

Independent Recruitment

自主招生

甘志国 著



全国优秀数学教师专著系列



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



全国优秀数学教师专著系列

Independent Recruitment 自主招生

● 甘志国 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书是一部高中数学教学参考用书,主要讲述自主招生试题,系统、详尽地阐述了高中数学解题技巧,有理论、有实践.本书注重科学性、系统性和趣味性.

全书共含 51 篇小文章,每篇文章各自独立成文,所以本书可系统性地研读,也可有选择性地阅读.本书可作为高三复习备考用书,也可供高中、大学师生及初等数学爱好者研读,或作为高中数学竞赛辅导资料和师范大学数学教法方面的教材.

图书在版编目(CIP)数据

数学解题与研究丛书. 自主招生/甘志国著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.5
ISBN 978-7-5603-4426-3

I. ①数… II. ①甘… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 274063 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 刘春雷

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 25.25 字数 438 千字

版 次 2014 年 5 月第 1 版 2014 年 5 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-4426-3

定 价 58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 序

言

我在读小学时,就喜欢上数学课,喜欢做数学题.喜欢的原因很简单(学数学只需一张纸、一支笔和一个不太聪明的大脑就行了),从做题中也体会到了成功的喜悦;到了读中学时,这种兴趣就更强烈了,每天除了完成学习任务之外,就是到学校图书室去借阅各种数学习题集来做,也翻阅《数学通报》、《数学通讯》等数学杂志;到了参加工作时,更是酷爱数学这门科学了,一边进行数学教学,一边攻读大学数学课程和研究生课程,还利用一切业余时间进行初等数学研究,并有不少论文发表(几乎每周都有论文发表在期刊上),哈尔滨工业大学出版社分别于2008、2009年出版了我的专著《初等数学研究(I)》、《初等数学研究(II)》(总计230万字),这两部书也很受读者喜爱,有网友说它们是数学教学中的“圣经”,也有网友留言“他确实是我相当佩服的老师,如果高中时他能教我那该多好啊!可惜我现在已经到了大学,不过我还是对初等数学充满了强烈的兴趣,他的《初等数学研究》让我十分着迷”.

我是如何学数学并获得一些快乐的,从哈尔滨工业大学出版社第一编辑室主任刘培杰在《初等数学研究(I)》(哈尔滨工业大学出版社,2008)中所写的序言(这篇“序言”也被《中学数学教学参考》(上旬)2008年第10期转载)里可以找到部分答案:

甘先生的研究历程带给我的感受有三点。

一是坚持的重要。甘先生如同中国象棋中的小卒，一直向前拱到底线终成大器。一位青年数学教师写一篇小文章并不难，难的是坚持数十年，由青年至中年，一篇积成几百篇，这就要有一种精神了，这可能就是湖北人的韧劲。甘先生不是天才，但勤奋有加，靠后天努力终成正果。

二是定位的自觉。搞研究定位十分重要，它决定着将来学问的规模、层次与格调，有些人眼高手低，非世界难题不搞，结果与自身能力不相匹配，终落得“壮志未酬身先死”。单墀教授曾有比喻，二流人才搞三流问题，结果必是一流的，而二流人才搞一流问题，其结果必是三流的。甘先生定位准确，结合本职工作，立足岗位成材，主攻初等数学研究，终于取得了可喜的成果。

三是对事业的热爱。曾国藩曾在其家书中告诫自己的后代，交友一定要交有嗜好有癖之人。后代不解，追问没有嗜好没有癖的人有何不可，曾国藩说：“其没有深情也！”对某项事业、某种物件、某位佳人一往情深是一个人幸福的基础，也是事业成功的必要条件。甘先生就是一位对初等数学情有独钟，嗜数如命的青年教师。曾经贫穷过，曾经疾病过，但都不改初衷，坚持钻研，并从中得到了乐趣。法国数学家泊松（Poisson Simeon Denis Baron, 1781—1840）有一句名言：人生最大的乐趣有二，一为数学的发现，一为数学的教学。甘先生兼而有之想必人生充满乐趣。

一位教育专家曾说，教师有两种类型：一类是“为生存而教育”，一类是“为教育而生存”。甘先生显然是后者。现在随着国家对教育的重视，中学教师特别是数语外教师靠自己的知识和劳动也跻身于中产阶级行列。享受生活成为这一阶层的生活核心，如C·赖特·密斯瓦所说：“中产阶级的气质意味着对自己的生活感到满意，意味着形而上学的情思的枯竭，意味着人生的终极关怀的丧失，意味着探索精神之路的断绝。”我们很高兴看到甘志国式的青年教师有追求有理想有成果。1996年美国“数学与美国未来全国委员会”发表了引发转折的标志性报告《至关重要：美国未来的数学》，其中提出“高胜任教师”（highly qualified teacher）的概念。可以断言，只有不断钻研初等数学的中学数学教师才能是一位新时代的高胜任教师。

