龙门品牌 学子至爱

LongMen

龙门专题

函数

高中数学

主　　编　傅荣强
本册主编　傅荣强

龍門書局
www.Longmenbooks.com

龙门专题

函　数

高中数学

主　　编：傅

本册主编：傅

编　　者：许

闫淑萍　蒋付娟　王林芳

曲永芳　黄丽岩　于桂香

张宇霞　邱爽明　丁　一

王利民　赵影秋　侯春生

谭彩新　初海涛　徐艳霞

徐国芹

龍門書局

北　京

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题:新课标.高中数学.函数/傅荣强主编;傅荣强本册主编.—北京:龙门书局,2010.7
ISBN 978-7-5088-2510-6

Ⅰ.①龙… Ⅱ.①傅… Ⅲ.①数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第142265号

责任编辑:马建丽 王 乐 刘 婷/封面设计:耕 者

龍 門 書 局 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
www.longmenbooks.com
大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社总发行 各地书店经销
*
2010年7月第 一 版 开本:A5(890×1240)
2010年7月第一次印刷 印张:7 3/4
字数:277 000

定 价:15.00元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

策划者语

生命如歌

未名湖畔，博雅塔旁。

明媚的晨光穿透枝叶，懒散地泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋的是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静地坐着，那是求索知识的学子……

在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨也是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主，还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们“状元”的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的“状元”梦想？

在来来往往带他们巡讲的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都有一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。

小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了”。她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大

年三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到39度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分684分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年6.4万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，被全球最大的软件公司MICROSOFT聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈地努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考上清华或北大吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何将一套优良的学习方法内化到图书中，让同学们在不知不觉中轻松、快速地获取高分。这就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。

《龙门专题》走向名校的阶梯！

总策划 《龙门专题》策划组

2010年8月

《龙门专题》状元榜

赵永胜 2007年山西省文科状元

中国人民大学财政金融学院
星座：射手座
喜欢的运动：爬山　乒乓球
喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》
人生格言：生命不息，奋斗不止
学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢"地基"，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信"天道酬勤，勤能补拙"。

卢　毅 2006年浙江省理科状元

北京大学元培学院
星座：天秤座
喜欢的运动：跑步　滑板
喜欢的书：《卡尔维诺文集》
人生格言：做自己
学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作一个系统地梳理，无论是预习还是复习，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。

武睿颖 2005年河北省文科状元

北京大学元培学院
星座：天秤座
喜欢的运动：游泳　网球
喜欢的书：*A Thousand Splendid Suns*
人生格言：赢得时间，赢得生命
学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习方法，如制定学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。

刘诗泽 2005年黑龙江省理科状元

北京大学元培学院
星座：金牛座
喜欢的运动：篮球　台球　排球
喜欢的书：《三国演义》
人生格言：战斗到最后一滴血
学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。

邱　汛 2005年四川省文科状元

北京大学
星座：处女座
喜欢的运动：篮球　乒乓球
喜欢的书：《哈利·波特》
人生格言：非淡泊无以明志，非宁静无以致远
学习方法、技巧：1. 要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务和激烈的竞争。2. 学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3. 学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4. 坚持锻炼，劳逸结合。

林　叶 2005年江苏省文科状元

北京大学
星座：水瓶座
喜欢的运动：跑步　台球　放风筝
喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》
人生格言：不经省察的生活不值得过
学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。

田　禾 2005年北京市理科状元

北京大学元培学院
星座：水瓶座
喜欢的运动：羽毛球
喜欢的书：历史类书籍
人生格言：认真、坚持
学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。

朱师达 2005年湖北省理科状元

北京大学元培学院
星座：水瓶座
喜欢的运动：足球　篮球　游泳
喜欢的书：《追风筝的人》《史记》
人生格言：有梦想就有可能，有希望就不要放弃
学习方法、技巧：1. 知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2. 知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3. 整体把握兴趣和强弱科的平衡。4. 正确认识自己的弱点，集中力量克服它。

编委会

Contents

目录

基 础 篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简而言之是研究“数”和“形”的学科. 代数是它侧重研究运算方法的一个分支，函数是代数的一个节点.

函数的本质是研究两个非空数集变量之间的对应关系.

