



在坡上修筑品字沟、种上果树，这是五华县

陆山乡上寨村的情况。按：此图

## 序

本書爲依照教育部最近頒布之高中解析幾何標準，更參酌 Loney, Osgood-Graustein, Smith-Gale, Sommerville, Salmon 諸氏之作，編纂而成。依作者經驗，吾國中學與大學之間，數學程度，頗不啣接；大學學生因中學根基未善，進習高深學理，常感困難。解析幾何爲治數學之基礎，是以本書取材與說理，力求切實與嚴整。俾讀者進習高深數學，得易升堂入室。

解析幾何爲以代數之方法研究幾何圖形；亦即將幾何問題，藉坐標之溝通，用代數方程式以判別其性質。代數能以簡單之方程式，示無窮之變化；是以解析幾何用代數之方法，能使萬變之幾何圖形，得以就範，雖稍失純粹幾何之齊整，但事半功倍，遠非綜合幾何之所能及。本書第三章論軌跡與方程式，即謀幾何與代數之溝通，爲解析幾何之基礎；惟以此時讀者之觀念未深，不能詳論，故特作附錄於篇後，藉補不足，教授時如時間充裕，宜加講解也。

按教育部頒布之課程標準，高中解析幾何分甲乙二組，乙組授課時間每週較少一小時；若乙組選用本書，僅須略去第十一章即可也。

全書問題分爲習題與雜題兩種；習題盡屬淺易，其目的在補助讀者對於定理與公式作深切之了解與純熟之應用。雜題則稍難，其目的在啓發讀者作進一步之探討。二者之分量已減至最少限度，讀者務須逐題演習，未可省略。

本書原稿成於民國十八年秋，旋先後在各中學印爲講義，其中幾經修改。二十二年春蒙陳建功教授校閱，再遵陳教授所示諸端，重行改訂。最近復承李達，陳傳璋，周紹濂諸教授多所指正，合此誌謝！

民國二十五年四月，作者識於青島。

# 目 次

第一章 向量射影 .....	1
向量(1) 向量之坐標(3) 角(4) 射影(5)	
第二章 笛卡兒坐標,幾何量之解析 .....	9
笛卡兒坐標(9) 直角坐標(10) 二點之距離(12) 傾斜及斜度(14)	
分點及中點(16) 三角形之面積(19) 三點共線之條件(22)	
第三章 軌跡與方程式 .....	27
定義(27) 求合於定條件之點之軌跡之方程式(28) 求作方程式	
之軌跡(30) 方程式之討論(31) 作圖之例(35) 軌跡之交點(38)	
第四章 直線 .....	42
直線之方程式(42) 點斜度式(44) 二點式(45) 截距式(46) 法	
線式(47) 化一般方程式爲法線式(48) 自直線至一點之距離(51)	
二直線之交角(55) 二直線平行與垂直之條件(56) 三直線共	
之條件(59) 二次方程式之代表二直線者(61) 經過二直線之交	
點之直線方程式(62) 直線系(63)	
第五章 圓 .....	
圓之方程式(70) 圓之一般方程式(71) 圓之切線(73) 直線與	
圓相切之條件(75) 切線之長(76) 圓之法線(77) 三條件定一	
圓(79) 正交圓(83) 圓系(84) 等幂軸(85)	
第六章 圓錐曲線 .....	91
圓錐曲線(91) 拋物線(92) 拋物線之作法(95) 拋物線之切線	
(96) 直線與拋物線相切之條件(98) 拋物線之法線(99) 拋物線	

上切線與法線之性質 (100) 拋物線之徑 (101) 橢圓 (103) 橢圓之作法 (106) 橢圓之又一定義 (108) 橢圓之切線 (109) 直線與橢圓相切之條件 (111) 橢圓之法線 (112) 橢圓之切線與法線之性質 (112) 橢圓之徑 (113) 橢圓之共軛徑 (114) 橢圓之面積 (116) 雙曲線 (119) 雙曲線之作法 (121) 雙曲線之又一定義 (123) 雙曲線之切線 (124) 雙曲線之法線 (125) 雙曲線之徑 (125) 雙曲線之共軛徑 (126) 漸近線 (127) 共軛雙曲線 (131) 正雙曲線 (132) 圓錐曲線之一般定義 (133) 圓錐曲線系 (135) 同焦點圓錐曲線 (136)