英国《泰晤士报》曾刊发过一篇题为“未来是橙色的”的署名文章。其中介绍了一个奇特现象，那就是北纬53°盛产数学家。据安德鲁斯大学研究人员计算得出：过去的400年中，54%的数学家出生在北纬53°

的地方.这个国外的研究结论在中国是否适用不得而知,但中国有句俗语:“天上九头鸟,地上湖北佬”.湖北人聪明勤奋,数学自然不弱,读完甘先生的大作相信你一定会有这样的感觉:唯楚有才!

我喜欢轻松与享受,例如,倾听优美的音乐与品尝可口的美味,但是许多科学实验已经证明,永远的“轻松与享受”的代价就是寿命的减短,因此生物的本性需要在“轻松与享受”和“劳累和克服”之间来回振荡.我认为,如果一本书能在轻松之间让读者对某种对象产生了兴趣,虽然是一种成功,但如果到此为止,就有些不够.这就像一位人士被你说得胃口大开,正想去实际品尝一下,却不知餐馆在何处一样.所以我的愿望是既让你有了胃口,又要能让你吃到一些真实的菜.即使这道菜以你目前的水平还不能享受,但是经过努力学习后,就随时可以享用了.

我还想回答一个问题,就是学习数学是需要吃一些苦的,是需要克服一些困难的,克服这些困难实际上是对自己的一种磨炼,是自己对自己的强制与要求.于是有的人就要问,那你为什么要受这种苦?值得吗?我的回答是:爱什么是不需要任何理由的!甘愿吃苦的原因和动力来自对数学的喜爱,就因为你就是这种人,你的回报就在于你每一次得知答案时的满足和享受.

你可以不受这些苦,但你也就体会不到那种快乐.

我认真研读过冯贝叶编著的《数学拼盘和斐波那契魔方》(哈尔滨工业大学出版社,2010),该书“序言”末的一首小诗也写出了我对数学的挚爱,现抄录下来(略有改动)供数学爱好者欣赏:

美丽的数学女神

你就像一个蒙着神秘面纱的美丽女神,
面纱的后面总是闪耀着宝石的光芒;
红宝石,蓝宝石,绿宝石,
多姿多彩,吸引着我去摘取.

但是,当我想揭开这面纱,
摘取这些迷人的宝石的时候,
我却发现,
这里有很多机关.
我必须先回答一些问题,

找出答案后，
才能获得你的微笑。
伴随着你的微笑，
一颗带着芳香的小宝石，
轻轻落入我的手心。
啊！多么美丽，多么雅致，
像有一股可口的清泉，滋润着我的心田。
我用一个精致的盒子将这颗宝石收藏，
作为永久的纪念。

我是这样的贪心，
得到一颗宝石之后，
还想立即摘取下一颗，
而你的问题就愈加困难。

随着我收藏的宝石的增多，
这困难就成了折磨，
但我甘愿忍受你的折磨，
因为，不让我忍受你的折磨，
本身就是一种更大的折磨。

这宝石，我不时拿出来欣赏，
每当此时，就是我最大的快乐。
不要问我，
这宝石值多少钱？
可能在你看来，它一钱不值，
但是对我来说，
它却是无价之宝。

美丽的女神，
经过一生的追求，
我才知道，
你的魅力，
就在于，
蒙在你脸上的面纱，

永远不可能彻底揭开。
但是,你又是那样慷慨,
只要对你有追求,
你就有无穷的宝石,
伴随着你的微笑,
再次落到我的手中。
所以,我要永远追求你,
永远享受着你的折磨。

我还想敬告本书的部分读者——高中生,学习数学一定要建立在喜欢的基础上,也就是要培养浓厚的兴趣。同学们要深信以下三点:

第一,数学是有用的。

宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学。

——华罗庚

数学是科学的女皇。

——高 斯

一门科学只有成功地运用数学,才算达到真正完善的地步。

——马克思

发表在《人民日报》的文章“数学——撬起未来的杠杆”(该文曾选入高一(下)语文自读课本)中写道:“数学家们还介绍,美国国家研究委员会从1984年起,向美国政府提出了四份关于美国数学和数学教育的报告。报告指出:高技术的出现把我们的社会推到了数学技术的新时代,‘很少有人认识到,被如此称颂的高技术,本质上是数学技术’。报告说:未来社会最好的工作和岗位,属于准备好了处理数学问题能力的人;数学已不单是一门学科,而且是重要的潜在资源;现今技术发达的社会里,扫除‘数学盲’的任务已取代了扫除‘文盲’的任务。”