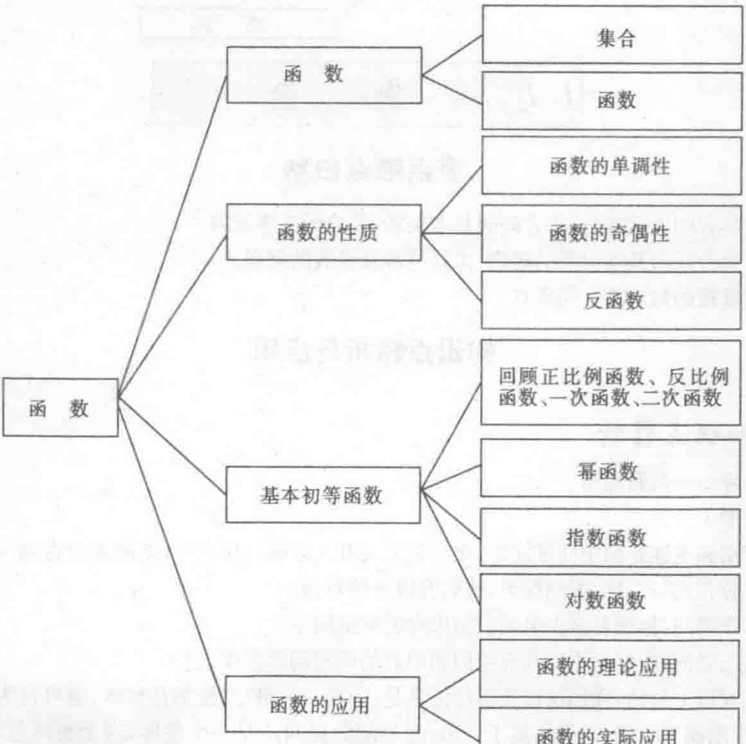
函数研究的主要问题是：

(1)根据已知条件，求出函数的解析式(表格、图象)；

(2)通过函数的解析式(表格、图象)，研究函数的性质.

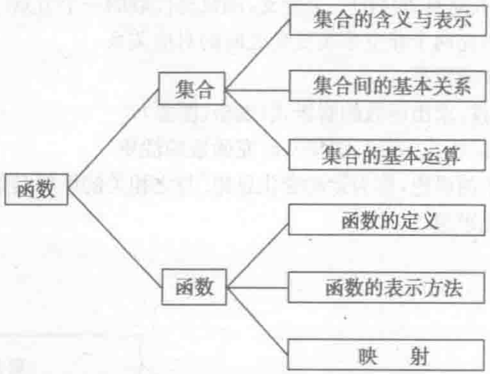
由函数派生出来的思想，称为运动变化思想. 与之相关的思想是数形结合思想、分类讨论思想及等价转化思想.

本书知识框图



第一讲 函 数

本讲知识框图



1.1 集 合

重点难点归纳

重点 集合的表示方法,集合间的基本关系,集合的基本运算.

难点 集合间的基本关系的运用,尤其是涉及参数的问题.

本节需掌握的知识点 同重点.

知识点精析与应用

知识点精析

思考——问题提出

问题 1

李刚和王强是初中同班同学,今年两人又升入了同一所高中,李刚被分在高一一班,王强被分在高一二班.报到那天,他们有以下的对话:

①李刚问:你班有多少名咱们初中时的同班同学?

②王强问:咱们两班一共有咱们初中时的同班同学多少人?

通过以上对话,我们可以获得的信息是:①高一一班、二班都是整体,也可视为全体、总体,李刚属于一班,王强不属于一班;②李刚的提问还是一个整体,这个整体包含于高一二班那个整体;③王强的提问实际上是两个整体的合并.

问题 2

给出三组数,即

A:2,4,6,8,10;

B:1,2,3,5,7,9,10;

U:1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.

①8 属于数组 A、B 吗?

②数组 A、B 包含于数组 U 吗?

③数组 A、B 合并在一起,其结果是什么?

④既是数组 A 中的数又是数组 B 中的数,可以组成一个怎样的数组?

⑤在 U 中去掉 A,剩余部分是一个怎样的数组?

探究——抽象概括

问题 1、问题 2 告诉我们,收集研究对象是数学活动的第一步.我们这里要学习的集合,其目的就是收集研究对象,而后规范被收集对象的表达形式,探究其中的规律.

