iCourse·教材

偏微分方程简明教程

朱长江　阮立志　编著

高等教育出版社

iCourse·教材

偏微分方程简明教程

朱长江　阮立志　编著

PIAN WEIFEN FANGCHENG JIANMING JIAOCHENG

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是国家精品资源共享课“偏微分方程”的配套教材，是作者基于多年讲授数学类专业“偏微分方程”课程讲义的基础上修改编写而成的。全书重点介绍了偏微分方程的基本理论和方法，共分七章：第一章介绍偏微分方程的基本概念和几个经典方程及定解问题的物理与力学来源；第二章介绍二阶方程的特征理论及方程的分类；第三章介绍分离变量法；第四、五、六章分别讨论双曲型、抛物型和椭圆型方程定解问题的求解方法、理论分析、适定性等，并利用所获得的解对物理现象及力学规律加以解释；第七章介绍 Fourier 变换及其应用。各章内容相对独立，自成体系，教学时可根据实际教学时数任选其中几章独立安排教学。

本书力求做到由浅入深，通俗易懂，便于教师教学和学生学习。可作为高等学校数学类专业本科生“偏微分方程”“数学物理方程”课程的教材或教学参考书，也可作为理工类本科生或研究生“数学物理方程”“数学物理方法”课程的教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

偏微分方程简明教程 / 朱长江，阮立志编著. -- 北京：高等教育出版社，2015. 6

ISBN 978-7-04-042611-[illegible]

Ⅰ. ①偏… Ⅱ. ①朱… ②阮… Ⅲ. ①偏微分方程－高等学校－教材 Ⅳ. ①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 085284 号

策划编辑 兰莹莹　　责任编辑 兰莹莹　　封面设计 杨立新　　版式设计 杜微言
插图绘制 黄建英　　责任校对 张小镝　　责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 中国农业出版社印刷厂
开　　本 787mm×960mm　1/16
印　　张 13.25
字　　数 240千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2015年6月第1版
印　　次 2015年6月第1次印刷
定　　价 22.60元

物 料 号 42611-00

前　言

精品资源共享课建设是国家精品开放课程建设项目的组成部分,旨在促进教育教学观念转变,引领教学内容和教学方法改革,推动高等学校优质课程教学资源通过现代信息技术手段共建共享,提高人才培养质量,服务学习型社会建设。我们的“偏微分方程”国家精品课程于 2013 年转型升级为国家精品资源共享课程,为更好地服务于教学改革,我们着手编写了这本配套教材。

偏微分方程作为大学教学的一门专业课程,无论是对数学类专业还是非数学类专业的理工科学生都十分重要。它的任务是通过建立数学模型(主要是以偏微分方程描述的模型),寻找求解方法,进行理论分析,从而达到解释物理现象的目的。本书主编朱长江教授连续开展该课程教学十余年,书中大部分内容曾在数学类专业的本科生和研究生专业课上讲授过多次,经过多年的教学实践和一些专家的建议,为适应目前高等学校的教学改革,推广研究型教学,我们编写了本书。

本书在编写过程中主要注意了以下几点:

1. 在介绍二阶方程的分类时,注意到其与二次曲线分类的密切联系,充分借鉴二次曲线分类的思想,阐述二阶方程的分类,使得学生理解和掌握比较容易。

2. 在介绍分离变量法时,应用实例尽可能全面,考虑的方程类型包括双曲型、抛物型和椭圆型,既有常系数也有变系数情形,既涉及一维方程,也涉及高维方程,考虑的边界条件包括 Dirichlet 边界条件、Neumann 边界条件、Robin 边界条件等。

3. 在介绍偏微分方程的其它几种常用求解方法时,如特征线法(第四章)、相似变换法(第五章)、Green 函数法(第六章)和 Fourier 变换(第七章),尽量做到在理论上讲得透彻完整,在应用上讲得深入浅出,注意了严密性与直观性的统一、科学性与可读性的统一。

4. 极值原理是学生较难掌握的内容,在写作上尽量做到由浅入深,层层推进,突出重点,分解难点。为了完整性,理论上介绍一般高维偏微分方程的极值原理。为了教与学的方便,应用以一维、二维或三维为实例,注意了一般性与特殊性的统一。

