国家理科基地教材

# 交换代数引论

（第二版）

唐忠明　编著

科学出版社

国家理科基地教材

# 交换代数引论

(第二版)

唐忠明　编著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书在第一版的基础上增加了与代数几何和组合数学相交叉的内容.

本书在本科抽象代数课程的基础上讲述了交换代数的基本的也是重要的 Hilbert 基定理、 Hilbert 零点定理、理想的准素分解、相伴素理想、维数、重复度、正则环和正规环等内容. 同时, 对应地讨论了代数集的基本性质、代数集的分解和维数、代数簇的非奇异性和正规性等. 还讨论了组合交换代数的基本内容.

本书可作为本科生或研究生的交换代数和代数几何课程的入门教材或参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

交换代数引论/唐忠明编著. —2 版.—北京: 科学出版社, 2015.5
(国家理科基地教材)

ISBN 978-7-03-044163-8

Ⅰ.交… Ⅱ.唐… Ⅲ.交换环-高等学校-教材 Ⅳ.O187.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 082020 号

责任编辑: 刘俊来 姚莉丽 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 霍 兵 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2015 年 5 月第 二 版 印张: 8 3/4
2015 年 5 月第二次印刷 字数: 207 000

**定价: 32.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 第二版前言

本书自第一版出版以来, 许多读者提出了宝贵的意见. 在这期间, 作者也一直在思考如何秉承第一版的"在最小的篇幅中展示最多的交换代数的内容"的宗旨, 在第二版中进一步完善作为交换代数教科书或教学参考书所应具备的内容. 希望本版能得到读者的认可. 正如在第一版的前言中所述, 交换代数是代数几何的基础, 同时在组合数学中有新的应用. 我们在第二版中强化了这两方面的内容, 增加了正规代数簇及与之有关的交换代数的整性的内容; 还增加了组合交换代数的基础内容. 这些内容的加入使本书作为交换代数的入门书, 内容更加全面和完整.

尽管作者做了一些努力, 但本书仍有许多不足之处, 敬请读者提出更多的宝贵意见.

唐忠明

2015 年 2 月

# 第一版前言

交换代数与代数几何的关系被类比于微积分与微分几何的关系. 现代概形上的代数几何都是以交换代数为基础的, 交换代数是学习代数几何的必经之路. 交换代数的重要性还不仅于此, 交换代数也与代数数论有着密切的联系. 当然, 交换代数作为研究交换环及其理想的理论有着自身的重要意义. 另一方面, 近年来, 因交换代数在组合数学中的应用而产生了组合交换代数, 这为交换代数带来了新的活力.

交换代数的经典之作无疑是 M.F.Atiyah 和 I.G.MacDonald 的*Introduction to Commutative Algebra* 及 H.Matsumura 的*Commutative Algebra*. 作者正是从学习这两本书进入交换代数研究领域的. 在编写本书时, 作者试图处理好两个问题：一是怎样以尽量小的篇幅讲述交换代数的基本内容, 这里需要特别注意的是如何避开或尽量少用同调代数的知识, 因为若加入同调代数的内容, 势必篇幅太长且冲淡主题; 二是怎样把交换代数的看似抽象的内容赋予几何意义, 因为交换代数中的内容在代数几何中都是有深刻的几何背景的.

作者研究交换代数多年, 根据自己对交换代数的理解, 选择编排了本书的内容. 在本科抽象代数课程内容的基础上, 补充少量的同调代数的知识, 讲述了交换代数的最基本的内容. 在讲解交换代数的概念时, 我们把代数几何中与之相关的概念对应起来讨论. 例如, 把理想的准素分解与代数集的分解相对应, 把交换环的维数与代数集的维数相对应, 把局部环的重复度与代数曲线上的点的重复度相对应. 通过这样的对比讨论, 把几何的背景引了进来, 不仅有利于对交换代数概念的理解, 而且也使读者接触了代数几何中的一些基本概念, 为进一步学习代数几何打下一点基础.

本书可作为本科生或研究生的每周 3 课时的一学期选修课的教材或参考书.

限于作者的水平，本书一定会有许多不足之处，敬请读者提出宝贵意见.

唐忠明

2009 年 2 月于苏州大学

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

# 目　录

# 预 备 知 识

下面的抽象代数的基本知识是阅读本书时所必备的.