1. 集合的含义与表示

(1)集合的含义

一般地,我们把被研究的对象称为元素,把一些元素组成的总体(或称全体、整体)叫做集合,简称为集.

通常用 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用 $a,b,c,\cdots$ 表示元素.如果 a 是 A 中的元素,就说 a 属于 A,记为 $a\in A$;如果 b 不是 B 中的元素,就说 b 不属于 B,记为 $b\notin B$.

为了方便,对常用的数集约定如下:

全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集),记作 $\mathbf{N}$;

所有正整数组成的集合称为正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;

全体整数组成的集合称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$;

全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;

全体实数组成的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

(2)集合的表示方法

①列举法

由数 2,4,6,8,10 组成的集合可表示为$\{2,4,6,8,10\}$.

像这样把集合的元素一一列举出来写在大括号(或称花括号)内表示集合的方法叫做列举法.

②描述法

满足条件 $x+1<0$ 的实数 x 的集合可表示为 $A=\{x|x<-1\}$;

方程 $x^2-3x-4=0$ 的解的集合(简称解集)可表示为 $B=\{x\in\mathbf{R}|x^2-3x-4=0\}$;

一次函数 $y=2x-1$ 的图象是一条直线,这条直线可表示为 $C=\{(x,y)|y=2x-1\}$.

像以上三例这样,用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法.

描述法还可以这样叙述,用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合.

表示有限集,即表示含有有限个元素的集合,一般用列举法;表示无限集,即表示含有无限个元素的集合,一般用描述法.

③空集

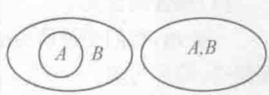
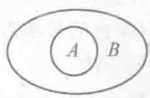
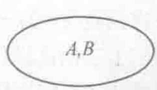
有一种集合很特殊,例如,$\{x\in\mathbf{R}|x^2+3=0\}$,$\{x\in\mathbf{R}|x^2<0\}$,$\{(x,y)|y=x^2$,且 $y=x-1\}$,这样的集合不含有任何元素,但却依然有它的存在价值.

我们把不含任何元素的集合叫做空集,记为$\varnothing$.

2. 集合间的基本关系

集合间的基本关系包含三个问题,即子集、真子集、相等.为了方便,我们把它们归纳在一个表格里(表1-1),供参考.

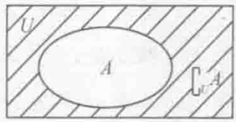
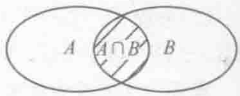
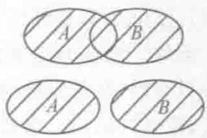
表1-1 集合间的基本关系

	定义	性质与说明	韦恩图
子集	如果非空集合A中的任何一个元素都是集合B的元素,那么集合A叫做集合B的子集,记作$A\subseteq B$(或$B\supseteq A$). 规定:$\varnothing\subseteq A$(A是任意集合)	①$A\subseteq A$; ②$\varnothing\subseteq A$; ③若$A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则$A\subseteq C$; ④含有n个元素的集合的子集的个数是2^n; ⑤A不是B的子集,记作$A\nsubseteq B$	
真子集	如果A是B的子集,且非空集合B中至少有一个元素不属于A,那么集合A叫做集合B的真子集,记作$A\subsetneqq B$(或$B\supsetneqq A$)	①空集是任何非空集合的真子集; ②若$A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$,则$A\subsetneqq C$; ③含有n个元素的集合的真子集的个数是2^n-1	
集合相等	对于两个集合A与B,如果$A\subseteq B$,同时$B\subseteq A$,我们就说这两个集合相等,记作$A=B$	①$\varnothing=\varnothing$; ②两个相等的非空集合A和B,它们的元素是完全相同的	

3. 集合的基本运算

集合的基本运算包括三类,即补运算、交运算和并运算.为了使用上的需要,我们也把它们写在一个表格里(表1-2),供参考.