由于偏微分方程内容丰富、方法多样, 难以用统一的形式展开内容并加以讨论, 因此在学习这门课时, 必须掌握各类方程的特点, 比较求解这些方程的方法的异同, 以求融会贯通。为了便于读者理解并牢固地掌握所学内容, 在每一章中都安排了一定数量的习题。这些习题有些是正文的补充和发展, 有些则是用来训练解题方法和技巧的。本书各章内容相对独立, 自成体系, 教学时可根据实际情况, 任选几章独立安排教学。

在本书的编写过程中, 我们参阅了有关偏微分方程及数学物理方程的国内外著作及教材。如姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐编著《数学物理方程讲义》(高等教育出版社, 1996 年第二版); 陈恕行、秦铁虎编著《数学物理方程方法导引》(复旦大学出版社, 1991 年); 谷超豪、李大潜、陈恕行、郑宋穆、谭永基编著《数学物理方程》(高等教育出版社, 2002 年第二版); Walter A. Strauss 编著: *Partial Differential Equations-An Introduction* (John Wiley & Sons 出版社, 1992 年); F. John 编著 *Partial Differential Equations* (Springer-Verlag 出版社, 1982 年); Lawrence C. Evans 编著 *Partial Differential Equations* (American Mathematical Society 出版社, 1998 年) 等。这些教材中蕴含着丰富的内容与教学经验, 对于本书的编写帮助很大。在此, 我们谨向有关作者表示诚挚的谢意。我们的研究生刘青青、彭红云、尹海燕、厚晓凤、洪广益等为书稿的电脑录入及校对做了大量工作, 在此一并致谢。

由于我们的学识和教学经验所限, 本书中的缺点和错误在所难免, 诚恳地希望读者批评指正。

编 者

2014 年 11 月

与本书配套的数字课程资源使用说明

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社易课程网站，请登录网站后开始课程学习。

1. 用户注册：访问 http://abook. hep. com. cn/42611，点击“注册”，在注册页面完善用户名、密码、姓名及电子邮箱等信息后，点击“确定”完成注册。

2. 登录充值：已注册用户点击“登录”，输入用户名和密码即可进入“我的课程”界面；点击右上方“充值”图标，输入教材封底标签上的明码和密码，点击“确定”完成课程充值。

3. 课程学习：在“我的课程”列表中选择已充值的数字课程，点击“进入课程”即可开始课程学习。账号自登录之日起一年内有效，过期作废。

使用本账号如有任何问题，请发邮件至：lanyy@ hep. com. cn。

目　录

第一章　方程的导出及定解问题的提法

用数学方法研究实际问题的第一步是建立关于所考察的对象的数学模型. 自从微积分产生以后, 人们就设法把描述物理学、力学和工程技术问题中的一些规律的数学形式 (即数学模型) 归结成偏微分方程进行研究, 习惯上称之为数学物理方程. 这类方程的内容, 基本上都是一些典型而具有很强实际背景的偏微分方程. 因此, 我们说偏微分方程是一门历史悠久的学科, 在它的发展过程中, 具有紧密联系实际的特点. 由于生产和科学技术的不断发展, 不仅丰富和更新了偏微分方程的研究内容, 而且随着问题的解决, 也产生了许多新的数学方法, 从而发展了偏微分方程的理论, 同时, 也促进了偏微分方程与数学的许多分支及自然科学各学科之间的联系. 本章将在 §1 介绍偏微分方程的基本概念, 然后在 §2 和 §3 从几个简单的物理模型出发, 推导出本课程将要讨论的三种典型方程及相应的典型定解问题.

