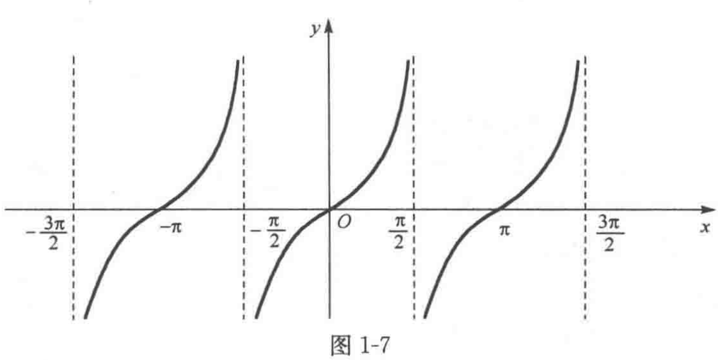


图 1-7

3.6　反三角函数

$y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \operatorname{arccot} x$.

定义域：$y = \arcsin x$ 和 $y = \arccos x$ 的定义域为 $[-1, 1]$，$y = \arctan x$ 和 $y = \operatorname{arccot} x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

性质:有界.

4　复合函数

定义 2　设 y 是 u 的函数: $y=f(u)$,而 u 是 x 的函数: $u=\varphi(x)$,若 $\varphi(x)$ 的函数值全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内,称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,简称复合函数,其中 u 称为中间变量, $f(u)$ 称为外层函数, $\varphi(x)$ 称为内层函数.

例 6　已知 $y=\mathrm{e}^u, u=\sin x$,试把 y 表示为 x 的复合函数.

解　$y=\mathrm{e}^u=\mathrm{e}^{\sin x}, x\in\mathbf{R}$.

例 7　设 $y=f(u)=\tan u, u=\varphi(x)=x^2-1$,求 $f[\varphi(x)]$.

解　$f[\varphi(x)]=\tan(x^2-1)$.

例 8　指出函数的复合过程,并求出其定义域:

(1) $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$;　　(2) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$.

解　(1) $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$ 是由 $y=u^2, u=\arcsin v, v=\dfrac{1}{x}$ 这三个函数复合成的.要使 $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$ 有意义,只需 $\arcsin\dfrac{1}{x}$ 有意义,应 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$,即 $|x|\geqslant 1$,因此 $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(2) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=x^2-3x+2$ 两个函数复合成的,要使 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 有意义,只需 $x^2-3x+2\geqslant 0$,解此不等式,得 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域为 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

例 9　将函数 $y=\sqrt{\ln\sin^2 x}$ 分解成基本初等函数的复合.

解　$y=\sqrt{\ln\sin^2 x}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=w^2, w=\sin x$ 四个函数复合成的.

注意　(1)并不是任意两个函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 都可以复合成一个函数,关键在于外层函数 $y=f(u)$ 的定义域与内层函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集是否为空集,若其交集非空,则这两个函数就可以复合,否则就不能复合.例如, $y=\sqrt{u}$ 及 $u=-2-x^2$ 就不能复合成一个复合函数.因为 $u=-2-x^2$ 的值域为 $(-\infty,-2]$,不包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0,+\infty)$ 内,所以不能复合.

(2)分析一个复合函数的复合过程,每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式(即简单函数).

(3)复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成,更多的是由基本初等函数经过四则运算构成的简单函数复合而成,因此,当分解到常数与其他基本初等函数的四则运算式(简单函数)时,就不再分解了.

5　初等函数

定义 3　由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合所构成的,并可以用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如，$y=1+\sin^3 x$，$y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$，$y=\lg\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$ 等都是初等函数. 而

$y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 2x-1, & x<0\end{cases}$ 不是初等函数.

初等函数的基本特征:在函数的定义区间内,初等函数的图形是不间断的,且能用一个式子表示,但电学中单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ 取整函数 $y=[x]$ 均不是初等函数,而 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是初等函数,因为它可以用复合函数 $y=\sqrt{x^2}$ 表示.

6　函数的极限

极限是研究变量的变化趋势的基本工具,大学数学中的许多基本概念都是建立在极限的基础上,极限方法也是研究函数的一种最基本的方法.

6.1　当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

例 10　考察当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势.