表 1-2　集合的基本运算

	定义	性质与说明	韦恩图
补集	已知全集 U（非空集），集合 $A\subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在 U 中的补集，记作 $\complement_U A$ 即 $\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$	①$\complement_U(\complement_U A)=A$； ②$\complement_U\varnothing=U$； ③$\complement_U U=\varnothing$	
交集	由所有属于非空集合 A 且属于非空集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$. 规定：$\varnothing\cap A=\varnothing$，$A$ 是任意集合	①$A\cap\varnothing=\varnothing$； ②$A\cap A=A$； ③$A\cap B=B\cap A$； ④$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$； ⑤若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$；反之，若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$. 简记为 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$	
并集	由属于非空集合 A 或属于非空集合 B 的所有元素组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$，或 $x\in B\}$. 规定：$\varnothing\cup A=A$，A 是任意集合	①$A\cup\varnothing=A$； ②$A\cup A=A$； ③$A\cup B=B\cup A$； ④$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$； ⑤$A\cup(\complement_U A)=U$； ⑥$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$； ⑦$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$. ⑧若 card($M$) 代表集合 M 的元素的个数，则 card($A\cup B$)＝card(A)＋card(B)－card($A\cap B$)	

解题方法指导

1. 集合的含义与表示

学习集合，意在收集数学对象，以确定数学问题的定义范围. 在本阶段的学习中，要把握住两点，一是准确地表达一些对象构成的集合；二是判断某个或某些元素是否属于这样的集合.

[例1] 判断下列各组对象能否构成集合？对能构成集合的，分别指出属于它和不属于它的一个元素：

(1)满足 $1<2x-1\leqslant 3$ 的实数 x；

(2)方程 $x^2-2x+1=0$ 的解；

(3)满足 $x\in\mathbf{Z}$ 且 $-2<x\leqslant 0$ 的 x；

(4)抛物线 $y=x^2$ 上的所有点；

(5)函数 $y=\dfrac{2020}{x}$ 的值.

解 (1)满足 $1<2x-1\leqslant 3$ 的实数 x 能构成集合，这个集合是 $A=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$，其中 $2\in A$，$1\notin A$.

点评 一个集合确定了，它的元素也就确定了，这一性质称为元素的确定性. 如，$A=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$ 确定了，它的元素也就确定了，对 $\dfrac{3}{2}$ 和 3，我们可以确定 $\dfrac{3}{2}\in A$，$3\notin A$.

(2)方程 $x^2-2x+1=0$ 的解能构成集合，这个集合是 $B=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2x+1=0\}=\{x\mid (x-1)^2=0\}=\{1\}$，其中 $1\in B$，$0\notin B$.

点评 从重根的角度讲，方程 $x^2-2x+1=0$ 有二重根 $x=1$. 方程的解集我们写成了 $\{1\}$，而没有写成“$\{1,1\}$”，这是为了确保集合中的任何两个元素互异，这一性质称为元素的互异性. 一般地，集合中的元素都是互异的.

(3)满足 $x\in\mathbf{Z}$ 且 $-2<x\leqslant 0$ 的 x 能构成集合，这个集合是 $C=\{-1,0\}=\{0,-1\}$，其中 $0\in C$，$1\notin C$.

点评 $\{-1,0\}=\{0,-1\}$ 表明，集合中的元素是无序的，这一性质称为元素的无序性.

(4)抛物线 $y=x^2$ 上的所有点能构成集合，这个集合是 $D=\{(x,y)\mid y=x^2\}$，其中 $(2,4)\in D$，$(2,3)\notin D$.

点评 集合 D 是点集，所以竖线前面我们写成“(x,y)”，这是用坐标表示点. 这个例子告诉我们，写集合时，竖线前面写什么，要看这个集合是由什么样的元素构成的，由点构成，写成“(x,y)”，由实数构成，写成“x”，由函数值构成，写成“y”. (x,y)、x、y 一般被称为代表元素.

(5)函数 $y=\dfrac{2020}{x}$ 的值能构成集合，这个集合是 $E=\left\{y\,\middle|\, y=\dfrac{2020}{x}\right\}$，其中 $2020\in E$ $(x=1)$，$0\notin E$.

点评 本例中，代表元素写成“x”是不妥的，尽管函数值也是实数.

2. 集合间的基本关系

集合间的基本关系是一种包含与非包含的关系. $A\subseteq B$，是指对任一 $x\in A$，都有 $x\in B$；$A\subsetneqq B$，是指 $A\subseteq B$，且至少有一个 $x\in B$ 使得 $x\notin A$；$A=B$，是指 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$. A 不是 B 的子集，记为 $A\nsubseteq B$.