§1　基本概念

1.1.　什么是偏微分方程

所谓**偏微分方程**, 是指关于多元函数 $u(x_1,\cdots,x_n)$ $(n\geqslant 2)$ 及其某些偏导数的关系式

$$F(x_1,\cdots,x_n,u,Du,D^2u,\cdots,D^mu)=0, \tag{1.1}$$

其中 F 是关于自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 和未知函数 u 及 u 的有限多个偏导数的已知函数, 而

$$\begin{aligned}
&Du=(u_{x_1},\cdots,u_{x_n}),\\
&D^2u=(u_{x_1x_1},\cdots,u_{x_1x_n},u_{x_2x_2},\cdots,u_{x_2x_n},\cdots,u_{x_{n-1}x_{n-1}},u_{x_{n-1}x_n},u_{x_nx_n}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$D^m u = \left\{ \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_n^{m_n}} \,\middle|\, m_1, m_2, \cdots, m_n \text{为非负整数}, \sum_{i=1}^{n} m_i = m \right\}.$$

下面举几个常见的例子.

输运方程:

$$u_t + \boldsymbol{b} \cdot Du = 0, \quad \text{其中 } \boldsymbol{b} \text{ 为常向量}. \tag{1.2}$$

Hamilton-Jacobi 方程:

$$u_t + H(Du, x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad \text{其中 } H(p, x_1, \cdots, x_n) \text{ 是其自变量的非线性函数}. \tag{1.3}$$

波动方程:

$$u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n}) = 0, \quad \text{其中 } a \text{ 为正常数}. \tag{1.4}$$

热传导方程:

$$u_t - a^2(u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n}) = 0, \quad \text{其中 } a \text{ 为正常数}. \tag{1.5}$$

Laplace 方程:

$$u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} = 0. \tag{1.6}$$

Poisson 方程:

$$u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} = f(x_1, \cdots, x_n). \tag{1.7}$$

极小曲面方程:

$$\left(1 + u_y^2\right) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + \left(1 + u_x^2\right) u_{yy} = 0. \tag{1.8}$$

Monge-Ampère 方程:

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) = f(x_1, \cdots, x_n), \quad \text{其中 } f \text{ 为已知函数}. \tag{1.9}$$

Burger 方程:

$$u_t + uu_x = u_{xx}. \tag{1.10}$$

KdV (Korteweg-de Vries) 方程:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.11}$$

Camassa-Holm 方程:

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{1.12}$$

1.2. 偏微分方程的解

如果给定一个函数 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$, 将它及它对自变量的各阶偏导数代入方程 (1.1), 能使 (1.1) 成为恒等式, 则称函数 φ 是偏微分方程 (1.1) 的**解**. 我们知道, 一个线性常微分方程如果有解, 就必有无穷多个解, 其表现形式是依赖于一个或几个任意常数的通解. 于是自然会想到偏微分方程的通解也会含有任意元素.

例 1 求偏微分方程

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0 \tag{1.13}$$

的通解.

解 关于 y 积分方程 (1.13), 可得其通解为 $u=\varphi(x)$, 其中 φ 是 x 的任意连续可微函数.

事实上, 在偏微分方程中, 除了少数几个特别简单的例子以外, 求通解是很困难的. 而且即使求得了通解, 要想利用所给的伴随条件将其表达式中的任意元素确定出来, 也是一件不容易的事情, 甚至是不可能的.

1.3. 偏微分方程的阶

在偏微分方程的研究中, "阶" 是一个非常基本的概念. 所谓**偏微分方程的阶**, 就是方程中实际所含未知函数的偏导数中的最高阶数, 如上述的 (1.2) 和 (1.3) 是一阶偏微分方程, (1.4), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), (1.9) 和 (1.10) 是二阶偏微分方程, (1.11) 和 (1.12) 是三阶偏微分方程.

1.4. 线性偏微分方程

如果方程中关于未知函数及其各阶偏导数都是线性的, 则称它为**线性偏微分方程**. 例如方程 (1.2), (1.4), (1.5), (1.6) 和 (1.7) 都是线性偏微分方程. 在线性偏微分方程中, 不含有 u 及它的偏导数的项称为**自由项**; 当自由项为零时, 称方程为**齐次方程**, 如方程 (1.2), (1.4), (1.5) 和 (1.6); 否则就称为**非齐次方程**, 如方程 (1.7).

