在綴坡上修筑品字沟、种上果树，这是五华县
防止水土流失的又一措施　　[illegible]摄影

序

本書爲依照教育部最近頒布之高中解析幾何標準，更參酌 Loney, Osgood-Graustein, Smith-Gale, Sommerville, Salmon 諸氏之作，編纂而成.依作者經驗，吾國中學與大學之間，數學程度，頗不啣接；大學學生因中學根基未善，進習高深學理，常感困難. 解析幾何爲治數學之基礎，是以本書取材與說理，力求切實與嚴整 俾讀者進習高深數學，得易升堂入室.

解析幾何爲以代數之方法研究幾何圖形；亦卽將幾何問題，藉坐標之溝通，用代數方程式以判別其性質. 代數能以簡單之方程式，示無窮之變化；是以解析幾何用代數之方法，能使萬變之幾何圖形，得以就範，雖稍失純粹幾何之齊整，但事半功倍，遠非綜合幾何之所能及. 本書第三章論軌跡與方程式，卽謀幾何與代數之溝通，爲解析幾何之基礎；惟以此時讀者之觀念未深，不能詳論，故特作附錄於篇後，藉補不足，教授時如時間充裕，宜加講解也.

按教育部頒布之課程標準，高中解析幾何分甲乙二組，乙組授課時間每週較少一小時；若乙組選用本書，僅須略去第十一章卽可也.

全書問題分爲習題與雜題兩種;習題盡屬淺易,其目的在補助讀者對於定理與公式作深切之了解與純熟之應用.雜題則稍難,其目的在啓發讀者作進一步之探討.二者之分量已減至最少限度,讀者務須逐題演習,未可省略.

本書原稿成於民國十八年秋,旋先後在各中學印爲講義,其中幾經修改.二十二年春蒙陳建功教授校閱,再遵陳教授所示諸端,重行改訂.最近復承李達,陳傳璋,周紹濂諸教授多所指正,合此誌謝!

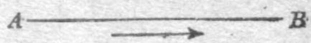
民國二十五年四月,作者識於青島.

目次

第一章　向量射影

1. 向量　任何直線皆有相異之二方向，我人若任取其一爲**正向**(Positive direction),則他一卽爲**負向**(Negative direction). 例如線段 AB, 若取 AB 爲正向,則 BA 爲負向.

線段 AB 謂之向量 (Vector), 亦稱有向線段，以符號 $\overline{AB}$ 表之, A 爲該向量之起點, B 爲該向量之終點, AB 之長表向量之大小.



設 $x'x$ 爲一無限直線,而自 x' 至 x 爲正向; A, B 爲 $x'x$ 上之二點;則

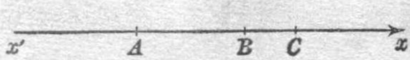
$$\overline{AB}=-\overline{BA}.$$

或
$$AB+BA=0.$$

$x'x$ 謂之軸 (Axis).

設在 $x'x$ 上另有一點 C, 其順序爲 A, B, C, 則

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

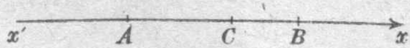


因 $\overline{AC}=-\overline{CA}$,

故
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$$

設三點之順序爲 A, C, B, 則

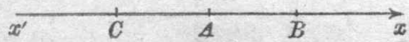
$$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}.$$



因　$\overline{AC}=-\overline{CA},\ \ \overline{BC}=-\overline{CB},$

故　$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$$

再設三點之順序爲



$C, A, B,$ 則

$$\overline{CA}+\overline{AB}=\overline{CB}.$$

因　$\overline{AC}=-\overline{CA},\ \ \overline{BC}=-\overline{CB},$

亦得　$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$$

故在 $x'x$ 上不論 A, B, C 之順序若何，恆有下列關係：

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$$

夏爾定理 (Chasle's theorem)　設 $A, B, C, \cdots K, L$ 爲軸 $x'x$ 上之諸點，不論其順序如何，恆有下列關係：

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots\cdots+\overline{KL}+\overline{LA}=0.$$

證　若 $x'x$ 上僅有三點 $A, B, C,$ 則

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0,$$

上已證實．茲用數學歸納法，假定當軸上有 k 點時已證實，若我人證明當有 $k+1$ 點亦能成立，則 k 爲四爲五，推而至於爲任意整數點，皆能成立．

設當 $A, B, C, \cdots\cdots K$ 等 k 點爲成立，即

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots\cdots+\overline{KA}=0,$$

若另有一點 L，則

$$\overline{AK}+\overline{KL}+\overline{LA}=0;$$

即

$$\overline{KA}=\overline{KL}+\overline{LA},$$

代入上式，得

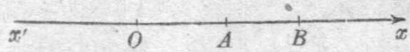
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots\cdots+\overline{KL}+\overline{LA}=0,$$

故夏爾定理已完全證明.

