文都教育®

2016

考研数学

客观题简化求解

毛纲源◎编著
考研数学命题研究组◎编

数学二

经典题型　紧扣大纲　帮你高效复习
方法新颖　技巧独特　助君考研成功

买书送课： 随书附送配套精品课程讲解
超值赠送：《客观题同步测试题》+网络答疑

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

文都教育®

2016

考研数学

客观题简化求解

数学二

毛纲源◎编著
考研数学命题研究组◎编

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

图书在版编目(CIP)数据

考研数学客观题简化求解. 数学二 / 毛纲源编著. — 武汉：华中科技大学出版社，2014.12
(毛纲源考研数学辅导系列)
ISBN 978-7-5609-9889-3

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①毛… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 290014 号

考研数学客观题简化求解(数学二)　　毛纲源　编著

策划编辑：王汉江(QQ:14458270)
责任编辑：王汉江
特约编辑：陈文峰　李　焕
封面设计：杨　安
责任监印：朱　霞
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915
录　　排：北京世纪文都教育科技发展有限公司
印　　刷：北京市通州运河印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：22
字　　数：550 千字
版　　次：2015 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：48.00 元

郑重声明

买正版图书　听精品课程

文都考研数学命题研究组编、毛纲源编著的《考研数学客观题简化求解(数学一)》《考研数学客观题简化求解(数学二)》《考研数学客观题简化求解(数学三)》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印毛纲源老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷;

4. 全国各地举报电话:010－88820419,13488713672

电子邮箱:tousu@ wendu. com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线(www. wendu. com)可听取文都名师精品课程。

华中科技大学出版社

北京世纪文都教育科技发展有限公司

授权律师:北京市安诺律师事务所

刘　岩

2015 年 1 月

前 言

考研数学试题中的客观题(填空题和选择题)是考研数学试题的重要组成部分. 它侧重考查考生对数学概念、数学定理(命题)的理解和掌握程度,并测试考生能否利用这些基本数学概念、数学定理(命题)进行简单推理. 由于客观题的试题数量在试卷中所占比例较大(接近试题总题量的三分之二),且其分值超过整个试卷总分的三分之一,如何快速准确地做好客观题,是考生为取得好成绩渴望得到解决的问题,这也是本书出版的目的.

本书为考研数学(二)中高等数学、线性代数部分内容,按照考纲的知识块进行分类,分为若干个章节. 每一章节(考纲知识块)又分为若干个小节(考点),结合历年来考研数学(二)的客观题及各个名校的有关试题对所考核的知识点(考点)的简化求解方法与技巧进行分类归纳与总结. 为使这些简化求解方法与技巧和常规套路的求解方法进行比较,不少例题给出多种求解方法,其中"解一"一般为简化求解方法. 为使考生掌握和应用这些简化求解方法和技巧,作者根据不同的知识点(考点)将其求解方法归纳整理成相应命题,便于考生应用,其中不少命题是作者教学经验的总结. 这些命题可在理解的基础上当作重要结论来记忆和应用. 这些命题的证明,不少渗透在相关题的解法上(常为"解二"). 它们是必须掌握的核心知识点.

本书中的分类简化求解方法与技巧不仅有助于快速准确地求解客观题,而且对解答题(计算题、证明题及应用题)的求解也能发挥重要作用.

为了把每个知识块复习好,本书以知识点(考点)为线索将同一知识点(考点)的填空题、选择题结合在一起进行讲解. 这样做的目的是使读者熟练掌握有关客观题简化求解方法与技巧,从而帮助考生快速、准确地求解客观题. 读者使用本书时,最好能自己先想再做,不要急于看解答,然后与书中求解方法比较. "注意"中的一些题外话也值得读者细心揣摩.

考生的数学成绩历来相差较大,这说明数学学科的考试,选拔性更加突出,常听到"得数学者得天下"的说法,这种说法虽不完全正确,但却充分说明考研中数学成绩的重要性. 近年来考生的失误并不是因为缺乏灵活的思维、敏锐的感觉,而恰恰是对考纲中规定的基础知识、基本理论的掌握还存在某些缺陷,甚至有所偏差所致. 希望考生按考纲要求系统、全面、踏实地复习.

真诚希望本书能陪伴读者度过难忘的备考复习时光,能够迅速提高应试能力,取得优异的考研成绩,圆考研成功梦,圆考入名校梦. 这是作者最大的心愿.