$G$ 称为一个**群**, 如果 $G$ 是一个非空集合且 $G$ 上有一个适合结合律的代数运算 "$\cdot$" 满足: $G$ 中含有单位元, 即存在 $e \in G$, 使得对任意 $a \in G$ 都有 $a \cdot e = e \cdot a = a$, 而且 $G$ 中每个元素都有逆元, 即对任意 $a \in G$, 存在 $b \in G$, 使得 $a \cdot b = b \cdot a = e$. 运算适合交换律的群称为**Abel 群**或**交换群**, Abel 群的运算通常写成加法. 群的同态基本定理是一个十分重要的定理.

**环** $R$ 是具有加法 "$+$" 和乘法 "$\cdot$" 两个代数运算的一个非空集合且 $R$ 关于加法 "$+$" 构成一个 Abel 群, 乘法 "$\cdot$" 适合结合律且乘法对加法适合分配律. 乘法适合交换律的环称为**交换环**.

设 $F$ 是一个至少含有两个元素的有单位元的交换环, 如果 $F$ 中的每个非零元都有乘法逆元, 则称 $F$ 为一个**域**. 如果域 $F$ 没有真正的代数扩域, 等价于 $F$ 上的每个次数大于零的多项式在 $F$ 中都有一个根, 则称 $F$ 为一个**代数闭域**. 例如, 复数域 $\mathbb{C}$ 就是一个代数闭域.

交换代数中所讨论的环都是有单位元的交换环. 域 $F$ 上的一元多项式环 $F[X]$ 的性质将经常被用到.

模可以看成是环上的向量空间. 设 $R$ 是一个有单位元 1 的环, $(M, +)$ 是一个 Abel 群, 如果存在一个映射

$$\begin{aligned} R \times M &\to M, \\ (r, m) &\mapsto r \cdot m, \end{aligned}$$

使得对任意 $r, s \in R$, $m, m' \in M$ 都有

(1) $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m'$;

(2) $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$;

(3) $r \cdot (s \cdot m) = (rs) \cdot m$;

(4) $1 \cdot m = m$,

则称 $M$ 为一个 $R$ **模**, 有基的模称为**自由模**. 模的同态基本定理同样也是一个十分重要的定理 (文献 [1]).

假设 $R$ 是一个有单位元的交换环.

设 $I, J$ 是 $R$ 的理想, 令

$$I : J = \{a \in R \mid aJ \subseteq I\},$$

则 $I : J$ 是 $R$ 的一个理想, 称为**商理想**. 容易看出, 下列性质成立:

(1) $I \subseteq I : J$;

(2) $(I : J) : K = I : JK = (I : K) : J$;

(3) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} I_i\right) : J = \bigcap_{i=1}^{n} (I_i : J)$.

注意到, 若 $J$ 只是 $R$ 的一个子集, 则类似地可定义 $I : J$, 它也是 $R$ 的一个理想. 记 $I : \{a\}$ 为 $I : a$.

设 $S$ 是一个环, 当 $S$ 也是一个 $R$ 模时, 称 $S$ 为一个 $R$ **代数**. 进一步地, 如果存在有限多个元素 $a_1, \cdots, a_n \in S$, 使得对任意 $a \in S$ 都有某个 $f(X_1, \cdots, X_n) \in R[X_1, \cdots, X_n]$ 使

$$a = f(a_1, \cdots, a_n),$$

则称 $S$ 为一个有限生成的 $R$ 代数. 注意到, $S$ 是一个有限生成的 $R$ 代数当且仅当有一个下列形式的环满同态:

$$R[X_1, \cdots, X_n] \to S.$$

当 $R$ 是 $S$ 的子环时, 这也等价于存在 $a_1, \cdots, a_n \in S$ 使得 $S = R[a_1, \cdots, a_n]$.

设 $M$ 是一个 $R$ 模, 令

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \{a \in R \mid aM = 0\},$$

对任意 $m \in M$, 令

$$\mathrm{Ann}_R(m) = \{a \in R \mid am = 0\},$$

则 $\mathrm{Ann}_R(M)$ 和 $\mathrm{Ann}_R(m)$ 都是 $R$ 的理想, 分别称为 $M$ 和 $m$ 的**零化子**.