2. 向量之坐標 有向線段兩端無限延長所得之直線曰有向直線. 在有向直線 $x'x$ 上任取一點 O 爲原點 (Origin)，并選定一單位長度，設

$$\overline{OA}=x_1,$$

$$\overline{OB}=x_2;$$



則 x_1 謂之 A 點之坐標 (Abscissa)，x_2 謂之 B 點之坐標. 坐標在 O 點之右者爲正，在 O 點之左者爲負.

由此假定，設 P 爲有向直線上之一點，則由 OP 之長及其方向可定 P 點之坐標；反之，若已知一點之坐標，則可知其在直線上之位置.

用此方法，則任一向量皆可以其起點與終點二者之坐標表之.

蓋

$$\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BO}=0,$$

即

$$x_1+\overline{AB}-x_2=0,$$

故

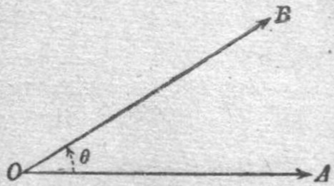
$$\overline{AB}=x_2-x_1,$$

而

$$\overline{BA}=x_1-x_2$$

例如若 $x_1=5, x_2=8$；則 $\overline{AB}=8-5=3$, $\overline{BA}=5-8=-3$.

3. 角　若有二有向直線 $\overline{OA}, \overline{OB}$；$\overline{OB}$ 先合於 $\overline{OA}$ 之上，然後繞 O 點而旋轉，則成一角 θ，或以 (OA, OB) 記之.



$\overline{OB}$ 旋轉之方向有二，其一取與時針相反之方向，其所成之角爲正角，其一取與時針相同之方向，其所成之角爲負角.

因 $\overline{OB}$ 之旋轉方向可爲正或爲負，故若命 θ 爲小於 2π 之正角，則

$$(OA, OB)=\theta,$$

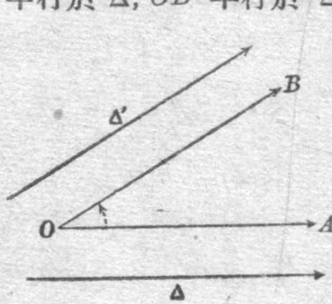
或　　$$(OA, OB)=-(2\pi-\theta)=\theta-2\pi.$$

但因 $\overline{OB}$ 再旋轉 $2\pi, 4\pi, \cdots\cdots$，所成之角仍爲 θ，故

$$(OA, OB)=\theta+2k\pi,$$

此處 k 爲正整數或負整數，并可爲 0.

設 Δ, Δ' 爲二向量，若 $\overline{OA}$ 平行於 Δ, $\overline{OB}$ 平行於 Δ'，則由幾何定理，Δ 與 Δ' 所夾之角，即等於 $\overline{OA}$ 及 $\overline{OB}$ 所夾之角，故



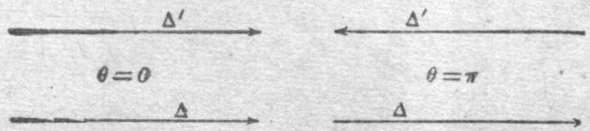
$$(\Delta, \Delta')=(OA, OB).$$

由此若 Δ 與 Δ' 平行而且同向，則

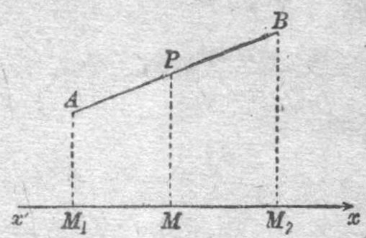
$$(\Delta, \Delta') = 0.$$

若 Δ 與 Δ' 平行而異向，則

$$(\Delta, \Delta') = \pi.$$



4. 射影　若自軸外一點 P 依某一定方位作直線交軸於一點 M，則此 M 點謂之 P 點在軸上之射影 (Projection). 若 PM 直線與 $x'x$ 成正交，則 M 點謂之 P 點在 $x'x$ 上之**正射影** (Orthogonal projection).



若 M_1 爲 A 點在 $x'x$ 上之正射影，M_2 爲 B 點在 $x'x$ 上之正射影，則線段 $\overline{M_1M_2}$ 謂之向量 $\overline{AB}$ 在軸 $x'x$ 上之正射影，以符號 $\overline{AB_x}$ 表之，即

$$\overline{M_1M_2} = \overline{AB_x}.$$

設 $(x'x, AB) = \theta$，則

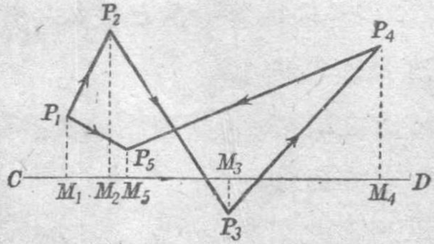
$$\overline{AB_x} = \overline{AB}\cos\theta.$$

設有諸向量互相連接，即第一向量之終點爲第二向量之起點，第二向量之終點爲第三向量之起點等等，則此諸向量謂之**向量練**(Contour of vectors)，而連結第一向量之起點

與最後一向量之終點之向量曰結量 (Resultant).