要注意两组符号“$\in$，$\notin$”与“$\subseteq$，$\subsetneqq$，$\nsubseteq$”在用法上的区别，前者用在元素与集合之间，后者用在集合与集合之间.

［例2］ 用适当的符号填空：

(1)2 ________ $\{x|x^2-4x+4=0\}$；

(2)$\{x|3\leqslant x<4\}$ ________ $\{x|6\leqslant 2x\leqslant 8\}$；

(3)$\varnothing$ ________ $\{x\in\mathbf{Z}|0<x<3\}$ ________ $\{x|(x-1)(x-2)=0\}$ ________ $\{y|y=-x,x\in\mathbf{Z},且-3<x<3\}$.

分析 要注意，元素与集合之间的关系是从属关系，集合与集合之间的关系是包含关系，在符号的选用上是有区别的.

解 (1)$\{x|x^2-4x+4=0\}=\{x|(x-2)^2=0\}=\{2\}$，它是一个集合，2 是一个元素.
在空白处填“$\in$”.

(2)$\{x|6\leqslant 2x\leqslant 8\}=\{x|3\leqslant x\leqslant 4\}$.

当 $x\in\{x|3\leqslant x<4\}$时，$x\in\{x|3\leqslant x\leqslant 4\}$；但 $4\in\{x|3\leqslant x\leqslant 4\}$时，$4\notin\{x|3\leqslant x<4\}$.
在空白处填“$\subsetneqq$”.

(3)$\{x\in\mathbf{Z}|0<x<3\}=\{1,2\}$；$\{x|(x-1)(x-2)=0\}=\{1,2\}$；$\{y|y=-x,x\in\mathbf{Z},且-3<x<3\}=\{y|y=-x,x=-2,-1,0,1,2\}=\{2,1,0,-1,-2\}$.

在空白处依次填$\subsetneqq$，=，$\subsetneqq$.

［例3］ 已知 $A=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y|y=4m\pm1,m\in\mathbf{Z}\}$，求证 $A=B$.

分析 只需证明 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$. 从讨论 $2n+1$ 与 $4m\pm1$ 的关系入手即可.

证明 $2n+1$，$n\in\mathbf{Z}$，表示所有的奇数；$4m+1$，$m\in\mathbf{Z}$，表示奇数的一部分；$4m-1$，$m\in\mathbf{Z}$，也表示奇数的一部分.

对 $y\in B$，有 $y\in A$，

所以 $$B\subseteq A.$$

对 $x\in A$，有 $x=2n+1$，$n\in\mathbf{Z}$.

①$n=2k$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$x=2(2k)+1=4k+1$，$k\in\mathbf{Z}$，$x\in B$；

②$n=2k-1$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$x=2(2k-1)+1=4k-1$，$k\in\mathbf{Z}$，$x\in B$.

①、②表明，对 $x\in A$，有 $x\in B$.

所以 $$A\subseteq B.$$

综上，有 $$A=B.$$

3. 集合的基本运算

集合的基本运算包括三种，即 $A\cup B=\{x|x\in A,或\ x\in B\}$；$A\cap B=\{x|x\in A,且\ x\in B\}$；$\complement_U A=\{x|x\in U,且\ x\notin A\}$，其中 $A\subseteq U$.

［例4］ 已知全集 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1\}$，$B=\{2,3\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$\complement_I A$，$\complement_I B$，$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$，$\complement_I[(\complement_I A)\cup(\complement_I B)]$.

分析 据集合的“并、交、补”做答.

解 ∵ 全集 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1\}$，$B=\{2,3\}$，

$\therefore A\cup B=\{1,2,3\}$；$A\cap B=\varnothing$；$\complement_I A=\{2,3,4,5,6\}$；$\complement_I B=\{1,4,5,6\}$；$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\{4,5,6\}$.

又$\because$ $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=\{1,2,3,4,5,6\}$，

$\therefore$
$$\complement_I[(\complement_I A)\cup(\complement_I B)]=\varnothing.$$

［例5］ 设$A=\{2,-1,x^2-x+1\}$，$B=\{2y,-4,x+4\}$，$C=\{-1,7\}$，且$A\cap B=C$，求x与y的值.

分析 从$A\cap B=C$切入，先确定x^2-x+1，再对$x+4$进行分析，而后y的值就明确了.