再来讨论 $R$ 的两个重要的理想 —— 小根和大根, 大根也称为 Jacobson 根. $R$ 的下列理想 $j(R)$ 称为 $R$ 的**小根**:

$$j(R) = \{a \in R \mid \text{存在某个 } n > 0 \text{ 使得 } a^n = 0\},$$

也就是说, 小根是由幂零元组成的集合.

**命题**

$$j(R) = \bigcap_{\mathfrak{p}\text{ 为 } R \text{ 的素理想}} \mathfrak{p}.$$

**证明** 设 $\mathfrak{p}$ 是 $R$ 的任意一个素理想, 则由 $a^n=0\in\mathfrak{p}$, 即得 $a\in\mathfrak{p}$, 从而 $j(R)\subseteq\mathfrak{p}$. 为证明

$$\bigcap_{\mathfrak{p}\text{ 为 }R\text{ 的素理想}}\mathfrak{p}\subseteq j(R),$$

只需对任意非幂零元 $a$, 找出素理想 $\mathfrak{p}$ 使得 $a\notin\mathfrak{p}$, 即对任意 $n>0$ 都有 $a^n\notin\mathfrak{p}$. 令

$$\mathcal{S}=\{I\mid I\text{ 为 }R\text{ 的理想且对任意 }n>0\text{ 都有 }a^n\notin I\}.$$

显然零理想 $0\in\mathcal{S}$, 故 $\mathcal{S}$ 非空. 容易验证, $\mathcal{S}$ 关于集合的包含关系所构成的偏序集满足 Zorn 引理的条件. 所以, 根据 Zorn 引理, $\mathcal{S}$ 含有极大元. 设 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个极大元, 我们来证明 $\mathfrak{p}$ 是 $R$ 的一个素理想. 用反证法, 如若不然, 则有 $\alpha,\beta\notin\mathfrak{p}$ 使 $\alpha\beta\in\mathfrak{p}$. 于是

$$\mathfrak{p}\subsetneq\mathfrak{p}+(\alpha),\quad \mathfrak{p}\subsetneq\mathfrak{p}+(\beta).$$

由 $\mathfrak{p}$ 的极大性知 $\mathfrak{p}+(\alpha),\mathfrak{p}+(\beta)\notin\mathcal{S}$, 故有 $m,n>0$ 使得 $a^n\in\mathfrak{p}+(\alpha),a^m\in\mathfrak{p}+(\beta)$, 由此即得 $a^{n+m}\in\mathfrak{p}+(\alpha\beta)=\mathfrak{p}$, 这与 $\mathfrak{p}\in\mathcal{S}$ 相矛盾. 所以 $\mathfrak{p}$ 是 $R$ 的一个素理想. 命题得证. □

对 $R$ 的任意理想 $I$, 令

$$\sqrt{I}=\{a\in R\mid\text{存在某个 }n>0\text{ 使得 }a^n\in I\},$$

称为 $I$ **的根**. 容易验证 $\sqrt{I}$ 是 $R$ 的一个理想且类似于上面的命题, 可以证明 (留作习题):

$$\sqrt{I}=\bigcap_{\mathfrak{p}\supseteq I\text{ 为 }R\text{ 的素理想}}\mathfrak{p}.$$

$R$ 的所有素理想组成的集合记为 $\mathrm{Spec}(R)$, 称为 $R$ 的**素谱**.

$R$ 的所有极大理想的交是 $R$ 的一个理想, 称为 $R$ 的 Jacobson **根**, 记为 $J(R)$. 注意到, 若 $a\in J(R)$, 则 $1-a$ 是 $R$ 中的可逆元, 这是因为, 若 $1-a$ 不可逆, 则 $1-a$ 一定属于某个极大理想 $\mathfrak{m}$, 而 $a\in\mathfrak{m}$, 因而 $1\in\mathfrak{m}$, 矛盾. 显然 $j(R)\subseteq J(R)$.

如果 $R$ 含有唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$, 则称 $R$ 为**局部环**, 记为 $(R,\mathfrak{m})$, 有时也记为 $(R,\mathfrak{m},k)$, 其中 $k=R/\mathfrak{m}$ 是一个域, 称之为 $R$ 的剩余类域. 注意到, 若 $(R,\mathfrak{m})$ 是局部环, 则 $\mathfrak{m}$ 恰由 $R$ 的所有非可逆元组成 (留作习题).