本书也可供大专院校在校学生学习数学时,阶段复习和期末复习使用.

编写本书时参阅了有关书籍,引用了一些例子,在此特向有关作者致谢.

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者指正.

编 者

于武汉理工大学

2015 年 1 月

题型说明

——客观题常用的解题方法与技巧简介

硕士研究生入学统一考试数学试题的题型有填空题、选择题和解答题(包括计算题、应用题和证明题)三种,其中填空题和选择题由于答案唯一,评分不受主观因素影响,能较客观地反映考生水平,常称为客观题.

从目前情况看,考生在客观题部分得分率较低,原因之一是考生对求解客观题的方法与技巧掌握得不够熟练,不能运用自如.

填空题绝大部分是计算题,但这里的计算题不像一般的计算题,它只看结果不看过程. 因而做填空题时必须非常小心,因为一旦答案出错就是零分. 若计算的准确率不高,填空题容易失分. 填空题也有不少是概念题,主要考查考生对一些最基本的概念、性质、公式掌握和运用的熟练程度及快捷、准确的运算能力,以及正确的判断能力和推理能力. 为此,做填空题时要根据题目的特点充分利用各种方法和技巧简化计算. 首先,要充分利用本书所归纳总结出的有关命题的结论,迅速、准确地写出答案;如果没有可直接利用的结论,那只好利用题设条件,推导出有关结果.

单项选择题(即四个选项中有且仅有一个选项是正确的,以下简称选择题)是研究生入学考试试卷的重要组成部分. 选择题大部分考查基本概念和基本理论. 如果基本概念和基本理论没有吃透,选择题部分也很容易失分. 另一方面,同一道题出成客观题后,它往往有更巧妙、更简单的方法求解. 当然,客观题用我们平时求解主观题的方法虽然也能求解,但这种一般方法和简单方法从解题时间上有时相差几倍甚至几十倍. 因此,要提高客观题部分的得分率,一方面要提高做计算题的准确率,吃透基本概念和基本理论;另外一个很重要的方面就是要掌握简化求解客观题的方法和技巧.

如何快速、准确地做好选择题,从而为后面的计算、论证和求解应用题留下较充裕的时间,这是考生能否取得高分的关键. 为此,首先要理解和记住本书各章节所介绍的命题结论,努力做到"见了试题的类型就能想到选用哪个命题",然后充分利用这些命题结论写出正确结果或判断四个选项中哪一个成立. 这将会极大地提高解题速度和正确率. 如果没有现成的结论可用,则可采用下述各法确定选项.

法一 直选法.

即利用命题、定理、定义等直接判断或验证某选项正确,则其余选项必不正确(不必验证).

法二 排错法.

即用推演法或观察法或反例法或赋值法等验证其中三个选项不正确,则剩下的一个选项必正确(但不必验证). 常用赋值法找出错误选项. 这里的赋值法是指利用满足题设条件的"特殊值"通过推理或验证找出错误选项.

对于题干中"有……必有……"或"当……时,必有……"或"对任意……必有……"或题干中所给函数为抽象函数时,常用赋值的方法找出反例,找出错误选项,确定正确选项.

例1 设函数 $f(x)$ 处处可导,则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

解 上例具有赋值法的明显特征"当……时,必有……",可采用反例排除. 取 $f(x)=x$ 时,则 $f'(x)=1$. 而

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty,\quad 但\quad \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}1=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty,\quad 但\quad \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}1=1,$$

可见(A)、(C)不正确. 再取 $f(x)=x^2$,则 $f'(x)=2x$. 故 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$,但 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+$

∞,可见(B)也不正确. 仅(D)入选.

法三　推演法.

它是指从题设条件出发运用有关概念、定理或命题经推理演算得出正确选项.

对于与基本概念或其性质有关的选择题,或题中的备选项为"数值"形式的项,或题干条件给出的是某种运算形式的项时,常用推演法确定正确选项.

例2　设函数$f(x)$在点x_0的某邻域内可导,且$f'(x_0)\neq 0$,则当$\Delta x\to 0$时,$f(x)$在点x_0处的增量与微分的差$\Delta y-\mathrm{d}y$是(　　).