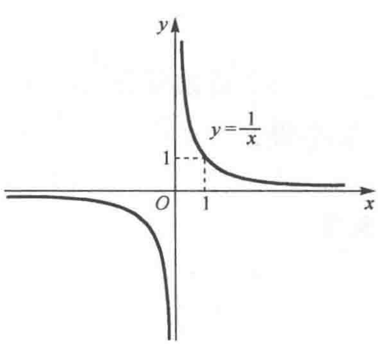


图 1-8

由图 1-8 可以看出,曲线 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 沿 x 轴的正向和负向无限延伸时,都与 x 轴越来越接近,即当 x 的绝对值无限增大时, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的值无限接近于零.

定义 4　如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (\text{当 } x\to\infty \text{ 时}).$$

由定义可知,当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限为 0,可记为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

定义 5　如果当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或} \left(\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\right).$$

例 11　讨论当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)=2^x$ 有无极限.

解　函数图像如图 1-9 所示.

当 $x\to-\infty$ 时, $f(x)\to 0$;而当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)\to+\infty$,所以当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)=2^x$ 无极限.

注　(1)在无穷极限的定义中,函数 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A 是指 $|f(x)-A|$ 可以小到任意程度;

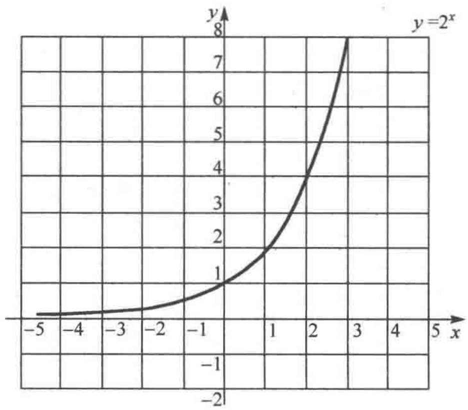


图 1-9

(2)若 $x\to\infty$时，$f(x)$ 无限接近的常数 A 不存在，则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$时的极限不存在.

定理 1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

6.2　当 $n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$的极限

6.2.1　数列的概念

如果按照某一法则，使得对任何一个正整数 n 有一个确定的数 x_n，则得到一列有次序的数

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots.$$

这一列有次序的数称为数列，记为 $\{x_n\}$，其中第 n 项 x_n 称为数列的一般项.

数列的例子：

$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}:\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots;$

$\{2^n\}:2,4,8,\cdots,2^n,\cdots;$

$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}:\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots;$

$\{(-1)^{n+1}\}:1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots.$

它们的一般项分别为：$\dfrac{n}{n+1},2^n,\dfrac{1}{2^n},(-1)^{n+1}$.

例 12　长一尺的棒子，每天截去一半，无限制地进行下去，那么剩下部分的长构成一数列：$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$，通项为 $\dfrac{1}{2^n}$.

6.2.2　数列的几何意义

数列$\{x_n\}$可以看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$.

6.2.3　数列与函数

如果数列的通项公式为 $a_n=f(n)$，则它是自变量为正整数的函数 $x_n=f(n)$. 这类函数称为整标函数. 所以数列极限就是特殊的函数极限. 数列定义域是全体正整数.

注 在数轴上,数列的每项都相应有点对应它.如果将 x_n 依次在数轴上描出点的位置,能否发现点的位置的变化趋势呢？显然,$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$,$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是无限接近于 0 的;$\{2n\}$ 是无限增大的;$\{(-1)^{n-1}\}$ 的项是在 1 与 -1 两点跳动的,不接近于某一常数;$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 无限接近常数 1.

对于数列,最重要的是研究其在变化过程中无限接近某一常数的渐趋稳定的状态,这就是常说的数列的极限问题.

6.2.4 数列极限的定义

定义 6(数列极限的描述性定义) 对于数列 $\{x_n\}$,若当 n 无限增大时(记为 $n\to\infty$),通项 x_n 无限趋近于一个确定的常数 A,则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty).$$

若 $n\to\infty$时,x_n 无限趋近的常数 A 不存在,则称数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在,或称数列 $\{x_n\}$ 发散.

例 13 观察下列数列的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $x_n=\frac{1}{n}$;　　(2) $x_n=2+\frac{(-1)^n}{n}$.

分析 (1)数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$,当 n 无限大时,一般项 $x_n=\frac{1}{n}$ 无限接近于 0,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 或 $\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$.

