



想象中的空间通过数学实现了!

将曲线变为直线, 将直线变为曲线的空间魔术。

观察多样化的空间, 培养数学洞察力。

4

有趣的 数学旅行

[韩] 金容国 金容云 著
杨竹君 译

空间的世界



中国城市出版社



有趣的 数学旅行

[韩]金容国 金容云 著
杨竹君 译

4

空间的世界

中国城市出版社
· 北 京 ·

北京版权局著作权合同登记

图字:01-2009-6474

图书在版编目(CIP)数据

有趣的数学旅行. 4, 空间的世界 / (韩) 金容国,
(韩) 金容云著; 杨竹君译. -- 北京: 中国城市出版社
, 2011.12 (2012.8重印)

ISBN 978-7-5074-2515-4

I. ①有… II. ①金… ②金… ③杨… III. ①空间-
普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字 (2011) 第219074号

재미있는 수학여행 4 © 2007 by Kim Young Woon, Kim Young Kuck

All rights reserved.

Translation rights arranged by Gimm-Young Publishers, Inc
through Shinwon Agency Co., Korea

Simplified Chinese Translation Copyright © 2012 by Beijing Double Spiral Culture &
Exchange Company Ltd



1 线的故事 -011

关于螺旋线 | 曲线的分类 | 关于曲率(1) | 关于曲率(2)



2 何为次元 -041

用数字表述外观 | 何为次元

从2次元到3次元 | 异面直线

超越3次元空间 | 次元的重要性

埃舍尔的画 | 全新的次元概念

次元与空间



3 五花八门的几何学 -085

直线与大圆 | 非欧几何 | 拓扑空间几何学

拓扑学 | 拓扑的意义 | 拓扑空间中的曲面

绳结的几何学 | 不动点与奇点





4 几何学与证明 -177

证明的精神 | 面对数学的 3 种视角 | 希腊人的几何学
分析以本质为前提 | 喇叭花茎的长度
证明毕达哥拉斯定理 | 证明的方法
是定理还是公理 | 直观并不是万能的
清楚明白的命题



5 东方数学与西方数学 -221

古代中国的数学 | 东方的几何学
中国人的生活数学
偶然性理论, 概率论
数学游戏 | 日本数学“和算”
传到东方的正多面体 | 西方数学的源头
东方数学与西方数学 | 韩国数学的未来





有趣的 数学旅行

[韩]金容国 金容云 著
杨竹君 译

4

空间的世界

中国城市出版社
· 北 京 ·

北京版权局著作权合同登记

图字:01-2009-6474

图书在版编目(CIP)数据

有趣的数学旅行. 4, 空间的世界 / (韩) 金容国,
(韩) 金容云著; 杨竹君译. -- 北京: 中国城市出版社
, 2011.12 (2012.8重印)

ISBN 978-7-5074-2515-4

I. ①有… II. ①金… ②金… ③杨… III. ①空间-
普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第219074号

재미있는 수학여행 4 © 2007 by Kim Young Woon, Kim Young Kuck

All rights reserved.

Translation rights arranged by Gimm-Young Publishers, Inc
through Shinwon Agency Co., Korea

Simplified Chinese Translation Copyright © 2012 by Beijing Double Spiral Culture &
Exchange Company Ltd

开始一段全新的数学旅行



韩国学生的数学分数很高，经常在国际数学大赛上获奖。但是有国际数学教育专家认为，韩国学生的学习动机和好奇心在世界上不占上风，这是无法用分数计算的。这个问题被提出后受到关注，韩国学生的创造性能力令人堪忧。

关于国家各领域创造能力，经常在诺贝尔奖上有所体现。但是，一直以掀起世界顶尖教育热潮为傲的韩国，却从来没有人摘得过诺贝尔科学奖。而犹太人中，获得诺贝尔医学、生理、物理和化学奖项的共有 119 人，诺贝尔经济学奖获奖者也超过了 20 人。这个现象和与创造性有很大关系的深度数学教育息息相关。

中国有一句古话：“授人以鱼，不如授之以渔。”有创造性的数学便起到了一个“渔具”的作用。笔者着笔写这本书，也是由衷地希望能有后来人通过阅读本书走上一条正确的数学学习之路。

之前有过很多学生对我说：“读过老师的书后，在数学方面大开眼界。”这对我来说是最大的鼓励，也是我最珍惜的。从此，我似乎感觉到身上的责任又重了一些。

本书于 1991 年初版，作于 16 年前，虽然这许多年数学的基本方向没有改变，但是数学，尤其是电脑方面的很多新知识如雨后春笋般不断为人所掌握，之前困扰着我们的一些难题也已经被解开了。因此，笔者对原版进行了修改和完善，希望阅读本书后，能有读者成为可以“驾驭渔具，垂钓大鱼”的人才。

金容云
2007 年



登山过程中，越往高处攀爬，氧气越稀薄，登山者很容易患上高山病。同样，日趋复杂的数学体系随着时间的推移，变得愈发抽象。如果是一般人，绝大部分开始接触到现代数学的时候，会像患高山病一样患上一种抽象病。