(A) 比Δx高阶的无穷小,比Δy低阶的无穷小　　(B) 比Δx,Δy都低阶的无穷小

(C) 比Δx低阶的无穷小,比Δy高阶的无穷小　　(D) 比Δx,Δy都高阶的无穷小

解　由$f(x)$在点x_0处可导及微分的定义知

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),\quad \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x,\quad \Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x),$$

故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0,$$

即$\Delta y-\mathrm{d}y$是比$\Delta x(\Delta x\to 0)$高阶的无穷小. 又由$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\neq 0$知,$\Delta y$与$\Delta x(\Delta x\to 0)$是同阶无穷小. 再由无穷小阶的传递性知,$\Delta y-\mathrm{d}y$也是比$\Delta y$高阶的无穷小. 仅(D)入选.

法四　图示法.

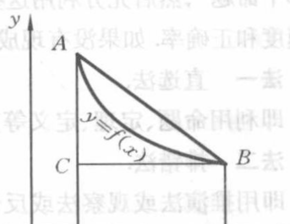
它是指根据题设条件作出有关问题的几何图形,然后借助几何图形的直观性得到正确选项,或将四个选项的关系画出图形,看哪一种关系符合题设条件,从而确定正确选项.

对于有明显几何意义的题设条件如对称性、奇偶性、周期性、单调性、凹凸性、渐近性等或题设给出图形面积、立体体积或在概率论中给出两事件的关系或概率关系等均可试用图示法求解.

例3　设在区间$[a,b]$上$f(x)>0$,$f'(x)<0$,$f''(x)>0$. 记$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$S_2=f(b)(b-a)$,$S_3=[(b-a)/2][f(a)+f(b)]$,则(　　).

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_1<S_3$　　(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_3<S_1$

解　由$f'(x)<0$,$f''(x)>0$知$f(x)$的图形在区间$[a,b]$上单调减小凹向,作出其图形,如右图所示. 连接弦AB,过点B作平行于x轴的直线与过点A的垂线交于C. 显然,梯形$ABba$的面积为S_3,矩形$CBba$的面积为S_2,曲边梯形$ABba$的面积为S_1,则$S_2<S_1<S_3$. 仅(B)入选.



法五　代入法.

将备选项逐一代入题设条件,验证哪个选项正确.

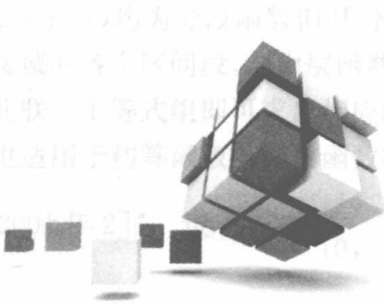
该法适用于备选项为具体"数值"形式的项,且题干中又含有验证条件,而验证又比较简单.

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇 线性代数

第一篇　高等数学



1.1 函数、极限、连续

1.1.1 函数及其性质

1.1.1.1 求复合函数的表达式

求复合函数表达式可按复合函数的定义求之. 已知 $f(x)$, $g(x)$, 求 $f[g(x)]$(或 $g[f(x)]$).

常用代入法求之:将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替. 此法适用于初等函数的复合,也适用于分段函数的复合. 特别当 $f(x)$, $g(x)$ 均为分段函数且其分段点相同时,用代入法可简化求解,得到 $f[g(x)]$(或 $g[f(x)]$)的表达式. 求 $f[g(x)]$时,值得特别注意的是 $g(x)$的值域与$f(x)$的定义域的对应关系.

当 $f(x)$, $g(x)$均为分段函数但其分段点不同时,仍可用代入法求解. 求解时要抓住最外层函数定义域的各个区间段,与内层函数值域的对应关系列出自变量所满足的对应不等式组. 通过求解此联立不等式组即可求出相应的定义域.

此法也适用于初等函数与分段函数的复合.

例 1[2001 年 2]* 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=($ $)$.

(A) 0 (B) 1 (C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ (D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

解 由题设得

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1;\end{cases} \quad ①$$

$$f\{f[f(x)]\}=\begin{cases}1, & |f[f(x)]|\leqslant 1,\\ 0, & |f[f(x)]|>1.\end{cases} \quad ②$$

而由 $f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\leqslant 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$ 可知, $|f(x)|\leqslant 1$. 再由式①知, $f[f(x)]=1$, 即 $|f[f(x)]|=1$. 由式②知, $f\{f[f(x)]\}=1$. 仅(B)入选.

例 2 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]$为( ).

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

解 所给函数 $f(x)$, $g(x)$均为分段函数,且其分段点相同,只需用代入法即可简化求解.