## 第七章 坐標軸之變換 ..... 142

定義 (142) 軸之平移 (142) 軸之迴轉 (144) 軸之移轉 (145) 方程式由軸之變換而簡化 (148) 坐標軸之變換與方程式之次數 (150) 不變量 (151)

## 第八章 一般二次方程式 ..... 156

一般二次方程式之簡化 (156) 一般二次方程式之軌跡 (158) 圓錐曲線之中心 (162) 二次方程式之軌跡之作法 (163) 二次方程式之軌跡之直接作法 (168) 降級圓錐曲線系 (171) 五點定一圓曲線 (173) 軌跡問題 (175)

## 第九章 極坐標 ..... 182

極坐標 (182) 極坐標方程式之作圖 (184) 軌跡之交點 (187) 直角坐標與極坐標之變換 (188) 直線之極坐標方程式 (190) 圓之極坐標方程式 (191) 圓錐曲線之極坐標方程式 (193)

## 第十章 高次平面曲線 ..... 197

高次平面曲線 (197) 參數方程式 (197) 指數曲線 (202) 對數曲線 (202) 三角函數之曲線 (203) 反三角函數之曲線 (207) 擺線 (208) 外擺線 (210) 內擺線 (213) 弓形線 (214) 蔓葉線 (215) 雙純線 (216) 康可線 (217) 蝸牛線, 心臟線 (219) 螺線 (220)

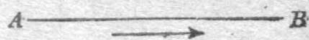
---

第十一章 極與極線, 反形.....	229
調和比 (229) 極線 (230) 極 (233) 極與極線之性質 (234) 極 與極線之作法 (237) 反形變換 (238) 反形變換式 (240) 軌跡之 反形 (240) 二軌跡之反形之性質 (244) 反形器 (245)	
附 錄 .....	249
代數曲線之切線 (249) 次切線及次法線 (253) 代數曲線之漸近 線 (255) 軌跡無窮遠枝之情形 (261) 軌跡性狀之討論 (263)	
附 表 .....	269
中英名詞對照及索引 .....	273

# 第一章 向量射影

1. 向量 任何直線皆有相異之二方向，我人若任取其一為正向(Positive direction)，則他一即為負向(Negative direction)。例如線段  $AB$ ，若取  $AB$  為正向，則  $BA$  為負向。

線段  $AB$  謂之向量 (Vector)，亦稱有向線段，以符號  $\overline{AB}$  表之， $A$  為該向量之起點， $B$  為該向量之終點， $AB$  之長表向量之大小。



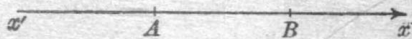
設  $x'x$  為一無限直線，而自  $x'$  至  $x$  為正向； $A, B$  為  $x'x$  上之二點；則

$$\overline{AB} = -\overline{BA}.$$

或

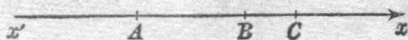
$$AB + BA = 0.$$

$x'x$  謂之軸 (Axis).



設在  $x'x$  上另有一點  $C$ ，其順序為  $A, B, C$ ，則

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$



因  $\overline{AC} = -\overline{CA}$ ,

故

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

設三點之順序為  $A, C, B$ ，則

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}. \quad \begin{array}{c} x' \quad \quad \quad A \quad \quad \quad C \quad \quad \quad B \quad \quad \quad x \end{array}$$

因  $\overline{AC} = -\overline{CA}, \quad \overline{BC} = -\overline{CB},$

故  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$

再設三點之順序爲

$C, A, B,$  則

$$\begin{array}{c} x' \quad \quad \quad C \quad \quad \quad A \quad \quad \quad B \quad \quad \quad x \end{array}$$

$$\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}.$$

因  $\overline{AC} = -\overline{CA}, \quad \overline{BC} = -\overline{CB},$

亦得  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$

故在  $x'x$  上不論  $A, B, C$  之順序若何, 恆有下列關係:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