解 $A=\{2,-1,x^2-x+1\}$，$B=\{2y,-4,x+4\}$，$C=\{-1,7\}$.

由$A\cap B=C$，得

$$7\in A,7\in B,-1\in B.$$

这时A中$x^2-x+1=7$已经确定，B中$2y$、$x+4$一个为7，另一个为-1，谁为7、谁为-1？待定.

$\therefore$ 在A中，$x^2-x+1=7$，

$\therefore$
$$x=-2,3.$$

当$x=-2$时，在B中$x+4=2$.

又$\because$ $2\in A$，

$\therefore$
$$2\in A\cap B,$$

但$2\notin C$，

$\therefore x=-2$不合题意.

当$x=3$时，在B中$x+4=7$，

$\therefore$
$$2y=-1,y=-\frac{1}{2}.$$

综上，有

$$x=3,y=-\frac{1}{2}.$$

［例6］ 已知$A=\{x|x^2\geqslant 9\}$，$B=\{x|\frac{x-7}{x+1}\leqslant 0\}$，$C=\{x||x-2|<4\}$.

(1)求$A\cap B$及$A\cup C$；

(2)设$I=\mathbf{R}$，求$A\cap[\complement_I(B\cap C)]$.

分析 先将A、B、C具体化，然后根据交集、并集、补集的定义求解结果.

解 由$x^2\geqslant 9$，得

$$x\geqslant 3\text{ 或 }x\leqslant -3,$$

$\therefore$
$$A=\{x|x\geqslant 3\text{ 或 }x\leqslant -3\}.$$

又由不等式$\frac{x-7}{x+1}\leqslant 0$，得

$$-1<x\leqslant 7,$$

$\therefore$
$$B=\{x|-1<x\leqslant 7\}.$$

又由$|x-2|<4$，得

$$-2<x<6,$$

$\therefore$ $$C=\{x|-2<x<6\}.$$

(1)$A\cap B=\{x|3\leqslant x\leqslant 7\}$，如图 1-1A .

$A\cup C=\{x|x\leqslant -3,或\ x>-2\}$，如图 1-1B .

A　　　　　　　B

图 1-1

(2)$\because$ $I=\mathbf{R}, B\cap C=\{x|-1<x<6\}$，

$\therefore$ $$\complement_I(B\cap C)=\{x|x\leqslant -1,或\ x\geqslant 6\},$$

$\therefore$ $$A\cap[\complement_I(B\cap C)]=\{x|x\leqslant -3,或\ x\geqslant 6\}.$$

点评　本例的第(1)小题中，从图上不难看出，纵向去数横线，两条横线者为“交集”，至少有一条横线者为“并集”，这样的解答方法具有一般性. 三条横线、四条横线，如何确定交集、并集呢？

［例 7］　已知集合 $A=\{x|x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 a 的取值范围(其中 $\mathbf{R}^+=\{正实数\}$).

分析　集合 A 是方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 的实根的集合，由于该方程中含有参数 a，所以，对该方程的实根的存在性应进行讨论.

解　$A=\{x|x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，

所以，$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$ 等价于方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 没有实根(即 $A=\varnothing$)，或者只有非正实根.

(1)当 $A=\varnothing$ 时，即方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 无实数根时，有

$$\Delta=(a+2)^2-4<0,-4<a<0.$$

(2)当方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 只有非正实数根时，有

$$\begin{cases}\Delta=(a+2)^2-4\geqslant 0,\\ -(a+2)\leqslant 0,\end{cases}\quad a\geqslant 0.$$

由(1)、(2)，得

$$a>-4,$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\{a|a>-4\}$.

［例 8］　设 $m,n\in\mathbf{N}^*$，$m>n$，$A=\{1,2,\cdots,m\}$，$B=\{1,2,\cdots,n\}$.

(1)求 $C=\complement_A B$，并回答 C 有多少个子集；

(2)满足 $D\subseteq A$ 且 $B\cap D\neq\varnothing$ 的 D 有多少个？

分析　含有 n 个元素的集合共有 2^n 个子集.

解　(1)由 $m,n\in\mathbf{N}^*$，$m>n$，$A=\{1,2,\cdots,m\}$，$B=\{1,2,\cdots,n\}$，可得

$$C=\complement_A B=\{n+1,n+2,\cdots,m\}.$$