这些名言及论述都说明了数学的重要性和作用。

我们来举一个漂洗衣服的例子吧:

在洗衣服时,衣服上已打好了肥皂,揉搓得很充分了,再拧一拧,当然不能把水全部拧干,设衣服上还有残留污物的水1 kg,用20 kg的清水来漂洗,怎样才能漂洗得更干净?

方案1 如果把衣服一下子放到20 kg的清水中,那么连同衣服上那1 kg水,一共21 kg水。让污物均匀分布到这21 kg水中,拧“干”后,衣服上还有1 kg水,所以污物残留量是原来的 $\frac{1}{21}$ 。

方案2 通常我们会把20 kg水分两次用,比如,第一次用5 kg,可使污物减少到 $\frac{1}{6}$;再用15 kg水,污物又减少到 $\frac{1}{6}$ 的 $\frac{1}{16}$,即 $\frac{1}{96}$ 。分两次漂洗,效

果好多了!

方案3 同样分两次漂洗,也可以每次用 10 kg 水,每次可使污物减少到原来的 $1/11$,两次漂洗后,污物减少到原有量的 $1/121$.

多学点数学,并用数学的眼光看世界,将会使你的生活更美好!(可见笔者发表于“中学数学杂志”2010(11)第 57~60 页的文章“数学,让你生活得更美好”)

第二,学数学是需要花时间的.

在欧几里得(Euclid,约前 325—前 265)的时代,学点几何学是很时髦的事.相传,当时的托勒密国王也来请欧几里得教他学几何,但没学多久,国王就不耐烦了,问欧几里得,学习几何有没有更简便的方法.欧几里得答道:“学习几何无王者之道!”意思是,在几何学里,没有专门为国王铺设的康庄大道!

数学以计算为主,所以,做一道题是需要花时间的,比如,做一道解析几何题就要花半个小时,小学生做“ 36×37 ”这样的一道题也要花一两分钟,而做一道文科的选择题可能只需一瞬间.当然,这里不是说学数学要花很多时间,我们干任何事情都要争取达到“会者不难”的一种境界,只是在打好数学基础时肯定要花时间,甚至是大量的时间.学好数学必须做题,并且是有效率地做题,我曾经发表过“思探练变题”的解题法(见《中小学数学》(高中)2009(12):7),值得大家在学习高中数学时借鉴.学数学,要打好基础,绝不可只顾盲目作题,要反思、要总结.

本书中的练习题都是我在二十多年的高中数学教学中积累下来的.我善于积累,在平时的教学中,遇到一道好题,认真研究后记载下来,供以后教学时使用.这就是本书中练习题的来历,所以本书中的习题,读者应抽出时间认真完成(可作为考试来对待),这样,你才会有大的收效.

学数学,要特别重视思考,且不能急于求成.我有时想一道题,要想几年(当然是间断地想)才获解决.

第三,不要畏惧数学,因为数学好学.

我认为,数学学科的规律性最强,题意清楚明白,不会出现模棱两可的现象,有公式可套,有例题可仿,打好基础、适当训练、循序渐进、注重反思,就可学好数学.

最后,作为一名经常战斗在高三教学第一线的数学老师,多次亲历了学子们的顽强战斗.也作为你们的朋友,针对你们的高考复习备考,我想对你们说几句知心话.

吃苦耐劳,无怨无悔.诚然,高中学习是够累的,没有双休日,很少有节假日,早上 6:30 就开始起床,晚上 10:30 还不能上床休息,用“披星戴月”这个词来形容是再恰当不过的了.但是,要把学习搞好,必须有充足的学习时间,谁在

时间上拥有了优先权,谁就可能在学习上赢得竞争的胜利.同学们,别以为人生漫长,美国人是这样算出一生的学习时间的:一生以60年计,穿衣梳洗5年,路途旅行5年,娱乐8年,生病3年,打电话1年,照镜子70天,擤鼻涕10天,……这样,即使一个人终生学习,学习时间也不足12年,不够4300天.高中三年更是求学的黄金时期,千万不要浪费每一点时间.同学们,也别埋怨求学时间短暂,雷巴柯夫曾强调:“时间是一个常数,但对勤奋者来说,又是一个变数,用‘分’来计算时间的人比用‘时’来计算时间的人时间多59倍.”如何争取时间,也听两首通俗的诗吧:一首是“无事此静卧,一日算半日,若活七十岁,只算三十五.”另一首是“无事此静坐,一日算两日,若活七十岁,便是百四十.”有迟到习惯的同学,你还能天天迟到吗?