定理 向量練在軸上之正射影等於結量在軸上之正射影.

證 設 $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \overline{P_4P_5}$ 爲一向量練，$\overline{P_1P_5}$ 爲結量，則由夏爾定理 (§ 1),



$$\overline{M_1M_2}+\overline{M_2M_3}+\overline{M_3M_4}+\overline{M_4M_5}=\overline{M_1M_5},$$

但 $$\overline{M_1M_2}=\overline{P_1P_{2x}},\quad \overline{M_2M_3}=\overline{P_2P_{3x}},\quad \overline{M_3M_4}=\overline{P_3P_{4x}},$$

$$\overline{M_4M_5}=\overline{P_4P_{5x}},\quad \overline{M_1M_5}=\overline{P_1P_{5x}};$$

故 $$\overline{P_1P_{2x}}+\overline{P_2P_{3x}}+\overline{P_3P_{4x}}+\overline{P_4P_{5x}}=\overline{P_1P_{5x}}$$

是明所欲證.

雜 題

1. 設 4, −2, 1, 6 爲同軸上之四點，試證其適合於夏爾定理.

2. 設 0, 1, −3, 5, −4 爲同軸上之五點，試證其適合於夏爾定理.

3. 設有一向量，其長度爲 5，與軸之交角爲 $\frac{\pi}{2}$，求其在軸上之正射影之長。

4. 設有一向量，與軸之交角爲 $\frac{\pi}{6}$，其在軸上之正射影之長爲 14，求此向量之長度。

5 設有一向量，長爲 6，其在軸上之正射影之長爲 3，求其與軸之交角。

6. 設有一向量，長爲 24，其在軸上之正射影之長爲 8；求其與軸所交之角之正切。

7. 因 $(\Delta, \Delta')+(\Delta', \Delta)=0$；試證若 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 爲過一點之三直線，則

$$(\Delta_1, \Delta_2)+(\Delta_2, \Delta_3)+(\Delta_3, \Delta_1)=0.$$

8. 設有共點之四直線 D, D', Δ, Δ'，欲 D, D' 之二分角線與 Δ, Δ' 之二分角線相合，求證必須 $(D', \Delta)=(\Delta', D)$.

9. 二軸 Δ, Δ' 之交角有無窮値，試證 $\sin(\Delta, \Delta')$, $\cos(\Delta, \Delta')$ 及 $\tan(\Delta, \Delta')$ 爲僅有一値。

10. 試證起點與終點相同之二向量練之射影相等。

11. 試證任何閉形之向量練之射影爲零。

12. 試證平行二向量在同軸上之射影之比等於其向量之比。

[提示：設 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，作直線 Δ 平行於 $\overline{AB}$. 設 $\overline{A'B'}, \overline{C'D'}$ 分別爲 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 在 Δ 上之射影，則 $\overline{A'B'}, \overline{C'D'}$ 在軸上之射影如何？]

13. 設 A, B, C, D 爲直線上任意之四點，試證：

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{CA}\cdot\overline{BD}=0.$$

[提示：$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$, $\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}$, 二式分別乘以 $\overline{DC}$ 及 $\overline{CB}$，再相加，此爲尤拉 (Euler) 關係式.]

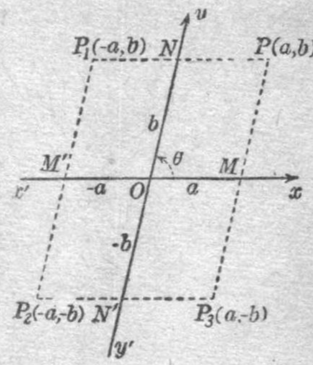
14. 設 A, B, C, D 爲直線上之任意四點，試證：

$$\overline{DA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{DB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{DC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0.$$

[提示：$\overline{DA}=\overline{DC}+\overline{CA}$，平方之，得 $\overline{DA}^2=\overline{DC}^2+2\overline{DC}\cdot\overline{CA}+\overline{CA}^2$；同樣，$\overline{DB}^2=\overline{DC}^2+2\overline{DC}\cdot\overline{CB}+\overline{CB}^2$. 二式分別乘以 $\overline{BC}$ 及 $\overline{CA}$，相加．此爲施德華 (Stewart) 關係式.]