一般的线性齐次偏微分方程可写为

$$\mathcal{L}u=0, \tag{1.14}$$

线性非齐次偏微分方程可写为

$$\mathcal{L}u=f(x_1,\cdots,x_n), \tag{1.15}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是某一线性偏微分算子, 例如

$$\mathcal{L}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right),$$
$$\mathcal{L}=\frac{\partial}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right),$$
$$\mathcal{L}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

等等. 所谓**线性算子**, 是指对任意的函数 u,v 及常数 c, 总有

$$\mathcal{L}(u+v)=\mathcal{L}u+\mathcal{L}v,\quad \mathcal{L}(cu)=c\mathcal{L}u. \tag{1.16}$$

由 (1.16), 我们可得关于线性方程的如下**叠加原理**.

定理 1.1 若 $u_1,u_2,\cdots,u_N$ 是线性齐次方程 (1.14) 的解, 则 $u=c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_Nu_N$ 也是 (1.14) 的解; 若 $u_1,u_2,\cdots,u_N$ 是线性非齐次方程 (1.15) 的解, 则 $u=c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_Nu_N$ 是线性非齐次方程

$$\mathcal{L}u=f\sum_{i=1}^{N}c_i$$

的解, 其中 $c_1,c_2,\cdots,c_N$ 是任意常数.

1.5. 非线性偏微分方程

我们把不是线性偏微分方程的偏微分方程统称为**非线性偏微分方程**. 在非线性偏微分方程中, 如果关于未知函数的所有最高阶偏导数都是线性的, 则称它为**拟线性偏微分方程**. 例如方程 (1.8), (1.10), (1.11) 和 (1.12) 都是拟线性偏微分方程. 在拟线性偏微分方程中, 由最高阶偏导数所组成的那一部分, 称为方程的**主部**; 若主部内的系数都是常数或是自变量的已知函数, 这时方程被称为是**半线性**的, 如方程 (1.10) 和 (1.11) 就是半线性的. 对于既不是线性也不是拟线性的偏微分方程, 就称它为**完全非线性偏微分方程**, 如方程 (1.3) 和 (1.9) 就是完全非线性偏微分方程. 一般地, 我们又把拟线性偏微分方程及完全非线性偏微分方程统称为非线性偏微分方程.

习 题 1–1

1. 指出下列方程的阶, 并判断它是线性的还是非线性的. 如果是线性的, 说明它是齐次的还是非齐次的:

(1) $u_t-(u_{xx}+u_{yy})+1=0$;

(2) $u_t - u_{xx} + xu = 0$;

(3) $u_t - u_{xxt} + uu_x = 0$;

(4) $u_x^2 + uu_y = 0$;

(5) $u_{tt} - u_{xx} + t^2 + x^2 = 0$;

(6) $u_x + e^y u_y = 0$;

(7) $u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1+u} = 0$;

(8) $u_x(1+u_x^2)^{-\frac{1}{2}} + u_y(1+u_y^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$;

(9) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$;

(10) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \lg u = 0$.

2. 设 $f(x)$ 和 $g(y)$ 是任意的二次连续可微函数, 验证函数 $u = f(x)g(y)$ 满足方程

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0.$$

3. 验证函数 $u(x,y) = x^2 - y^2$ 和 $u(x,y) = e^x \sin y$ 都是方程

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

的解.

4. 验证函数

$$u(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}$$

在区域 $\Omega = \{(x,y,t) | (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < a^2t^2\}$ 内满足方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$$

其中 a 为正常数,ξ, η 为任意实数.

5. 试写出具有 n 个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式.

6. 求下列偏微分方程的通解:

(1) $u_{xy} = \lambda u_y, \lambda$ 为常数;

(2) $u_{xy} = 0$;

(3) $t\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4xt^3$.

7. 求方程

$$u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} = 0$$

具有形式 $u(x,y) = f(\lambda x + y)$ 的特解.

§2　几个经典方程

数学物理中的许多问题, 都可由一个偏微分方程来描述, 本节将介绍几个源自物理学和力学中的典型的偏微分方程.

2.1.　弦振动方程

弹性弦的振动问题, 是一个很有意义而且十分重要的古典问题, 下面我们建立它的数学模型.

问题: 给定一根两端固定的、拉紧并具有弹性的、均匀的、非常柔软的细线, 其长为 l, 在外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动, 求弦上各点的运动规律.

