应用技术型大学数学课程系列教材

线性代数与数学模型

主　编　陈骑兵
副主编　李宝平　钱　茜　李　琼

科学出版社

应用技术型大学数学课程系列教材

线性代数与数学模型

主　编　陈骑兵
副主编　李宝平　钱　茜　李　琼

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是由电子科技大学成都学院"数学建模与工程教育研究项目组"的教师，依据教育部颁发的关于高等工业院校线性代数课程的教学基本要求，以培养应用型科技人才为目标而编写的. 与本书配套的系列教材还有《微积分与数学模型(上册)》、《微积分与数学模型(下册)》、《概率统计与数学模型》.

本书分4章，主要介绍向量代数与空间解析几何、矩阵与行列式、线性方程组、相似矩阵与二次型等. 每章配备有复习题，最后附有参考解答与提示. 本书的主要特色是注重应用，在介绍线性代数基本内容的基础上，融入了很多模型及应用实例.

本书可作为高等学校理工类、经管类专业线性代数课程的教材，也可作为独立学院及成人教育、高教自考等各类本科线性代数课程的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与数学模型/陈骑兵主编. —北京:科学出版社，2015.1

应用技术型大学数学课程系列教材

ISBN 978-7-03-043017-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 ②数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2 ②O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 009050 号

责任编辑:昌 盛 周金权/责任校对:彭 涛

责任印制:霍 兵/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年1月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2015年1月第一次印刷 印张:10 3/4

字数:216 000

定价:24.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

“应用技术型大学数学课程系列教材”编委会

前　　言

为了培养应用型科技人才，我们在大学数学的教学中以工程教育为背景，坚持将数学建模、数学实验的思想与方法融入数学主干课程教学，收到了好的效果．通过教学实践我们认为将原来的高等数学、线性代数、概率论与数理统计课程分别改为微积分与数学模型、线性代数与数学模型、概率统计与数学模型课程，对转变师生的教育理念，引领学生热爱数学学习、重视数学应用很有帮助，对理工类应用型本科学生工程数学素养的培养很有必要．

“将数学建模思想全面融入理工类数学系列教材的研究”是电子科技大学成都学院“以CDIO工程教育为导向的人才培养体系建设”项目中的课题，也是四川省2013～2016年高等教育人才培养质量和教改建设项目．

本套系列教材主要以应用型科技人才培养为导向，以理工类专业需要为宗旨，在系统阐述微积分、线性代数、概率统计课程的基本概念、基本定理、基本方法的同时融入了很多经典的数学模型，重点强调数学思想与数学方法的学习，强调怎样将数学应用于工程实际．

本书主要介绍向量代数与空间解析几何、矩阵与行列式、线性方程组、相似矩阵与二次型以及相关的数学模型．

本书的编写具有如下特点：

1．在保证基础知识体系完整的前提下，力求通俗易懂，删除了繁杂的理论性证明过程；教材体系和章节的安排上，严格遵循循序渐进、由浅入深的教学规律；在对内容深度的把握上，考虑应用型科技人才的培养目标和学生的接受能力，做到深浅适中、难易适度．

2．在重要概念和公式的引入上尽量根据数学发展的脉络还原最质朴的案例，教材中引入的很多案例都是数学建模活动中或学生讨论课上最感兴趣的问题，其内容丰富、生动有趣、视野开阔、宏微兼具．这对于提高学生分析问题和解决问题的能力都很有帮助．

3．按章配备了难度适中的习题，并附有答案或提示．

全书讲授与讨论需64学时．根据不同层次的需要，课时和内容可酌情取舍．

本书由陈骑兵主编，第1章由李宝平编写，第2章由钱茜编写，第3章由李琼编写，第4章由陈骑兵编写．全书由陈骑兵负责统稿．

在本书的编写过程中，我们参阅了大量的教材和文献资料，在此向这些作者表示感谢.

由于编者水平有限，书中难免有缺点和不当之处，恳请同行专家和读者批评指正.

