

Shuxue Aosai
Fudao Congshu

数学奥数辅导丛书

有趣的染色方法

—— 解答组合数学问题的一种办法

Youqu de Ranse Fangfa

苏 淳 编著



中国科学技术大学出版社



数学竞赛辅导丛书

有趣的染色方法

苏 淳 编著



中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

有趣的染色方法:解答组合数学问题的一种办法/苏淳编著. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2011. 5

(数学奥赛辅导丛书)

ISBN 978-7-312-02786-4

I. 有… II. 苏… III. 数学—高中—教学参考资料
IV. G634. 623

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 045792 号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址: 安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026

网址: <http://press.ustc.edu.cn>

安徽省瑞隆印务有限公司印刷

全国新华书店经销

*

开本: 880mm×1230mm 1/32 印张: 4.625 字数: 90 千

2011 年 5 月第 1 版 2011 年 5 月第 1 次印刷

定价: 11.50 元

序

目前,有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了,甚至使一些中学生感到不堪负担,所以再要出版这类读物一定要注重质量,否则“天下文章一大抄”,又无创新之见,未免有误人子弟之嫌.写这类读物如何才能确保质量呢?我想华罗庚老师的名言“居高才能临下,深入才能浅出”应该成为写这类读物的指导思想,他本人生前写的一系列科普读物,包括为中学生写的一些书,也堪称这方面的范本.

中国科学技术大学数学系的老师们,在从事繁重的教学与科研工作的同时,一向对中学数学的活动十分关注,无论对数学竞赛,还是为中学生及中学教师开设讲座、出版中学读物都十分热心,这也许是受华罗庚老师的亲炙,耳濡目染的缘故,所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色.

我看了几本他们编写的“数学奥赛辅导丛书”原稿,感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的,所以乐之为序.

龚昇

前 言

染色,直观来说,就是用不同的颜色为不同的对象着色.

染色能够与数学挂钩,源于对某些组合问题的解答.人们发现,有些组合问题在经过巧妙的染色之后,会变得一目了然;有些时候虽然未必能一目了然,却也会大大降低解答的难度.染色已经成为许多组合问题的一种有效而便捷的解答方法.

有需求,就会有研究,对染色方法的研究引起了人们的关注.正是在这种关注和研究之下,染色问题有了更加丰富的内涵,甚至已经从解答问题的一种方法逐步地演变为组合问题的一种类型.

苏 淳

目 次

序	(I)
前言	(III)
1 染色帮你解题	(001)
2 k 染色	(011)
3 交替 2 染色	(021)
4 巧妙 2 染色	(030)
5 双色图	(037)
6 染色中的可能性问题	(051)
7 居高临下解染色题	(065)
8 2 染色中的存在性问题	(076)
9 形形色色的存在性问题	(083)
10 运用变换解染色题	(101)
11 染色中的最值问题	(109)
12 染色中的计数问题	(118)
13 与染色有关的其他问题	(124)

1 染色帮你解题

染色可以帮助解题. 开始时, 有些数学问题可能会让人一筹莫展, 但在经过巧妙染色之后, 问题的答案就一览无余地展现在眼前. 说来有些神奇, 然而却可以举出很多例子.

我们将 1×2 矩形称为多米诺骨牌, 如图 1 所示.

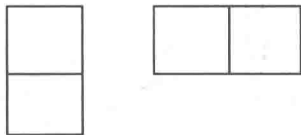


图 1 多米诺骨牌

例 1 自 4×4 方格表中去掉左上角和右下角的方格, 如图 2 左图所示. 试问: 能否将剩下的图形剪为 7 个多米诺?

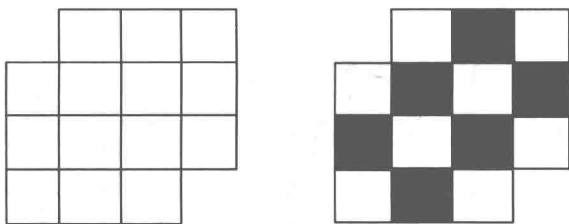


图 2

解 拿到这个问题, 通常会试着去剪. 如果左剪右剪都剪不成功, 该作何打算呢?