但是，无论多高的山都会有树木丛生，都会有生命存活并奔跑。即使空气稀薄的悬崖陡峭，还是会有潺潺流水，生机盎然。

之前大家在学校学到的数学，就好像高地的山峰被局部扩大，仅仅是一个夸张了的构造。如果给一个人缓缓呈现陡峭的山崖和高不可攀的山峰，他必然会心生恐惧，掉头而去。这是因为他们没有看到在那山崖之外，存在着的清澈溪水和那生机勃勃的一片景象。

笔者常看到很多学生不明这座“山”的本来面目而受到打击和挫折，不由心生遗憾。

笔者执笔此书的最大动机，是想要尽最大能力将数学的整个面貌展现出来。目前，有太多暂时只是靠将数学公式熟记于心而掌握了数学的学生，他们还无法领略数学文化的博大精深。笔者希望通过本书，帮助学生最大程度理解数学的本来面貌。

并且，本书将站在一个比较高的层次，以俯瞰的角度讲解各个阶段的意义。这样可以向读者展示很多课堂上学习不

到的重要内容和活生生的数学知识。

对于心中没有想法的人，夜空虽然神秘，也只不过是有一些星星在没有秩序地闪耀罢了。其实，每颗星星都有自己的轨道，遵循着自己在世界上起到的作用而前行。而整个宇宙，却是一个神秘的难以完全破解的谜。

数学，就是一个人工的宇宙。它可以与自然界的宇宙媲美，隐藏着无数秘密。这其中的秘密又与真实世界紧密相连，蕴藏着深深的智慧，被广泛应用。

本书既适合数学专业的学生阅读，同时也能给有着深深好奇心的数学爱好者带来乐趣。在这样一个信息化时代，人们越来越需要一个合理的思考方式，本书可以培养读者的数学素养，在这一方面带来帮助。

如若读者能从本书中对数学的真相有进一步的了解，作者也就别无所求了。

金容国 金容云

1991 年





7 线的故事 -011

关于螺旋线 | 曲线的分类 | 关于曲率(1) | 关于曲率(2)



2 何为次元 -041

用数字表述外观 | 何为次元

从2次元到3次元 | 异面直线

超越3次元空间 | 次元的重要性

埃舍尔的画 | 全新的次元概念

次元与空间



3 五花八门的几何学 -085

直线与大圆 | 非欧几何 | 拓扑空间几何学

拓扑学 | 拓扑的意义 | 拓扑空间中的曲面

绳结的几何学 | 不动点与奇点





4 几何学与证明 -177

证明的精神 | 面对数学的 3 种视角 | 希腊人的几何学
分析以本质为前提 | 喇叭花茎的长度
证明毕达哥拉斯定理 | 证明的方法
是定理还是公理 | 直观并不是万能的
清楚明白的命题



5 东方数学与西方数学 -221

古代中国的数学 | 东方的几何学
中国人的生活数学
偶然性理论, 概率论
数学游戏 | 日本数学“和算”
传到东方的正多面体 | 西方数学的源头
东方数学与西方数学 | 韩国数学的未来



1. 线的故事

为何自然界没有直线？直线和曲线的意义是什么？本章中，我们将通过学习曲率来区分各种各样的曲线（曲线的种类，曲率）。

2. 何为次元 | 3. 五花八门的几何学

曲率的定律在空间中同样适用，并且可以区别不同空间。通过这一章，我们会对非欧空间与欧氏空间的差别产生思考，并开始了解包括这些空间的拓扑空间。

从1次元到2次元，通过本章，我们会对次元的意义有更深一步的了解。次元是区分空间的数字，通过学习，我们可以了解到不同次元中的不同现象。

4. 几何学与证明

为何证明在几何学中是必须的？证明的态度为什么可以促使学问的发展？本章通过学习证明的方法，让我们对公理产生思考。

5. 东方数学与西方数学

通过本章，我们不仅可以对希腊之外地区的几何有一点了解，更可以学习到艺术和现实生活中的几何学。我们以证明方法及其适用范围为中心，来研究东方人和西方人不同的思考方式。同样处于东方文化圈，韩国人有着和日本人、中国人不太一样的思考方式。认识到韩国人的优点，并对韩国数学今后的发展进行了展望。

这本书用浅显的例子讲述了一些比较深的数学知识，同时我们也了解到次元、空间、合理的思考等都属于哲学的范畴。

1



线的故事

我们所处的这个世界是由无数种类的曲线、曲面构成的。也正因为如此，这个世界是如此的美丽并且具有对称性。

关于螺旋线

自然更倾向于曲线



生活中的房子、电线杆、高速公路、桥等等，大都被建成了直线，但是那些人类没插手建造的山谷、大海中，却鲜见直线。

无论是远方的海岸线还是地平线，或者是田野中矗立的高大树木，看似很直，仔细观察就会发现其实并不笔直。大海中的惊涛骇浪，天空中飘逸的云朵，或者一个橘子或者苹果，蜻蜓或者蝴蝶，雪花或者水滴……这些生物或者非生物的形态几乎都是由曲线构成的。你看，其实直线只是人类造出来的东西。

一般情况下，我们将曲线与直线看为一对反义词。但是曲线的种类有多种多样，而直线却只有一种。

我们所处的这个世界是由无数个种类的曲线、曲面构成的。也正因为如此，这个世界是如此的美丽并且具有对称性。13 世纪的伟大神学家、哲学家托马斯·阿奎