下面的两个称为引理的著名结论是很重要的.

**Nakayama 引理** 设 $M$ 是一个有限生成的 $R$ 模, $I$ 是 $R$ 的理想. 若 $I\subseteq J(R)$ 使得 $IM=M$, 则 $M=0$.

**证明** 设 $M=(m_1,\cdots,m_n)$. 不妨设 $m_1,\cdots,m_n$ 是 $M$ 的个数最少的生成元组, 即极小生成元组. 假设 $M\neq 0$, 则 $n>0$. 由 $IM=M$ 知 $m_n\in IM$, 于是

$$m_n=a_1m_1+\cdots+a_nm_n,\quad a_i\in I,i=1,\cdots,n.$$

从而 $(1-a_n)m_n = a_1m_1 + \cdots + a_{n-1}m_{n-1}$. 由于 $I \subseteq J(R)$, 故 $1-a_n$ 是可逆元, 所以 $m_n \in (m_1, \cdots, m_{n-1})$, 从而 $M = (m_1, \cdots, m_{n-1})$, 这与 $n$ 的极小性相矛盾. 所以 $M = 0$. □

**推论** 设 $M$ 是有限生成的 $R$ 模, $I \subseteq J(R)$ 是 $R$ 的一个理想, $N$ 是 $M$ 的一个子模. 如果 $M = IM + N$, 则 $M = N$.

**证明** 令 $\overline{M} = M/N$, 则由 $M = IM + N$ 得 $I\overline{M} = (IM+N)/N = \overline{M}$. 从而由 Nakayama 引理得 $\overline{M} = 0$, 故 $M = N$. □

我们知道, 若 $I_1, \cdots, I_n$ 是 $R$ 的理想, $\mathfrak{p}$ 是 $R$ 的素理想使得 $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i$, 则有 $\mathfrak{p} \supseteq I_1 \cdots I_n$, 从而存在 $k$ 使得 $\mathfrak{p} \supseteq I_k$, 于是, 若 $\mathfrak{p} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i$, 则存在 $k$ 使得 $\mathfrak{p} = I_k$. 下面的回避引理可以认为是这一结论的对偶形式.

**回避引理** 设 $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ 是 $R$ 的素理想, $I$ 是 $R$ 的一个理想. 如果

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i,$$

则存在 $k$ 使得 $I \subseteq \mathfrak{p}_k$.

**证明** 对 $n$ 用归纳法. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立.

假设 $n > 1$ 且结论对 $n-1$ 成立. 若存在 $i_1, \cdots, i_{n-1} \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 使得 $I \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} \mathfrak{p}_{i_j}$, 则由归纳假设即得结论. 下面假设对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都有 $I \not\subseteq \bigcup\limits_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$, 我们来得出矛盾. 取 $a_i \in I \setminus \bigcup\limits_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 注意到, 由 $I \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ 知 $a_i \in \mathfrak{p}_i$. 令

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n,$$

则 $a \in I$, 但是 $a \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, 这是因为对 $k = 1, \cdots, n$, 由于 $a_1 \cdots a_{k-1} a_{k+1} \cdots a_n \notin \mathfrak{p}_k$, 而对 $i \neq k$ 都有 $a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n \in \mathfrak{p}_k$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n \notin \mathfrak{p}_k$. 于是 $I \not\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, 矛盾. 引理得证. □

## 习 题

1. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个局部环, 证明 $\mathfrak{m}$ 恰由 $R$ 的所有非可逆元组成.

2. 设 $R$ 是有单位元的交换环, 假设 $R$ 的所有非可逆元组成的集合构成 $R$ 的一个理想, 证明 $R$ 是一个局部环.

3. 设 $I, J$ 是 $R$ 的理想, 证明:

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

(1) $\sqrt{\sqrt{I}}=\sqrt{I}$;

(2) $\sqrt{IJ}=\sqrt{I\cap J}=\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$;

(3) $\sqrt{I+J}=\sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$.

4. 设 $R$ 是有单位元的交换环, $I$ 是 $R$ 的一个真理想, 证明:

$$\sqrt{I}=\bigcap_{\mathfrak{p}\supseteq I\text{ 为 }R\text{ 的素理想}}\mathfrak{p}.$$

5. 设 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 证明: 对任意 $n>0$ 都有 $\sqrt{\mathfrak{p}^n}=\mathfrak{p}$.