染色可以帮助我们回答这一问题. 如图 2 右图所示, 将

表中的方格交替地染为黑色和白色. 于是所剪出的每个多米诺中都应该包含一个黑格和一个白格. 如果能够剪为 7 个多米诺, 那么表中就应该有 7 个黑格和 7 个白格, 但事实上却有 6 个黑格和 8 个白格. 所以不能将剩下的图形剪为 7 个多米诺.

类似地, 染色可以帮助我们回答下面的问题:

例 2 证明: 中国象棋中的棋子马不可能在经过奇数步后回到原位.

证 事实上, 我们只要按照如图 3 所示的方式, 间隔地将棋盘中的顶点染为黑色(将未染色的顶点称为白色). 根据中国象棋中的“马走日”(即从多米诺的一个顶点跳到与之不相邻的相对顶点)规则, 马从黑色顶点只能跳到白色顶点, 从白色顶点只能跳到黑色顶点, 所以无论马从哪个顶点出发, 奇数步跳动后只能到达与出发点颜色不同的顶点之上, 因此不可能回到原位.

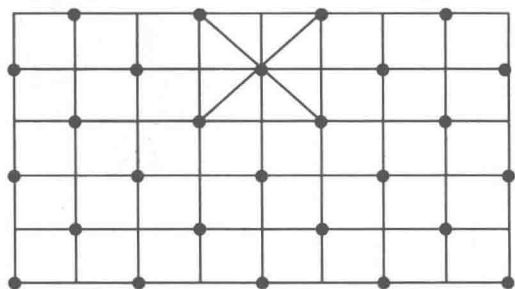


图 3

再来看一个稍微复杂的例子.

例 3 从 5×7 方格表中去掉位于第 1 行第 4 列处的方格,如图 4 所示. 试问:能否用 17 个多米诺完全盖住表中剩下的部分?

解 这是一道看似相当复杂的题目,但却完全可以运用与例 1 类似的方法来解决:将剩下部分的方格交替地染为黑色和白色,其中有 18 个黑格和 16 个白格. 每个多米诺只能盖住一白一黑两个方格,所以不能用 17 个多米诺完全盖住表中剩下的部分.

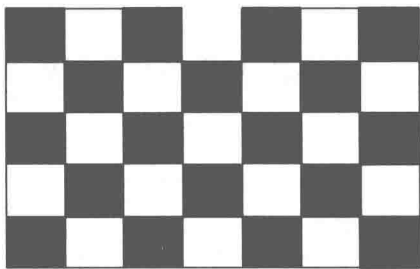


图 4

试想一想,如果不是通过染色,能如此一目了然地把答案揭示出来,能如此清楚地把理由说透彻吗?

我们来看第 26 届国际数学奥林匹克(IMO)竞赛的一道预选题,题目中对棋盘的规格和棋子马的走法作了推广,故称为超级马.

例 4 超级国际象棋棋盘是一个 12×12 的方格表,超级马由 3×4 (或 4×3)方格表的一个角上的方格跳到相对角上的方格(如图 5 左图所示,可以由方格 A 跳到方格 B). 试问:

超级马能否到遍每个方格刚好一次并回到出发点？

解 由马的跳动法则，它总是由黑格跳往白格，由白格跳往黑格。

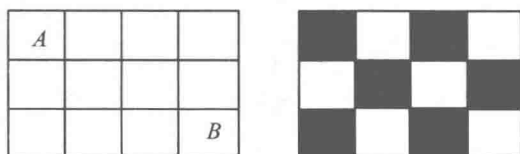


图 5

另一方面，如图 6 所示，我们将棋盘中的第 1, 2, 6, 7, 11, 12 列中的方格集合记为 S ，将其余各列中的方格集合记为 T 。

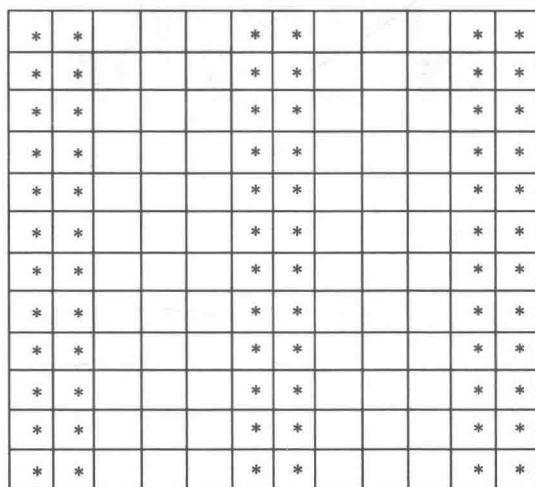


图 6

注意，集合 S 与 T 中包含相同多个方格，所以马在两个

集合中应当跳动相同多步. 然而, S 中不包含任何 3×4 和 4×3 方格表, 所以, 马一旦由 T 跳入 S , 就只能立即由 S 跳回 T . 这样一来, 超级马也不能多在 T 中滯步, 否则难以保证它在两个集合中进入过相同多个方格. 如果它一次都不滯步, 那么它在每个集合中都只能跳入一种颜色的方格, 然而, 无论是集合 S , 还是集合 T 中, 都既有白格, 又有黑格, 所以, 超级马不可能到遍每个方格刚好一次; 而若为避免这一点, 它必须在走完 T 中一种颜色的方格后, 在 T 中多走一步, 以改变所到方格的颜色, 然而这样一来, 又不能保证顺利回到出发点, 因为这样一来, 偶数步后, 所到的方格不与出发点在同一个集合中.

在这里, 把方格分为集合 S 与集合 T , 事实上也是一种染色方式(将 S 中的方格染为一种颜色, 例如红色; 把 T 中的方格染为另一种颜色, 例如蓝色), 只不过没有直接说出来而已.

这类可以通过染色来解答的问题很多很多.

例 5 $9 \times 9 \times 9$ 正方体的每个侧面都是一个 9×9 方格表, 欲用 2×1 矩形纸片(亦称为多米诺形纸片)沿方格线不重叠, 无缝隙地贴满正方体的表面, 肯定会有一些矩形纸片跨越两个侧面. 证明: 跨越两个侧面的矩形纸片的数目一定是奇数.

证 将 $9 \times 9 \times 9$ 正方体每个侧面上的方格表都按照国际象棋棋盘的规则交替地染为黑色与白色, 使得正中的方格均为黑色(如图 7 所示). 这样一来, 每个面上都有 41 个黑格

和 40 个白格. 并且, 每个“跨越”两个侧面的多米诺中的两个方格都是同色的, 而不跨越侧面的多米诺中的两个方格都是一黑一白. 由于黑格的总数比白格的总数多 6, 所以“跨越”两个侧面的黑色多米诺比白色多米诺多 3 个, 因此它们个数的奇偶性不同, 从而它们的和是奇数.

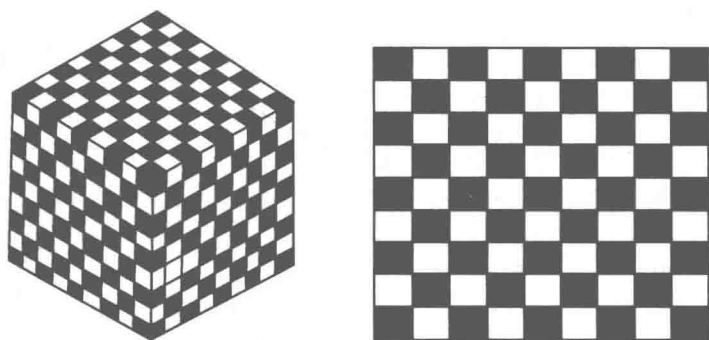


图 7

例 6 在 100×100 方格表的每个方格中均填写着一个非 0 数码. 现知, 沿着各行填写的 100 个 100 位数均可被 11 整除. 试问: 在沿着各列填写的 100 个 100 位数中是否可能恰好有 99 个可被 11 整除?