第二章 笛卡兒坐標,幾何量之解析

5. 笛卡兒坐標 由前章 §2, 凡實數皆可以有向直線上之點表之,故已知一點,可得一實數;反之,已知一實數,亦可定一點.取二有向直線 $x'x$ 及 $y'y$ 交於原點 O 而成 θ 之角.設 P 爲平面上之一點,其依 $y'y$ 之方向在 $x'x$ 上之射影爲 M,其依 $x'x$ 之方向在 $y'y$ 上之射影爲 N.命



$$OM=a,\quad ON=b.$$

即 OM 之長爲 a 單位長, ON 之長爲 b 單位長;則 a 謂之 P 點之**橫坐標** (Abscissa), b 謂之 P 點之**縱坐標** (Ordinate). 合縱橫坐標 a, b, 謂之 P 點之**坐標** (Coördinate). $x'x$ 謂之 x 軸 (Axis of x), $y'y$ 謂之 y 軸 (Axis of y).

普通以符號 $P(a, b)$ 表 點之坐標.

縱橫坐標之正負如下:

1. 橫坐標在原點之右爲正,在原點之左爲負。

2. 縱坐標在原點之上爲正,在原點之下爲負。

此種坐標制名爲**笛卡兒坐標** (Cartesian coördinates),蓋爲 1637 年法國大數學家笛卡兒 (René Descartes) 在其所著之幾何學 (Geometrie) 中所創也。但實際坐標之應用頗古,時在紀元前 140 年,喜巴覺斯 (Hipparchus) 已應用之討論經緯線矣。

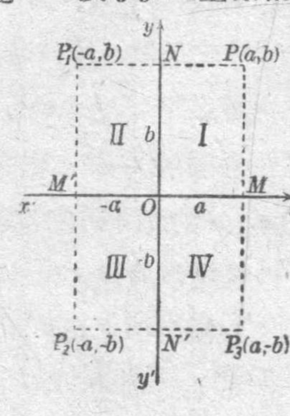
應用笛卡兒坐標,一點以縱橫二坐標表之,由是:

每一點可定二實值; 反之, 每二實值可定一點。

注意. $x'x$ 及 $y'y$ 二軸皆表實數,故初等解析幾何學中所研究數之範圍,僅限於代數中實數而止也。

6. 直角坐標

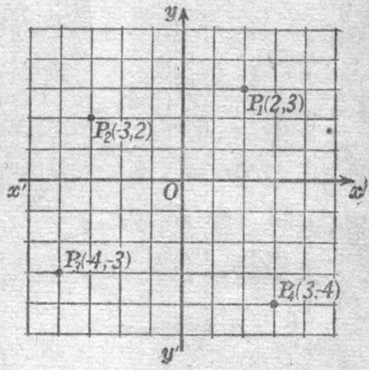
以上所述 $x'x$ 及 $y'y$ 二坐標軸係斜交,即 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$; 此謂之**斜角坐標** (Oblique coördinates). 通常爲應用便利起見,取 $x'x$, $y'y$ 二軸爲正交,即 $\theta = \frac{\pi}{2}$. 此謂之**直角坐標** (Rectangular coördinates),所以與斜角坐標有別也。本書概用直角坐標。



$x'x$ 及 $y'y$ 二軸分平面爲四部,

每部謂之一象限(Quadrant). xOy 謂之第一象限, $x'Oy$ 謂之第二象限, $x'Oy'$ 謂之第三象限, $y'Ox$ 謂之第四象限.

在第一象限,縱橫二坐標皆爲正;在第二象限,縱坐標爲正,橫坐標爲負;在第三象限,縱橫二坐標皆爲負;在第四象限,縱坐標爲負,橫坐標爲正.



原點之坐標爲 $(0, 0)$; 點之在 x 軸上者, 其縱坐標爲零; 點之在 y 軸上者,其橫坐標爲零.

應用直角坐標, $P_1(2, 3)$, $P_2(-3, 2)$, $P_3(-4, -3)$, $P_4(3, -4)$ 四點可在坐標紙上記出,各在一象限,如上圖.

習　　題

1. 試在方格紙上作坐標軸,然後記出下列諸點:

i. $(3, 5)$,　ii. $(-2, 5)$,　iii. $(0, 0)$,

iv. $(-5, 0)$,　v. $(0, -2)$,　vi. $(-3, -7)$,

vii. $(7, -4)$,　viii. $(6, -2)$,　ix $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$,

x. $(\frac{2}{3}, 2)$,　xi. $(0.5, 1.5)$,　xii. $(10, -\frac{4}{5})$.

2. 試作 $(0, -2)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(-1, -5)$ 四點. 此四點有何關係?

3. 試作四頂點爲 $(-3, 0)$, $(-3, 6)$, $(3, 0)$, $(3, 6)$ 之四邊形,此爲何種四邊形?