6. 设 $I$ 是真理想, 证明: $I=\sqrt{I}$ 当且仅当 $I$ 是一些素理想的交.

7. 证明: 代数闭域一定是无限域.

8. 设 $R$ 是有单位元的交换环, $R$ 的两个理想 $I$ 和 $J$ 称为互素的, 如果 $I+J=R$, 设 $I_1,\cdots,I_n$ 是两两互素的理想, 证明:

$$I_1\cdots I_n=I_1\cap\cdots\cap I_n$$

且有同构

$$R/I_1\cdots I_n\cong R/I_1\times\cdots\times R/I_n.$$

9. 设 $M$ 是一个模, $K$ 和 $N$ 是 $M$ 的两个子模. 假设 $K+N$ 和 $K\cap N$ 都是有限生成的, 证明: $K$ 和 $N$ 也是有限生成的.

# 第 1 章　多元多项式环与代数集

代数曲线是特殊的代数集，而代数集是一些多元多项式的公共零点. 在本章中，我们先来讨论多元多项式环和代数集的基本性质. 代数曲线或一般的代数集是我们展开的交换代数理论的几何背景. 随着后面的交换代数理论的逐步深入，我们对代数曲线及一般的代数集的认识也将进一步深化.

## 1.1　多元多项式环

假设 $F$ 是一个域，$F$ 可以是实数域 $\mathbb{R}$，复数域 $\mathbb{C}$，也可以是有限域 $\mathbb{F}_q$. 令 $F[X_1,\cdots,X_n]$ 是 $F$ 上 $n$ 个不定元 $X_1,\cdots,X_n$ 的多元多项式环. 我们知道，唯一分解整环上的 (一元) 多项式环仍是唯一分解整环，由此即得 $F[X_1,\cdots,X_n]$ 是唯一分解整环. 从而 $F[X_1,\cdots,X_n]$ 中的任意一个非零多项式 $f(X_1,\cdots,X_n)$ 都可以分解成一些不可约多项式的乘积的形式：

$$f = cf_1^{r_1}\cdots f_s^{r_s},$$

其中 $c\in F$，$f_1,\cdots,f_s\in F[X_1,\cdots,X_n]$ 是互不相同的首项系数为 1 的不可约多项式，$r_1,\cdots,r_s$ 是正整数，而且，这样的表达式在相差 $f_1,\cdots,f_s$ 的顺序意义下是唯一确定的.

由于 $F[X_1,\cdots,X_n]$ 是整环，我们可以构作 $F[X_1,\cdots,X_n]$ 的分式域，$F[X_1,\cdots,X_n]$ 的分式域记为 $F(X_1,\cdots,X_n)$，于是

$$F(X_1,\cdots,X_n)=\left\{\frac{f}{g}\mid f,g\in F[X_1,\cdots,X_n],g\neq 0\right\}.$$

先来看 $F[X_1,\cdots,X_n]$ 的一些简单性质.

**命题 1.1**　对任意 $\{i_1,\cdots,i_r\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$，$(X_{i_1},\cdots,X_{i_r})$ 是 $F[X_1,\cdots,X_n]$ 的素理想.

**证明**　令 $\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{i_1,\cdots,i_r\}=\{j_1,\cdots,j_{n-r}\}$. 由于

$$F[X_1,\cdots,X_n]/(X_{i_1},\cdots,X_{i_r})\cong F[X_{j_1},\cdots,X_{j_{n-r}}]$$

是一个整环，所以 $(X_{i_1},\cdots,X_{i_r})$ 是 $F[X_1,\cdots,X_n]$ 的素理想. □

**命题 1.2** 设 $f \in F[X_1, \cdots, X_n]$ 是非零多项式, 则

$$f\text{是不可约多项式} \Leftrightarrow (f)\text{是 } F[X_1, \cdots, X_n] \text{ 的素理想}.$$

**证明** “$\Leftarrow$”假设 $f$ 是可约的, 则 $f = f_1 f_2$, 其中 $\deg(f_i) < \deg(f), i = 1, 2$. 于是 $f_1, f_2 \notin (f)$ 但 $f_1 f_2 \in (f)$, 所以 $(f)$ 不是素理想, 矛盾. 因而 $f$ 是不可约多项式.