解 不可能.

假设可能. 我们知道, 一个正整数可被 11 整除, 当且仅当, 它的偶数位上的数字之和与奇数位上的数字之和被 11 除的余数相等. 现在按照国际象棋棋盘的染色规则, 将各个小方格交替地染为黑色与白色. 于是由题意知, 在每一行中, 黑色方格中的数码之和都与白色方格中的数码之和被 11 除

的余数相等,由此可知,表中所有黑色方格中的数码之和与所有白色方格中的数码之和被 11 除的余数相等. 如果有 99 列中的 100 位数可被 11 整除,那么这 99 列中的黑色方格中的数码之和与白色方格中的数码之和被 11 除的余数相等,而剩下的一列中的黑色方格中的数码之和也是与白色方格中的数码之和被 11 除的余数相等的,从而该列中的 100 位数也可被 11 整除.

以上几道例题都是采用国际象棋棋盘的染色规则,将各个小方格交替地染为黑色与白色. 这种染色方式可简称为交替黑白 2 染色,有时直接称为交替 2 染色. 对于这种染色方式,后面还将继续介绍,我们将会看到这种染色方式的许多用处. 现在先看两个其他类型的问题.

例 7 在凸 100 边形的每个顶点上都写有两个不同的数. 证明:可以从每个顶点上划去一个数,使得任意两个相邻的顶点上剩下的数都互不相同.

证 如果在各个顶点上都写着同一个数对 (a, b) , 那么,就只需在所有偶数编号的顶点上都留下 a , 在所有奇数编号的顶点上都留下 b , 即可满足要求. 现在假设不是这种情况,于是可找到两个相邻的顶点 A 与 B , 在它们上面写着的是两个不同的数对. 从顶点 A 开始,依次为各个顶点编号,使得 A 为 1 号, B 为 100 号.

我们相继地将各个顶点上的数都染为一红一蓝. 首先,任意地将第 1 号顶点上的两个数分别染为一红一蓝. 假设已经将第 k 号顶点上的两个数 a 与 b 分别染为红色与蓝色. 那

么在将第 $k+1$ 号顶点上的两个数染色时,便有意地使得红色的数不是 a ,蓝色的数不是 b . 如此下去. 除了 1 号顶点 A 和 100 号顶点 B 之外,任何两个相邻顶点上的颜色相同的数都是互不相等的. 而在顶点 A 与 B 上,绝不可能出现红色二数彼此相等,蓝色二数也彼此相等,因为这与“它们上面写着的是两个不同的数对”的事实相矛盾. 所以其中必有某一种颜色的二数互不相等. 不妨设它们上面的蓝色二数互不相等. 那么就只要擦去所有红色的数即可满足要求.

在这个问题中,染色所起的一个作用是减少叙述中的麻烦,增加语言的准确度和清晰度. 下面的问题更加有趣.

例 8 要为一个 23×23 的大厅铺设地砖,地砖有 3×3 , 2×2 和 1×1 三种规格. 主人希望尽量少用 1×1 的地砖. 试问:最少可以只用几块 1×1 的地砖?

解 首先来尽我们所能寻找一种较少使用 1×1 地砖的铺设方法.

如图 8 左图所示,可以用 12 块 3×3 的地砖和 6 块 2×2 地砖拼成 11×12 的矩形,再按图 8 右图所示,用四个 11×12 的矩形和一个 1×1 的矩形拼成 23×23 的矩形,其中一共只用到一块 1×1 的地砖.