夏爾定理 (Chasle's theorem) 設  $A, B, C, \dots, K, L$  爲軸  $x'x$  上之諸點, 不論其順序如何, 恆有下列關係:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{KL} + \overline{LA} = 0.$$

證 若  $x'x$  上僅有三點  $A, B, C,$  則

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0,$$

上已證實. 茲用數學歸納法, 假定當軸上有  $k$  點時已證實, 若我人證明當有  $k+1$  點亦能成立, 則  $k$  爲四爲五, 推而至於爲任意整數點, 皆能成立.

設當  $A, B, C, \dots, K$  等  $k$  點爲成立, 即

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{KA} = 0,$$



若另有一點  $L$ , 則

$$\overline{AK} + \overline{KL} + \overline{LA} = 0;$$

即

$$\overline{KA} = \overline{KL} + \overline{LA},$$

代入上式, 得

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{KL} + \overline{LA} = 0,$$

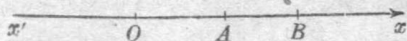
故夏爾定理已完全證明。

## 2. 向量之坐標

有向線段兩端無限延長所得之直線曰有向直線。在有向直線  $x'x$  上任取一點  $O$  為原點 (Origin), 并選定一單位長度, 設

$$\overline{OA} = x_1,$$

$$\overline{OB} = x_2;$$



則  $x_1$  謂之  $A$  點之坐標 (Abscissa),  $x_2$  謂之  $B$  點之坐標。坐標在  $O$  點之右者為正, 在  $O$  點之左者為負。

由此假定, 設  $P$  為有向直線上之一點, 則由  $OP$  之長及其方向可定  $P$  點之坐標; 反之, 若已知一點之坐標, 則可知其在直線上之位置。

用此方法, 則任一向量皆可以其起點與終點二者之坐標表之。

蓋

$$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BO} = 0,$$

即

$$x_1 + \overline{AB} - x_2 = 0,$$

故

$$\overline{AB} = x_2 - x_1,$$

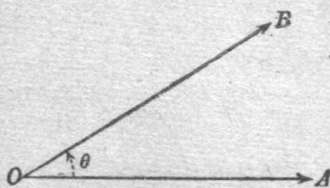
而

$$\overline{BA} = x_1 - x_2$$

例如若  $x_1=5, x_2=8$ ; 則  $\overline{AB}=8-5=3, \overline{BA}=5-8=-3$ .

**3. 角** 若有二有向直線  $\overline{OA}, \overline{OB}$ ;  $\overline{OB}$  先合於  $\overline{OA}$  之上, 然後繞  $O$  點而旋轉, 則成一角  $\theta$ , 或以  $(OA, OB)$  記之。

$\overline{OB}$  旋轉之方向有二, 其一取與時針相反之方向, 其所成之角為正角, 其一取與時針相同之方向, 其所成之角為負角。



因  $\overline{OB}$  之旋轉方向可為正或為負, 故若命  $\theta$  為小於  $2\pi$  之正角, 則

$$(OA, OB) = \theta,$$

或  $(OA, OB) = -(2\pi - \theta) = \theta - 2\pi$ .

但因  $\overline{OB}$  再旋轉  $2\pi, 4\pi, \dots$ , 所成之角仍為  $\theta$ , 故

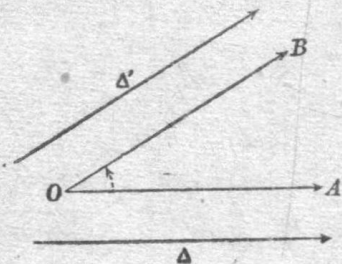
$$(OA, OB) = \theta + 2k\pi,$$

此處  $k$  為正整數或負整數, 并可為  $0$ .