电子科技大学成都学院
数学建模与工程教育研究项目组
2014 年 10 月于成都

目　录

第 1 章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，利用坐标把平面上的点与一对有序数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

在一元函数微积分中，平面解析几何发挥了重要作用. 同样，在多元函数微积分中，空间解析几何将起到不可或缺的作用. 本章首先建立空间直角坐标系，并引入在自然科学和工程技术上有广泛应用的向量概念，从而以向量为工具，研究有关空间图形问题.

1.1　向　　量

1.1.1　空间直角坐标系

在空间中，任取定点 O，以 O 为原点作三条两两互相垂直的数轴，依次记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称为**坐标轴**. 三条坐标轴的正方向符合右手法则，即用右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 1.1 所示. 这样，就构成了一个空间直角坐标系.

点 O 称为坐标**原点**，三条坐标轴的任意两条确定的平面称为**坐标面**，分别称为 xOy 面、yOz 面、zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个**卦限**. 由 x 轴、y 轴、z 轴正向确定的那个卦限称为第一卦限，在 xOy 面上方的另外三个卦限按逆时针方向依次称为第二、三、四卦限. 在 xOy 面下方的四个卦限对应于第一、二、三、四卦限的正下方，分别称为第五、六、七、八卦限，这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(图 1.2).

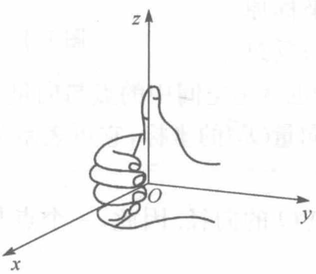

图 1.1

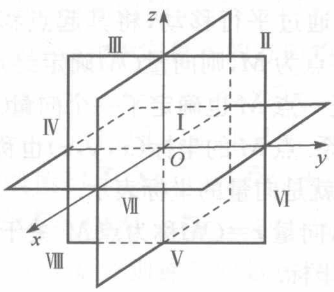

图 1.2

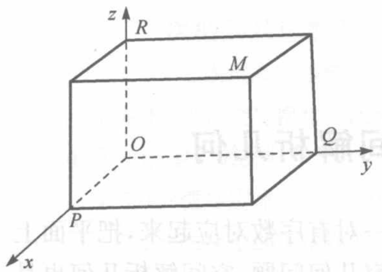

图 1.3

设 M 为空间中的任意一点，过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，记这三个平面与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别为 P,Q,R(图 1.3)，这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z. 于是空间中的点 M 就唯一地确定有序数组 (x,y,z).

反过来，对于任一有序数组 (x,y,z)，可在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，在过 P,Q,R 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这三个平面就会交于空间一点 M. 这样，一个有序数组又可唯一地确定空间中的一点.

从以上两方面可以看出，空间中的点 M 可与三元有序数组 (x,y,z) 建立一一对应，这个有序数组就称为点 x 的**坐标**，记为 $M(x,y,z)$，并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

特别地，在 x 轴、y 轴、z 轴上的点的坐标分别是 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；在坐标面 xOy 面、yOz 面、zOx 面上的点的坐标分别是 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$.

1.1.2 向量与向量的坐标表示

在日常生活中，常会遇到两种不同类型的量. 一类是只有大小的量，称为**数量**，如长度、面积、体积、质量等. 另一类是既有大小又有方向的量，称为**向量**，如速度、力、位移等.

在数学中，用有向线段表示向量. 以 A 为起点，B 为终点的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$，有时用黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 等表示(图 1.4).

在实际问题中，有的向量与起点有关，而有的向量与起点无关. 本书只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**，简称**向量**.

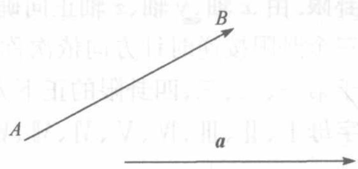

图 1.4

由于不考虑起点的位置，因而对任意给定的空间向量 $\boldsymbol{a}$，可通过平行移动，将其起点移到坐标原点 O，设其终点为 M，则向量 $\overrightarrow{OM}$ 确定终点 M；反过来，空间中任一点 M 也确定了一个向量 $\overrightarrow{OM}$，也就是空间中的点与向量之间建立了一一对应关系. 点 M 的坐标 (x,y,z) 也称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，它可表示为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，这就是向量的坐标表示.