“$\Rightarrow$”设 $g_1, g_2 \in F[X_1, \cdots, X_n]$ 使 $g_1 g_2 \in (f)$, 则 $f \mid g_1 g_2$, 而 $f$ 是不可约的, 所以 $f \mid g_1$ 或者 $f \mid g_2$, 即 $g_1 \in (f)$ 或者 $g_2 \in (f)$. 因而 $(f)$ 是素理想. □

后面还将得到 $F[X_1, \cdots, X_n]$ 的一些进一步的性质, 这些性质对研究代数曲线及一般的代数集有重要意义.

## 1.2 代数曲线

我们见过许多曲线, 有平面曲线, 也有空间曲线. 所谓代数曲线, 简单地说就是用多项式方程表示的曲线. 对 $F[X, Y]$ 中的一个多项式 $f(X, Y)$, 由方程 $f(X, Y) = 0$ 给出的曲线就是 $XY$ 平面上的代数曲线.

来看几个实平面上的代数曲线的例子.

**例 1.1** 方程 $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ 给出的代数曲线是一个半径为 1 的圆, 见图 1.1.

**例 1.2** 方程 $Y^2 - XY - X^2 Y + X^3 = 0$ 给出的代数曲线见图 1.2.

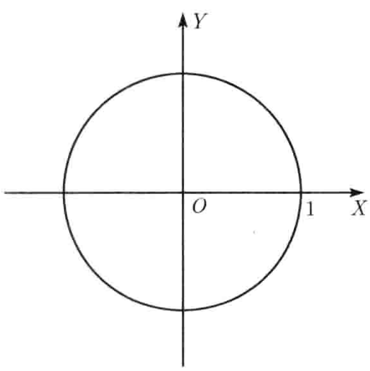


图 1.1

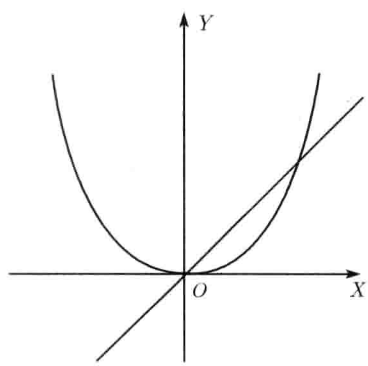


图 1.2

**例 1.3** 方程 $Y^2 - X^3 - X^2 = 0$ 给出的代数曲线见图 1.3.

**例 1.4** 方程 $(X^2 + Y^2)^2 + 3X^2 Y - Y^3 = 0$ 给出的代数曲线见图 1.4.

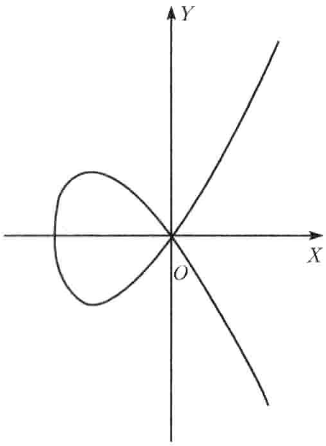


图 1.3

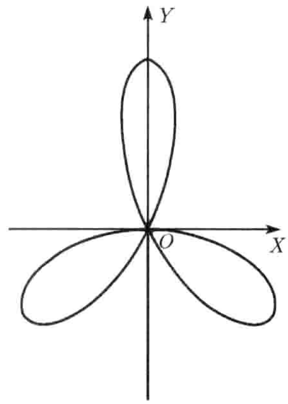


图 1.4

考察上面的代数曲线的例子, 我们发现下列几个问题值得讨论:

**问题 1**　如何分解曲线. 注意到, 例 1.2 中的曲线是两条曲线叠加起来的, 我们只要分别研究这两条曲线就可以了. 如何从曲线的定义方程来得出曲线的 (几何) 分解呢? 对例 1.2 中的具体曲线来说, 这问题是简单的, 这是因为, $Y^2 - XY - X^2Y + X^3 = (Y - X)(Y - X^2)$, 而方程 $Y - X = 0$ 给出的曲线是图中的直线, 方程 $Y - X^2 = 0$ 给出的曲线是图中的抛物线. 但是, 一般的分解问题如何解决呢?