設  $\Delta, \Delta'$  為二向量, 若  $\overline{OA}$  平行於  $\Delta$ ,  $\overline{OB}$  平行於  $\Delta'$ , 則由幾何定理,  $\Delta$  與  $\Delta'$  所夾之角, 即等於  $\overline{OA}$  及  $\overline{OB}$  所夾之角, 故

$$(\Delta, \Delta') = (OA, OB).$$

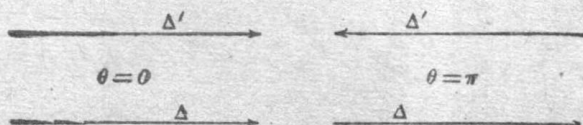
由此若  $\Delta$  與  $\Delta'$  平行而且同向, 則



$$(\Delta, \Delta') = 0.$$

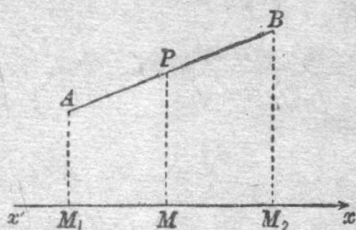
若  $\Delta$  與  $\Delta'$  平行而異向，則

$$(\Delta, \Delta') = \pi.$$



#### 4. 射影 若自軸外一點 $P$ 依某一定方位作直線

交軸於一點  $M$ ，則此  $M$  點謂之  $P$  點在軸上之射影 (Projection)。若  $PM$  直線與  $x'x$  成正交，則  $M$  點謂之  $P$  點在  $x'x$  上之正射影 (Orthogonal projection)。



若  $M_1$  為  $A$  點在  $x'x$  上之正射影， $M_2$  為  $B$  點在  $x'x$  上之正射影，則線段  $\overline{M_1M_2}$  謂之向量  $\overline{AB}$  在軸  $x'x$  上之正射影，以符號  $\overline{AB}_x$  表之，即

$$\overline{M_1M_2} = \overline{AB}_x.$$

設  $(x'x, AB) = \theta$ ，則

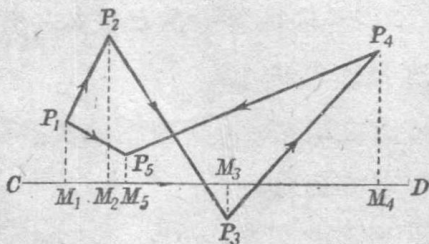
$$\overline{AB}_x = \overline{AB} \cos \theta.$$

設有諸向量互相連接，即第一向量之終點為第二向量之起點，第二向量之終點為第三向量之起點等等，則此諸向量謂之向量練 (Contour of vectors)，而連結第一向量之起點

與最後一向量之終點之向量曰結量 (Resultant).

**定理** 向量練在軸上之正射影等於結量在軸上之正射影.

證 設  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \overline{P_4P_5}$  爲一向量練,  $\overline{P_1P_5}$  爲結量, 則由夏爾定理 (§ 1),



$$\overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} + \overline{M_3M_4} + \overline{M_4M_5} = \overline{M_1M_5},$$

但  $\overline{M_1M_2} = \overline{P_1P_{2x}}, \overline{M_2M_3} = \overline{P_2P_{3x}}, \overline{M_3M_4} = \overline{P_3P_{4x}},$

$$\overline{M_1M_5} = \overline{P_4P_{5x}}, \overline{M_1M_5} = \overline{P_1P_{5x}};$$

故  $\overline{P_1P_{2x}} + \overline{P_2P_{3x}} + \overline{P_3P_{4x}} + \overline{P_4P_{5x}} = \overline{P_1P_{5x}}$