当 $x<0$ 时, $f(x)=x^2>0$, 则 $g[f(x)]=f(x)+2=x^2+2$;

当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=-x\leqslant 0$, 则 $g[f(x)]=2-f(x)=2-(-x)=2+x$, 故

* 例 1[2001 年 2]表示该例(或该习题)为 2001 年数学二的考题. 下同.

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$ 仅(D)入选.

例 3 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<4,\\ x, & 4\leqslant x\leqslant 6,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<2,\\ 2+x, & 2\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$ 则 $f[g(x)]=$______.

解 用代入法求之. $f[g(x)]=\begin{cases}\sqrt{g(x)}, & 0\leqslant g(x)<4,\\ g(x), & 4\leqslant g(x)\leqslant 6.\end{cases}$

(1) 当 $g(x)=x^2$ 时, $f[g(x)]=\sqrt{x^2}$. 由 $\begin{cases}0\leqslant x^2<4\\ 0\leqslant x<2\end{cases}$ 推知 $0\leqslant x<2$,故

$$f[g(x)]=x \quad (0\leqslant x<2).$$

当 $g(x)=2+x$ 时,因 $\begin{cases}0\leqslant 2+x<4\\ 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ 无解,故 $f[g(x)]$ 无意义.

(2) 当 $g(x)=x^2$ 时, $f[g(x)]=g(x)=x^2$. 由于 $\begin{cases}4\leqslant x^2\leqslant 6\\ 0\leqslant x<2\end{cases}$ 无解,故 $f[g(x)]$ 无意义.

当 $g(x)=2+x$ 时,由 $\begin{cases}4\leqslant 2+x\leqslant 6\\ 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ 解得 $2\leqslant x\leqslant 4$,则 $f[g(x)]=g(x)=2+x$ $(2\leqslant x\leqslant 4)$,故

$$f[g(x)]=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<2,\\ 2+x, & 2\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

1.1.1.2 判别函数的有界性

定义 1.1.1.1 如果存在正数 M,使得对任一 $x\in I$(I 表示区间),都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

由上述定义易知,函数的有界性是相对于某个区间而言的.

1. 判别函数有界

除用上述定义外,还常利用下述诸命题判别之.

命题 1.1.1.1 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调增加(或单调减少),则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界.

命题 1.1.1.2 (1) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界.

(2) 如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界.

(3) 如果在自变量 x 的某一变化过程中变量 y 有极限,则变量 y 是有界变量.

(4) 如果导函数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 内有界,则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界.

例 4 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在区间(　　)内有界.

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

解 因 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=+\infty$,

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-1)(x-2)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-1)(x-2)}=+\infty.$$

由命题 1.1.1.7 知，$f(x)$在区间$(0,1)$及$(1,2)$，$(2,3)$内均无界. 由于下述极限存在，即

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 2}{4},\quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)=-\frac{\sin 3}{18},$$

又 $f(x)$在区间$(-1,0)$内连续，故由命题 1.1.1.2(2)知，$f(x)$在区间$(-1,0)$内有界. 仅(A)入选.

例 5 设 $f(x)$在区间$[a,+\infty)$内连续，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$(常数)是 $f(x)$在区间$[a,+\infty)$内有界的(　　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

解 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的定义知，存在 $x_0>a$，使当 $x\in[x_0,+\infty)$时，$f(x)$有界(见命题 1.1.1.2(3)). 又 $f(x)$在区间$[a,x_0]$上连续，由命题 1.1.1.2(1)知 $f(x)$在区间$[a,x_0]$上有界. 因而 $f(x)$在区间$[a,+\infty)$内有界，但若$f(x)$在区间$[a,+\infty)$内有界，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不一定存在. 例如，$f(x)=\sin x$ 有界，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在，因而仅(A)入选.

例 6 $f(x)=xe^{-x^2}(2-\cos x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内是(　　).

(A) 有界偶函数　　(B) 无界偶函数　　(C) 有界奇函数　　(D) 无界奇函数

解 在区间$(-\infty,+\infty)$内，x 是奇函数，$e^{-x^2}(2-\cos x)$是偶函数，故其乘积 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内是奇函数.

又因$|2-\cos x|\leqslant 3$，从而 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内是否有界取决于 $g(x)=xe^{-x^2}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是否有界. 因 $g(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续，由 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x^2}}=0$，

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{x^2}}=0$ 及命题 1.1.1.2(2)知，$g(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内有界. 因而，$f(x)$是区间$(-\infty,+\infty)$内有界的奇函数. 仅(C)入选.