为了将实际问题归结为数学模型, 必须作一些理想化的假设, 以便能抓住问题的本质特征. 为此, 我们作如下**基本假设**:

(1) 均匀细线: 指弦的横截面直径与弦的长度相比可以忽略, 且其线密度 ρ 是常数.

(2) 微小横振动: 指弦的微小运动发生在一个平面内, 且弦上各点的位移与弦平衡位置垂直.

(3) 柔软: 指弦在形变时没有抵抗弯曲的张力, 弦上各质点间的张力与弦的切线方向一致, 且弦的伸长变形与张力的关系服从胡克 (Hooke) 定律.

下面我们将在上述基本假设下利用动量定理来建立数学模型, 即导出弦振动方程.

动量定理: 物体在某一时段 (即时间间隔) 内的动量的增量等于作用在该物体上所有外力在这一时段内产生的冲量, 即

$$\boxed{\begin{array}{c} t=t_2 \\ \text{时刻的动量} \end{array}} - \boxed{\begin{array}{c} t=t_1 \\ \text{时刻的动量} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} [t_1,t_2]\ \text{时间段} \\ \text{作用在物体上的冲量} \end{array}}$$

现在我们先建立坐标系. 如图 1–1 选择坐标系, 将弦的两端固定在 x 轴的原点 O 及点 L 上 $(OL=l)$. 令 $u(x,t)$ 表示弦上位置为 x 的点在时刻 t 的位移.

在弦上任取一微弦段 $[x,x+\Delta x]$, 它的弧长为

$$\Delta s=\int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+u_x^2(x,t)}\mathrm{d}x.$$

由基本假设 2 可知 u_x 很小, 于是 u_x^2 与 1 相比可以忽略不计, 从而

$$\Delta s\approx\int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+0^2}\mathrm{d}x=\Delta x.$$

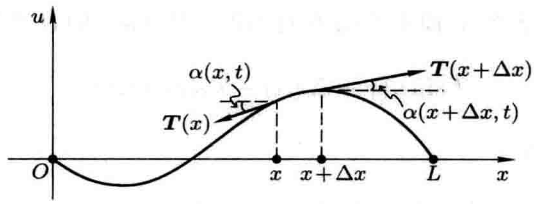

图 1–1

这表明弦在微弦段 $[x, x+\Delta x]$ 上的微小振动过程中并未伸长, 由基本假设 3 及 Hooke 定律可知, 弦上每一点所受张力在振动过程中保持不变, 即张力与时间 t 无关. 现在我们可以把在点 x 处时刻 t 的张力记为 $\boldsymbol{T}(x)$, 它的大小用 $T(x)$ 表示. 由基本假设 3 可知, 它的方向总是沿着弦在 x 点处的切线方向, 如图 1–1 所示. 若用 $\alpha(x,t)$ 表示弦在点 x 处时刻 t 的切线方向与 x 轴之间的夹角, 则在点 x 处作用于微弦段 $[x, x+\Delta x]$ 上的张力在 x 轴方向的分量为

$$-T(x)\cos\alpha(x,t),$$

其中负号表示力的方向与 x 轴的正向相反. 类似地, 在微弦段的另一端 $x+\Delta x$ 处作用于微弦段 $[x, x+\Delta x]$ 上的张力在 x 轴方向的分量为

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha(x+\Delta x,t).$$

由基本假设 2 可知, 弦的振动是横向的, 即它只在与 x 轴垂直的方向作横振动, 所以作用于弦段上所有力沿 x 轴的合力为零, 即

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha(x+\Delta x,t) - T(x)\cos\alpha(x,t) = 0. \tag{2.1}$$

由于弦在平衡位置附近作微小振动, 所以 u_x^2 与 1 相比可以忽略不计, 即

$$\begin{cases} \cos\alpha(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha(x,t)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} \approx 1, \\ \cos\alpha(x+\Delta x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha(x+\Delta x,t)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x+\Delta x,t)}} \approx 1, \end{cases}$$

于是由 (2.1) 知

$$T(x+\Delta x) - T(x) = 0,$$

故 $T(x+\Delta x) = T(x) = T$(常数), 也就是说, 张力的大小 T 与 x 也无关, 于是张力 T 恒为常数.