特别地，向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 因此，一个点与该点的向径有相同的坐标.

1.1.3　向量的夹角、向量在定轴上的投影

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角规定为使其中一个向量与另一个向量方向一致时所需要旋转的最小角度，记为 $(\widehat{a,b})$，显然 $0\leqslant(\widehat{a,b})\leqslant\pi$.

向量与数轴、数轴与数轴的夹角可同样定义.

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴. M 为空间中任意一点，作向量 $\overrightarrow{OM}$，再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'，则 M' 称为 M 在 u 轴上的**投影**. 向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的分向量(图 1.5).

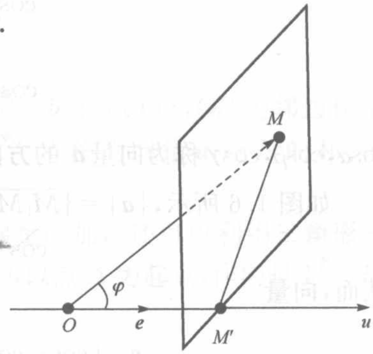

图 1.5

有向线段 $\overrightarrow{OM'}$ 的大小称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的**投影**，记作 $\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{OM}$ 或 $(\overrightarrow{OM})_u$.

$$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{OM}=\begin{cases}|\overrightarrow{OM'}|, & OM' \text{ 与 } u \text{ 同向},\\ -|\overrightarrow{OM'}|, & OM' \text{ 与 } u \text{ 反向}.\end{cases}$$

1.1.4　向量的模与方向余弦

向量的大小称为向量的**模**. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 和 $|\boldsymbol{a}|$. 特别地，模等于 1 的向量称为**单位向量**. 在空间直角坐标系中，通常将方向与 x 轴、y 轴、z 轴的正方向相同的单位向量记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，并称它们为基本单位向量. 模等于 0 的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的方向可看成任意的，并规定一切零向量都相等.

若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，则称 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为**相等向量**. 记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行或共线**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

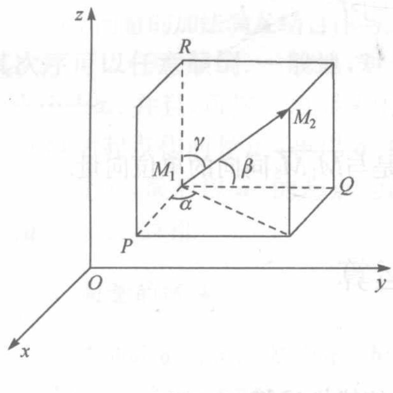

图 1.6

根据向量在定轴 u 上的投影定义，$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|a|\cos\varphi$，其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 $\boldsymbol{u}$ 的夹角.

任一非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 与三条坐标轴的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角(图 1.6). 显然 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi$. 设 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 (a_1,a_2,a_3)，由图 1.6 可知 a_1,a_2,a_3 分别为有向线段 $\overrightarrow{M_1P},\overrightarrow{M_1Q},\overrightarrow{M_1R}$ 的大小，也就是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 分别在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影. $a_1\boldsymbol{i},a_2\boldsymbol{j},a_3\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分向量. 所以

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|},$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.

如图 1.6 所示，$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. 由定义式可以看出

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

从而，向量

$$\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}\right)$$

是单位向量，它与向量 $\boldsymbol{a}$ 有相同的方向.

例 1.1.1 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 4，−4，7，求这个向量的起点坐标.

解 设起点坐标为 $A(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z)=(4,-4,7),$$

即

$$2-x=4,\quad -1-y=-4,\quad 7-z=7,$$

解得起点坐标为 $A(-2,3,0)$.

例 1.1.2 已知 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,-\sqrt{2})$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角及与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量.

解 $$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2,$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

于是方向角分别为 $\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{3\pi}{4}$.

$\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 即是与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量.

1.2 向量的运算

1.2.1 向量的线性运算

向量的加法和数与向量的乘法，统称为向量的**线性运算**.

在研究物体的受力时，作用于一个质点的两个力可以看成两个向量，它们的合力就是以这两个力作为相邻两边的平行四边形的对角线上的向量. 下面要讨论的向量的加法就是对合力这个概念在数学上的抽象和概括.