但是,1 是否就是最小值? 这还需要加以证明. 为此我们将一个 23×23 的方格表中第 2, 4, $\dots$, 22 列中的方格染为黑色(图 9 中以 * 表示),其余列保持白色. 于是表中的白格比黑格多 23 个. 由于每个 3×3 矩形和每个 2×2 矩形所能盖住的方格中,两种颜色方格的数目之差都是 3 的倍数(2×2 矩

形所盖住的两种颜色方格的数目之差为 0, 3×3 矩形如图 10 所示), 而 23 却不是 3 的倍数, 所以光利用 3×3 矩形和 2×2 矩形不能完全盖住一个 23×23 的方格表. 这就说明了不能不用 1×1 的地砖.

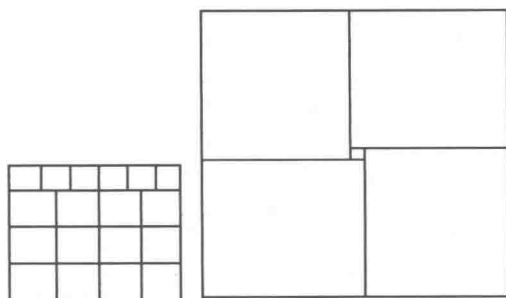


图 8

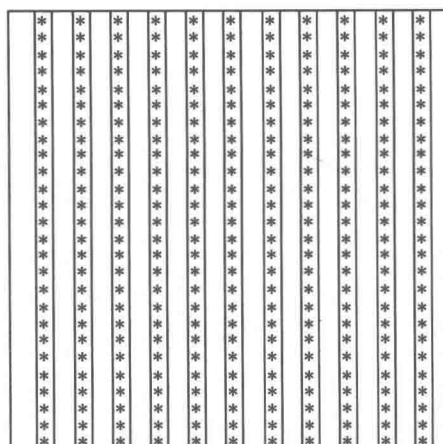


图 9

综合上述知,最少要用一块 1×1 的地砖.

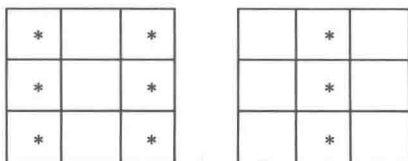


图 10

通过上述例题,我们已经看到染色是解答一些组合问题的有力方法. 在对这些问题的解答中,染色是我们的主动行为. 确切地说,是我们自己根据解题的需要,所采取的一种辅助手段,其目的是通过染色,暴露出问题中的矛盾,为解题提供突破口. 下面我们还将会涉及其他类型的染色问题.

2 k 染色

在前一节所列举的几道例题的解答中,采用的都是 2 染色,即用两种颜色来染色.这实际上就是把所研究的对象分为两类.尤其是在对“超级马”问题的解答中,连颜色都没染,干干净净就把题中所涉及到的对象分为两个集合来说事.从这个意义上来说,染色其实就是一种分类说事的方式.有时我们会把两种颜色编号,称为 1 号色与 2 号色,那么就可自然地将所分成的两类事物对应为整数的奇偶性.

有的时候,在解答一些问题时,还需要染为更多种颜色.如果我们将所考察的每个对象都染为某 k 种颜色之一,并且染为每种颜色的对象都有,那么就称为 k 染色.如果我们把这些颜色编号为 $1, 2, \dots, k$,那么就不仅可以通过染色将所研究的对象分为了 k 种不同类型,而且还可将对问题的讨论与整数的有关性质挂钩.

例 1 能否用 9 个 1×4 矩形盖住一个 6×6 方格表?

解 此处如果仍采用 2 染色,则很难抓住问题的症结.而若采用图 11 中所示的 4 染色方式,问题则变得一清二楚:每个 1×4 矩形盖住 4 种颜色的方格各一个,但是表中有 10 个 2,却只有 8 个 4,所以不可能用 9 个 1×4 矩形盖住一个 6×6 方格表.