康熙皇帝是中国历史上很有作为的一位帝王,在位长达61年之久.他一生不仅勤勉为政,还酷爱自然科学.康熙皇帝14岁时,看到新旧历法之争相当激烈,自己因对自然科学知之不多,而无法判明是非,于是暗下决心要努力学习自然科学,并拜请比利时传教士南怀仁(Ferdinand Verbiest, 1623—1688)为师.因每日需早朝,故只能把学习时间安排在早朝前,命南怀仁半夜起床赶到宫中上课,小康熙刻苦学习、虚心请教,按时交纳作业.一位封建帝王竟如此好学,我们高中生还能懒惰吗?

鼓足信心,扬起理想风帆.斗转星移,以前每次考试成绩的酸甜苦辣都将与我们一一作别,或是成功,或是失败,或是顺航,或是逆流,都成了无可挽留的昨天.古人云:“弃我去者,昨日之日不可留.”为什么你总对过去纠缠不休而耿耿于怀呢?从今天开始,让我们带着灿烂的、甜蜜的笑脸,怀揣超脱喜悦的心情,重新打扮一下自己,你便是一个全新的你:有信心,有理想,自然就会有抱负,有作为.

勤奋拼搏,弹奏壮丽凯歌.同学们一定从电视上欣赏过体育竞赛的激动场面,上千人上万人的体育运动会都是有的,运动员的拼搏精神值得我们认真学习.我们要努力,我们要拼搏,人生难得几回搏,此时不搏,更待何时?

成长不可无书,成功不能无知.据说美国历史上曾有这样的两个家族,一个是爱德华家族,其始祖爱德华是位满腹经纶的哲学家,他的八代子孙中出了13位大学校长,100多位教授,20多位文学家,20多位议员和一位副总统;另一个家族的始祖叫珠克,他是个缺乏文化修养的赌徒和酒鬼,他的八代子孙中有300多位乞丐,7个杀人犯和60多个盗窃犯.同学们,一个人有没有文化修养,竟能产生如此源远流长的影响.你是作一个造福子孙的“拼搏者”,还是作一个遗臭万年的“懒汉”呢?

同学们,你们是凭才学才选择并实现读××高中的,××高中每年都要走出数以千计的大学生,很多大学生又要通过自己的刻苦努力在知识上成为金字

塔尖上的佼佼者.实际上,你们离这些佼佼者并不遥远,在高考前的这一阶段,再努一把力,调整好心态,你也可以同他们一样成为佼佼者.

下面,也赋诗一首《奔向远方》与你们共勉:

满怀青春的憧憬与幻想,我匆匆前行.

我仿佛听见远方的呼唤:

走吧,朋友!让我们鼓起风帆,去搏击狂风去搏击恶浪去搏击苦涩的日子吧!远方有旖旎的风光,远方有壮丽的辉煌,远方是太阳升起的地方.

走吧,朋友!放飞你蓝色的梦,去讴歌生命去讴歌壮丽去讴歌远方的风景吧!不要再贪恋港湾的温馨了,它不过是暂时栖息的地方;不要采撷往日的绿叶,它已随秋风舞落在地,不要回眸身后孤寂的足迹,它已被涨起的海潮冲得无影无踪.

走吧,朋友!只要我们不息地奋斗,我们都能到达那理想的绿地!

祝高三学子在高考中取得优异成绩!

谢谢大家!

甘志国

北京丰台二中

2013年8月1日

- § 1 自主招生,你准备好了吗 // 1
- § 2 由一道课本题巧解三道大学自主招生题 // 14
- § 3 介绍几道不定方程大学自主招生试题 // 19
- § 4 再谈抽象函数问题的解法 // 24
- § 5 也谈证明 $\sqrt{2}$ 是无理数 // 31
- § 6 对 2011 年华约自主招生数列题的加强及推广 // 34
- § 7 对一道 2011 年北约自主招生三角题的研究 // 37
- § 8 2011 年北约自主招生函数题的一般情形 // 39
- § 9 小学生简解一道北约自主招生题 // 43
- § 10 2011 年复旦千分考概率题的简解 // 45
- § 11 谈一道 2010 年北京大学自主招生数学试题 // 48
- § 12 解答 2009 年北京大学自主招生试题第 4 题的一般情形 // 50
- § 13 对 2009 年北京大学自主招生试题第 2 题的研究 // 58
- § 14 一道 2009 年清华大学自主招生数学试题的背景 // 60
- § 15 源于教材的一道清华大学自主招生数学试题 // 62
- § 16 介绍几道 2008 年自主招生数学试题 // 64
- § 17 用 $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 解题 // 70
- § 18 一种重要的三角变换——桃园三结义 // 72
- § 19 用两种三角变换巧证不等式竞赛题 // 76
- § 20 一道课本三角题的伴随结论 // 80
- § 21 外接圆半径及若干边之和均为定值的圆内接三角形面积的取值范围 // 81