**问题 2**　如何判别曲线在一点是否有切线, 即在这点是否非奇异或光滑的. 例如, 例 1.1 中的曲线上的每一点都是非奇异的, 而例 1.3 中的点 $(0, 0)$ 和例 1.4 中的点 $(0, 0)$ 都是奇异点, 即没有切线. 如何从曲线在某点附近的性质来判断曲线在这一点是否有切线?

**问题 3**　如何判别曲线上的奇异点的“奇异”程度. 例如, 例 1.3 中的点 $(0, 0)$ 和例 1.4 中的点 $(0, 0)$ 的奇异程度是不一样的, 因为局部地看, 例 1.3 中的点 $(0, 0)$ 是两条曲线的交点, 而例 1.4 中的点 $(0, 0)$ 是三条曲线的交点, 即它们的“重复度”是不一样的. 注意到, “重复度”是一个局部性质, 即只与这点的无穷小邻域中的曲线的形状有关. 如何从代数上来讨论“重复度”?

以上问题及其他有关问题将是本书讨论的重点, 对这些几何问题我们将采用代数的方法来讨论. 这代数理论就是交换代数, 交换代数是代数曲线及更一般的代数几何理论的基础.

## 1.3　代　数　集

在 1.2 节中, 我们看到, $XY$ 平面上由方程 $f(X, Y) = 0$ 给出的代数曲线就是

集合 $\{(a,b) \mid f(a,b)=0\}$, 即由 $f(X,Y)$ 的所有零点构成的集合. 现在, 我们来讨论一般的情形.

令 $F^n=\{(a_1,\cdots,a_n) \mid a_i \in F, i=1,\cdots,n\}$, 即 $F^n$ 是 $F$ 上的所有 $n$ 维向量构成的集合. 对任意 $f \in F[X_1,\cdots,X_n]$, 用 $V(f)$ 表示 $f$ 的所有零点构成的集合, 即

$$V(f)=\{(a_1,\cdots,a_n) \in F^n \mid f(a_1,\cdots,a_n)=0\},$$

则平面代数曲线可表示成 $V(f)$, 其中 $f \in F[X_1,X_2]$.

一般地, 设 $I$ 是 $F[X_1,\cdots,X_n]$ 的一个理想, 令

$$V(I)=\{(a_1,\cdots,a_n) \mid f(a_1,\cdots,a_n)=0, \forall\, f \in I\},$$

即 $V(I)$ 是 $I$ 中的多项式的公共零点构成的集合. 更一般地, 设 $S$ 是 $F[X_1,\cdots,X_n]$ 的一个子集, 令 $V(S)$ 是 $S$ 中的多项式的公共零点构成的集合. 易见, 若令 $I$ 是由 $S$ 生成的理想, 则 $V(S)=V(I)$.

对 $P=(a_1,\cdots,a_n) \in F^n, f \in F[X_1,\cdots,X_n]$, 令 $f(P)=f(a_1,\cdots,a_n)$.

**定义 1.1** $F^n$ 中的形如 $V(I)$ 的子集称为**代数集**, 其中 $I$ 为 $F[X_1,\cdots,X_n]$ 的理想.

**定理 1.1** 代数集具有下列性质:

(1) 若 $I \subseteq J$, 则 $V(J) \subseteq V(I)$;

(2) $V(IJ)=V(I \cap J)=V(I) \cup V(J)$;

(3) $V\left(\sum\limits_{i \in S} I_i\right)=\bigcap\limits_{i \in S} V(I_i)$;

(4) $V(F[X_1,\cdots,X_n])=\varnothing$;

(5) $V(0)=F^n$.

**证明** (1) 显然.

(2) 由 (1) 即得 $V(I) \cup V(J) \subseteq V(I \cap J) \subseteq V(IJ)$, 于是只需证明 $V(IJ) \subseteq V(I) \cup V(J)$. 设 $P \in V(IJ)$. 假设 $P \notin V(I)$, 则存在 $f \in I$ 使 $f(P) \neq 0$. 对任意 $g \in J$, 由于 $fg \in IJ$, 所以 $(fg)(P)=f(P)g(P)=0$, 而 $f(P) \neq 0$, 所以 $g(P)=0$, 从而 $P \in V(J)$. 这就证明了 $V(IJ) \subseteq V(I) \cup V(J)$.