1. 向量的加法

已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，任意取一定点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，再以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $OACB$（图 1.7），则对角线上的向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

这种方法称为向量加法的**平行四边形法则**. 向量的加法还可以利用**三角形法则**得到：以空间任意一点 O 为起点，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，再以点 A 为起点，作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，如图 1.8 所示.

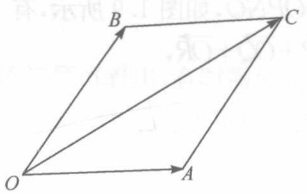

图 1.7

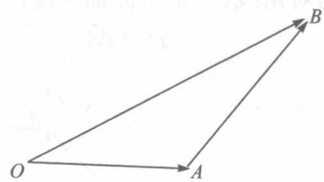

图 1.8

特别地，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或在同一条直线上，则规定：

(1) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，其和向量的方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相同，其模为两向量模之和.

(2) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，其和向量的方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中较长的向量的方向相同，其模为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中较大的模与较小的模之差.

向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法满足结合律与交换律，三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 之和就可以记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，其次序可以任意颠倒. 一般地，对于 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，它们的和可记作 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. 并且，可按三角形法则得到这 n 个向量相加的法则如下：以空间任意一点 O 为起点作向量 $\boldsymbol{a}_1$，再以 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点为起点作向量 $\boldsymbol{a}_2$，…，以 $\boldsymbol{a}_{n-1}$ 的终点为起点作向量 $\boldsymbol{a}_n$，最后以 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点为起点，$\boldsymbol{a}_n$ 的终点为终点作向量 $\boldsymbol{s}$，则 $\boldsymbol{s}$ 即是向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和.

2. 向量的减法

规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

特别地，当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，称为**数乘向量**，简称数乘，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

容易看出，数乘向量满足下列运算规律：

(1) **结合律**　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$，

(2) **分配律**　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

由数乘向量的定义，可得以下结论.

(1) 若 $\boldsymbol{a}$ 不是零向量，则 $\boldsymbol{a}$ 可表示成它的模 $|\boldsymbol{a}|$ 与它同向的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$ 的乘积，即 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

在空间直角坐标系中，设向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标为 (x,y,z)，则对应有点 M 使得 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，以 $\overrightarrow{OM}$ 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK$-$OPNQ$，如图 1.9 所示，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

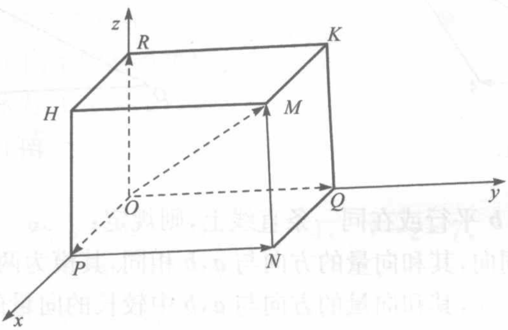

图 1.9

而 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，于是 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 因此，若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

利用向量加法的交换律与结合律，以及向量与数的乘法的结合律与分配律，可得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k},\quad \lambda \text{ 为实数},$$

即有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z),$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

由此可见,对向量进行加、减与数乘运算,只需对向量的各个坐标分别进行相应的运算.

1.2.2 数量积

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线产生位移 $\boldsymbol{s}$,由物理学知道,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 1.10).

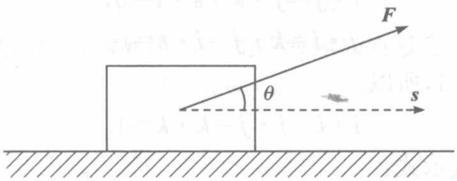

图 1.10

从该问题可看出,有时需要对两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 作这样的运算,运算的结果是一个数,它等于 $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

根据这个定义,上述问题中力所做的功 W 就是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积,即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

$|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{a,b})$,当 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影,用 $\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$ 表示这个投影,则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}.$$

同理,当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}.$$

两个向量的数量积等于其中一个向量的模与另一个向量在这个向量方向上的投影的乘积.

数量积符合下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

由数量积的定义容易得到以下结论.

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3) $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$,$\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.