2. 判别函数无界

判别函数无界时，要注意无界函数与无穷大的联系与区别：在一定的变化趋势下，$f(x)$为无穷大量，则 $f(x)$必无界. 反之，若 $f(x)$在某个区间上无界，不一定为无穷大量.

可用下述诸命题判别函数无界.

命题 1.1.1.3 若在自变量的某变化过程中，函数表示式中含有“∞”因子而无确定的“0”因子，则此函数必无界，但不一定为无穷大量.

命题 1.1.1.4 多个函数乘积组成的函数，如果其中至少有一个函数在区间 I 上无界，而又无确定的“0”因子函数，则该函数乘积一般在该区间上无界，但不一定为无穷大量.

上述命题是判别(识别)无界函数的一种直观方法.

命题 1.1.1.5 如果 $x_0\in(a,b)$，而 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则 $f(x)$在区间(a,b)内无界.

命题 1.1.1.6 有界变量与无穷大量之积为无界变量，但不一定是无穷大量.

命题 1.1.1.7 (1) 函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}(x_n\in I)$，使 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大数列；(2) 数列 $\{x_n\}$ 无界的充要条件是存在无穷大子列.

由以上命题易知，为证函数或数列无界，只需找出一个无穷大量子列.

又由无穷大量的定义知，为证函数或数列不是无穷大量，只需找出一个收敛子列，因而为证函数或数列无界但又不是无穷大量，只需同时找出一个无穷大子列和一个收敛子列.

例 7 当 $x\to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是(　　).

(A) 无穷小　　(B) 无穷大

(C) 有界的，但不是无穷小　　(D) 无界的，但不是无穷大

解一 因 $\lim\limits_{x\to 0}(1/x^2)=\infty$，$1/x^2$ 为无穷大量，$\sin(1/x)$ 为有界变量，由命题 1.1.1.6 知，$(1/x^2)\cdot\sin(1/x)$ 为无界变量，但不是无穷大量. 仅(D)入选.

解二 因 $x\to 0$ 时，$1/x^2\to\infty$，即 $1/x^2$ 为无穷小量，而又无确定的零因子，由命题 1.1.1.3 即知 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 为无界变量，但不是无穷大. 仅(D)入选.

例 8 设 $x_n=\begin{cases}(n^2+\sqrt{n})/n & (n\text{ 为奇数}),\\ 1/n & (n\text{ 为偶数}),\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 是(　　).

(A) 无穷大量　(B) 无穷小量　(C) 有界变量　(D) 无界变量

解 因 n 为奇数时，$x_n=(n^2+\sqrt{n})/n=n+1/\sqrt{n}\to+\infty\ (n\to+\infty)$；$n$ 为偶数时，$x_n=1/n\to 0\ (n\to+\infty)$，故当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 既不是无穷大量，也不是无穷小量和有界变量，而是无界变量. 仅(D)入选.

例 9 下列函数中在区间 $[1,+\infty)$ 内无界的是(　　).

(A) $f(x)=x^2\sin(1/x^2)$　　(B) $f(x)=\sin x^2+(\ln^2 x)/\sqrt{x}$

(C) $f(x)=x\cos\sqrt{x}+x^2e^{-x}$　　(D) $f(x)=\arctan(1/x)/x^2$

解一 找出函数 $f(x)$ 的一个无穷大数列，利用命题 1.1.1.7(1)判别之. 为此取数列 $\{x_n\}=\{n^2\pi^2\}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. 对于(C)中函数有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(n^2\pi^2\cos n\pi+n^4\pi^4e^{-n^2\pi^2})=\infty.$$

由命题 1.1.1.7(1)知，(C)中 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上无界.

解二 (A)、(B)、(D)中三函数都有界. 因 $x\to+\infty$ 时，它们都有极限，由命题 1.1.1.2(3)知，它们都有界. 事实上，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)\Big/\frac{1}{x^2}=1$，(A)中函数在区间 $[1,+\infty)$ 内有界. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln^2 x/\sqrt{x}=0$，(B)中函数在区间 $[1,+\infty)$ 内有界. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\arctan(1/x)/x^2]=0$，(D)中函数在区间 $[1,+\infty)$ 内有界. 于是仅(C)入选.

3. 利用函数的无界性判别函数极限的存在性

常用下述命题判别之.

命题 1.1.1.8 (1) 若 $\lim f(x)$ 存在，$\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 一定不存在，