(3) 由 (1) 即得 $V\left(\sum\limits_{i \in S} I_i\right) \subseteq \bigcap\limits_{i \in S} V(I_i)$. 另一方面, 若 $P \notin V\left(\sum\limits_{i \in S} I_i\right)$, 则存在 $f \in \sum\limits_{i \in S} I_i$ 使 $f(P) \neq 0$. 假设 $f=f_{k_1}+\cdots+f_{k_l}$, $f_{k_j} \in I_{k_j}, j=1,\cdots,l$, 则存在某个 $f_{k_j}$ 使得 $f_{k_j}(P) \neq 0$, 于是 $P \notin V(I_{k_j})$, 故 $P \notin \bigcap\limits_{i \in S} V(I_i)$. 所以 $V\left(\sum\limits_{i \in S} I_i\right)=\bigcap\limits_{i \in S} V(I_i)$.

(4) 等式成立是因为 $1 \in F[X_1, \cdots, X_n]$.

(5) 显然. □

于是, 根据拓扑的定义, 若把所有代数集 $V(I)$ 作为闭集, 则它们定义了 $F^n$ 上的一个拓扑.

**定义 1.2** $F^n$ 上由所有代数集 $V(I)$ 作为闭集所定义的拓扑称为 $F^n$ 上的 Zariski **拓扑**.

利用 Zariski 拓扑, 我们可以讨论代数集的拓扑性质. 但我们更感兴趣的是用代数方法来讨论 $V(I)$ 的几何性质. 显然, $V(I)$ 是由 $I$ 得到的, $I$ 的代数性质当然影响 $V(I)$ 的几何性质. 然而, $I$ 不一定由 $V(I)$ 所决定, 例如, 对任意 $f \in F[X_1, \cdots, X_n]$, $V(f) = V(f^2)$, 但 $(f)$ 不一定与 $(f^2)$ 相等.

$F^n$ 的代数集是由 $F[X_1, \cdots, X_n]$ 的一个理想决定的, 反过来, 它又决定了 $F[X_1, \cdots, X_n]$ 的一个理想.

**定义 1.3** 设 $V$ 是 $F^n$ 的一个代数集, 令

$$I(V) = \{f \in F[X_1, \cdots, X_n] \mid f(P) = 0, \forall\, P \in V\},$$

易见 $I(V)$ 是 $F[X_1, \cdots, X_n]$ 的一个理想, 称为 $V$ **的理想**.

注意到, 若 $W$ 是 $F^n$ 的任意一个子集, 我们也可以如上定义 $I(W)$, 易见这样的 $I(W)$ 也是 $F[X_1, \cdots, X_n]$ 的一个理想.

对应于定理 1.1, 我们可以证明如下定理.

**定理 1.2** 代数集的理想具有下列性质:

(1) 若 $V_1 \subseteq V_2$, 则 $I(V_2) \subseteq I(V_1)$;

(2) $I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2)$;

(3) $I(\varnothing) = F[X_1, \cdots, X_n]$;

(4) 若 $F$ 是无限域, 则 $I(F^n) = 0$.

**证明** (1) 显然.

(2) 由 (1) 即得 $I(V_1 \cup V_2) \subseteq I(V_1) \cap I(V_2)$. 再设 $f \in I(V_1) \cap I(V_2)$, 对任意 $P \in V_1 \cup V_2$, 则有 $P \in V_1$ 或者 $P \in V_2$. 若 $P \in V_1$, 则由 $f \in I(V_1)$ 得 $f(P) = 0$. 若 $P \in V_2$, 则由 $f \in I(V_2)$ 也得 $f(P) = 0$. 所以总有 $f(P) = 0$, 故 $f \in I(V_1 \cup V_2)$. 因而 $I(V_1) \cap I(V_2) \subseteq I(V_1 \cup V_2)$, 从而 $I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2)$.

(3) 也是显然的.

(4) 为证明 $I(F^n) = 0$, 只需证明这样一个结论: 设 $f \in F[X_1, \cdots, X_n]$, 若对所有 $P \in F^n$ 都有 $f(P) = 0$, 则 $f = 0$.

对 $n$ 用归纳法. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立, 因为非零的一元多项式只有有限多个根而 $F$ 是无限集. 再假设 $n > 1$ 且结论对 $n - 1$ 成立. 令

$$f = \sum f_i X_n^i, \quad f_i \in F[X_1, \cdots, X_{n-1}].$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com