(2)当取 $n=1,2,3,4,\cdots$时,数列 $x_n=2+\frac{(-1)^n}{n}$ 的各项依次为 $1,\frac{5}{2},\frac{5}{3},\frac{9}{4},\cdots$,观察可知,当 n 无限增大时,$x_n=2+\frac{(-1)^n}{n}$ 无限接近于 2,所以由数列极限的定义得

$$\lim_{n\to\infty}\left[2+\frac{(-1)^n}{n}\right]=2.$$

为了深入进行研究 $\{x_n\}$ 的极限,需要用定量的方式描述 $n\to\infty$时,x_n 无限趋近的常数 A,为此要让 $|x_n-A|$ 无限地小,而且要它多小就有多小.

定义 7(数列极限的分析性定义) 若对 $\forall\varepsilon>0$(不论 ε 多么小),总存在自然数 $N>0$,使得当 $n>N$ 时都有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 是数列 x_n 的极限,或称数列 x_n 收敛于 A,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A$ ($n\to\infty$).如果数列没有极限,就说数列是发散的.

注 (1) ε 是衡量 x_n 与 A 的接近程度的,除要求为正以外,无任何限制.然而,尽管 ε 具有任意性,但一经给出,就应视为不变(由于 ε 具有任意性,所以 $\frac{\varepsilon}{2},2\varepsilon,\varepsilon^2$ 等也具有任意性,它们也可代替 ε).

(2) N 是随 ε 的变小而变大的,是 ε 的函数,即 N 是依赖于 ε 的.在解题中,N 等于多少关系不大,重要的是它的存在性,只要存在一个 N,使得当 $n>N$ 时,有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 就行了,而不必求最小的 N.

(3)数列极限定义并未给出求数列极限的方法,只是给出了论证数列 $\{x_n\}$ 的极限为 A 的方法,通常称为 ε-N 论证法,其论证步骤为:

(i)对于任意给定的正数 ε;

(ii)由 $|x_n - A| < \varepsilon$ 开始分析倒推,推出 $n > \varphi(\varepsilon)$;

(iii)取 $N \geqslant |\varphi(\varepsilon)|$,再用 $\varepsilon - N$ 语言叙述结论.

例 14　证明数列 $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$ 收敛于 1.

证　对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,要使得 $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$,只需 $n > \frac{1}{\varepsilon}$,所以取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n > N$ 时,有 $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

例 15　利用数列极限的分析性定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-n} = 1$.

分析　令 $x_n = \frac{n^2+1}{n^2-n}$,对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,因为

$$|x_n - A| = \left|\frac{n^2+1}{n^2-n} - 1\right| = \frac{n+1}{n(n-1)} < \frac{2(n-1)}{n(n-1)} < \frac{2}{n} (n > 3).$$

可知要使 $|x_n - A| \leqslant \varepsilon$,故可取 N 为任一不小于 $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ 的正整数.

证　对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$,则当 $n > N$ 时,不等式

$$\left|\frac{n^2+1}{n^2-n} - 1\right| = \frac{n+1}{n(n-1)} < \frac{2}{n} < \varepsilon$$

成立,所以有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-n} = 1.$$

6.3　当 $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 8　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的左、右近旁有定义(在点 x_0 处,函数 $f(x)$ 可以没有定义),如果当 x 无限接近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限. 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0).$$

例 16　讨论:函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$,当 $x \to 1$ 时函数值的变化趋势如何?

分析　如图 1-10 所示,虽然函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x = 1$ 处无定义,但这不是求 $x = 1$ 时函数 $f(x)$ 的函数值,而是考察当 $x \to 1$(x 无限接近于 1)时函数 $f(x)$ 的变化情况.

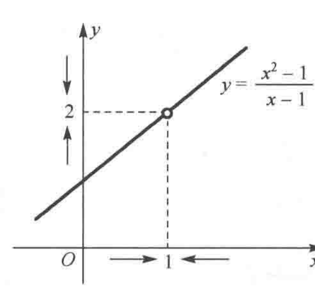


图 1-10

解　由图可知,当 $x \to 1$ 时, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 无限接近于 2,可记为 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

约定　(1) $x \to x_0^-$ 表示 x 从 x_0 的左侧无限趋向于 x_0;

(2) $x \to x_0^+$ 表示 x 从 x_0 的右侧无限趋向于 x_0;