是明所欲證。

## 雜 題

1. 設  $4, -2, 1, 6$  爲同軸上之四點, 試證其適合於夏爾定理。

2. 設  $0, 1, -3, 5, -4$  爲同軸上之五點, 試證其適合於夏爾定理。

3. 設有一向量，其長度為 5，與軸之交角為  $\frac{\pi}{2}$ ，求其在軸上之正射影之長。

4. 設有一向量，與軸之交角為  $\frac{\pi}{6}$ ，其在軸上之正射影之長為 14，求此向量之長度。

5. 設有一向量，長為 6，其在軸上之正射影之長為 3，求其與軸之交角。

6. 設有一向量，長為 24，其在軸上之正射影之長為 8；求其與軸所交之角之正切。

7. 因  $(\Delta, \Delta') + (\Delta', \Delta) = 0$ ；試證若  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  為過一點之三直線，則

$$(\Delta_1, \Delta_2) + (\Delta_2, \Delta_3) + (\Delta_3, \Delta_1) = 0.$$

8. 設有共點之四直線  $D, D', \Delta, \Delta'$ ，欲  $D, D'$  之二分角線與  $\Delta, \Delta'$  之二分角線相合，求證必須  $(D', \Delta) = (\Delta, D)$ 。

9. 二軸  $\Delta, \Delta'$  之交角有無窮值，試證  $\sin(\Delta, \Delta')$ ， $\cos(\Delta, \Delta')$  及  $\tan(\Delta, \Delta')$  為僅有一值。

10. 試證起點與終點相同之二向量練之射影相等。

11. 試證任何閉形之向量練之射影為零。

12. 試證平行二向量在同軸上之射影之比等於其向量之比。

[提示：設  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，作直線  $\Delta$  平行於  $\overline{AB}$ 。設  $\overline{A'B'}, \overline{C'D'}$  分別為  $\overline{AB}, \overline{CD}$  在  $\Delta$  上之射影，則  $\overline{A'B'}, \overline{C'D'}$  在軸上之射影如何？]

13. 設  $A, B, C, D$  爲直線上任意之四點，試證：

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0.$$

[提示： $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ ,  $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD}$ , 二式分別乘以  $\overline{DC}$  及  $\overline{CB}$ , 再相加, 此爲尤拉 (Euler) 關係式.]

14. 設  $A, B, C, D$  爲直線上之任意四點，試證：

$$\overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{DC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0.$$

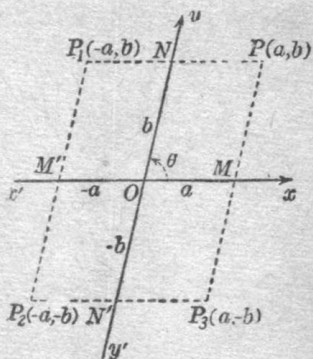
[提示： $\overline{DA} = \overline{DC} + \overline{CA}$ , 平方之, 得  $\overline{DA}^2 = \overline{DC}^2 + 2\overline{DC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA}^2$ ; 同樣,  $\overline{DB}^2 = \overline{DC}^2 + 2\overline{DC} \cdot \overline{CB} + \overline{CB}^2$ . 二式分別乘以  $\overline{BC}$  及  $\overline{CA}$ , 相加. 此爲施德華 (Stewart) 關係式.]

## 第二章 笛卡兒坐標,

### 幾何量之解析

#### 5. 笛卡兒坐標 由前章 §2, 凡實數皆可以有

向直線上之點表之, 故已知一點, 可得一實數; 反之, 已知一實數, 亦可定一點. 取二有向直線  $x'x$  及  $y'y$  交於原點  $O$  而成  $\theta$  之角. 設  $P$  為平面上之一點, 其依  $y'y$  之方向在  $x'x$  上之射影為  $M$ , 其依  $x'x$  之方向在  $y'y$  上之射影為  $N$ . 命



$$OM = a, \quad ON = b.$$

即  $OM$  之長為  $a$  單位長,  $ON$  之長為  $b$  單位長; 則  $a$  謂之  $P$  點之橫坐標 (Abscissa),  $b$  謂之  $P$  點之縱坐標 (Ordinate). 合縱橫坐標  $a, b$ , 謂之  $P$  點之坐標 (Coördinate).  $x'x$  謂之  $x$  軸 (Axis of  $x$ ),  $y'y$  謂之  $y$  軸 (Axis of  $y$ ).

普通以符號  $P(a, b)$  表 點之坐標.

縱橫坐標之正負如下:

1. 橫坐標在原點之右爲正，在原點之左爲負。
2. 縱坐標在原點之上爲正，在原點之下爲負。

此種坐標制名爲笛卡兒坐標 (Cartesian coördinates)，蓋爲 1637 年法國大數學家笛卡兒 (René Descartes) 在其所著之幾何學 (Geometrie) 中所創也。但實際坐標之應用頗古，時在紀元前 140 年，喜巴覺斯 (Hipparchus) 已應用之討論經緯線矣。

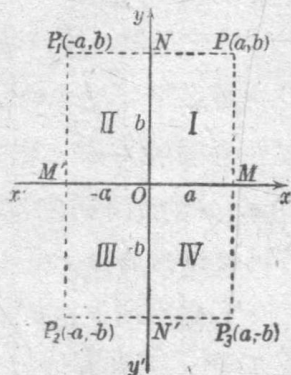
應用笛卡兒坐標，一點以縱橫二坐標表之，由是：

每一點可定二實值；反之，每二實值可定一點。

注意。  $x'x$  及  $y'y$  二軸皆表實數，故初等解析幾何學中所研究數之範圍，僅限於代數中實數而止也。

**6. 直角坐標** 以上所述  $x'x$  及  $y'y$  二坐標軸係斜交，即  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ；此謂之斜角坐標 (Oblique coördinates)。通常爲應用便利起見，取  $x'x, y'y$  二軸爲正交，即  $\theta = \frac{\pi}{2}$ 。此謂之直角坐標 (Rectangular coördinates)，所以與斜角坐標有別也。本書概用直角坐標。

$x'x$  及  $y'y$  二軸分平面爲四部，





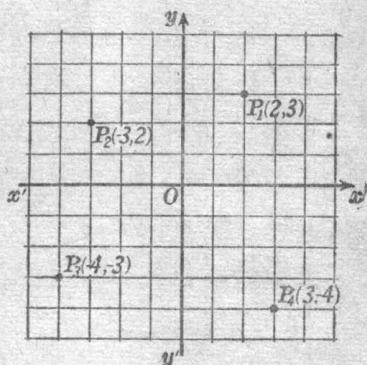
每部謂之一象限(Quadrant).  $xOy$  謂之第一象限,  $x'Oy$  謂之第二象限,  $x'Oy'$  謂之第三象限,  $y'Ox$  謂之第四象限.

在第一象限,縱橫二坐標皆為正;在第二象限,縱坐標為正,橫坐標為負;在第三象限,縱橫二坐標皆為負;在第四象限,縱坐標為負,橫坐標為正.

原點之坐標為  $(0, 0)$ ; 點之在  $x$  軸上者, 其縱坐標為零; 點之在  $y$  軸上者, 其橫坐標為零.

應用直角坐標,  $P_1(2, 3)$ ,  $P_2(-3, 2)$ ,  $P_3(-4, -3)$ ,  $P_4(3, -4)$

四點可在坐標紙上記出, 各在一象限, 如上圖.



## 習 題

1. 試在方格紙上作坐標軸, 然後記出下列諸點:

- i.  $(3, 5)$ ,      ii.  $(-2, 5)$ ,      iii.  $(0, 0)$ ,  
 iv.  $(-5, 0)$ ,    v.  $(0, -2)$ ,      vi.  $(-3, -7)$ ,  
 vii.  $(7, -4)$ ,    viii.  $(6, -2)$ ,    ix.  $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ,  
 x.  $(\frac{2}{3}, 2)$ ,      xi.  $(0.5, 1.5)$ ,    xii.  $(10, -\frac{4}{5})$ .

2. 試作  $(0, -2)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(-1, -5)$  四點. 此四點有何關係?

3. 試作四頂點為  $(-3, 0)$ ,  $(-3, 6)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(3, 6)$  之四邊形, 此為何種四邊形?