§ 22	研究二次曲线内接三角形的内切圆、旁切圆问题	// 88
§ 23	介绍几道自主招生数学模拟题	// 110
§ 24	自主招生试题集锦(集合、函数与方程)	// 116
§ 25	自主招生试题集锦(数列)	// 129
§ 26	自主招生试题集锦(三角函数)	// 154
§ 27	自主招生试题集锦(不等式)	// 174
§ 28	自主招生试题集锦(平面解析几何)	// 187
§ 29	自主招生试题集锦(立体几何)	// 199
§ 30	自主招生试题集锦(排列、组合与二项式定理)	// 214
§ 31	自主招生试题集锦(概率与统计)	// 219
§ 32	自主招生试题集锦(平面向量与复数)	// 229
§ 33	自主招生试题集锦(微积分)	// 242
§ 34	自主招生试题集锦(多项式)	// 255
§ 35	自主招生试题集锦(平面几何)	// 268
§ 36	自主招生试题集锦(初等数论)	// 278
§ 37	自主招生试题集锦(组合数学)	// 291
§ 38	2014 年综合性大学自主选拔录取联合考试	自然科学基础 —— 理科试卷 数学部分(北约) // 305
§ 39	2014 年综合性大学自主选拔录取联合考试	自然科学基础 —— 文科试卷 数学部分(北约) // 309
§ 40	2014 年华约自主招生数学试题	// 311
§ 41	2013 年北约自主招生数学试题	// 315
§ 42	2013 年华约自主招生数学试题	// 319
§ 43	2013 年卓越联盟自主招生数学试题	// 324
§ 44	2012 年北约自主招生数学试题	// 328
§ 45	2012 年华约自主招生数学试题	// 331
§ 46	2012 年卓越联盟自主招生数学试题	// 338
§ 47	2011 年北约自主招生数学试题	// 346
§ 48	2011 年华约自主招生数学试题	// 349
§ 49	2011 年卓越联盟自主招生数学试题	// 356
§ 50	2010 年北约自主招生数学试题	// 363
§ 51	2010 年华约自主招生数学试题	// 367

编辑手记 // 375

§ 1 自主招生,你准备好了吗

1. 自主招生概况

自主招生是高校扩大招生自主权的重要举措,属于新生事物.但凡新生事物,多欠完备,却是发展的机遇.

目前,在全国 112 所“211 工程”院校中,已经有 75 所(占 67%)参与到自主招生中;在 39 所“985 工程”高校中除了三大(北约、华约、卓越联盟)一小(京都联盟)四联盟中的 27 所高校,再加上“单飞”的复旦大学、南开大学及湖南大学,一共有 30 所,已占到 985 高校的 77%.

“四联盟”的具体内涵是:

“北约”联盟成员(12 所):北京大学、北京大学医学部、北京航空航天大学、北京师范大学、厦门大学、山东大学、武汉大学、华中科技大学、中山大学、四川大学、兰州大学、香港大学.

“华约”联盟成员(7 所):清华大学、浙江大学、南京大学、西安交通大学、中国科学技术大学、中国人民大学、上海交通大学.

“卓越”联盟成员(9 所):北京理工大学、重庆大学、东南大学、大连理工大学、哈尔滨工业大学、华南理工大学、天津大学、同济大学、西北工业大学.

“京都”联盟成员(5 所):北京邮电大学、北京交通大学、北京林业大学、北京化工大学、北京科技大学.

参加自主招生考试对于高校和考生来说,是个双赢的过程.考生要想如愿读名校,参加自主招生考试是最好的捷径.可以预见,在未来的一段时间里,自主招生将会持续高热.易曰:君子见机而作,不俟终日!

2. 自主招生试题特点

下面谈谈数学自主招生试题的若干特点.

目前,高中生在数学思维和数学素养方面表现出诸多不足,比如思维广度不开阔;思路不清晰,对题目的分析不周全,难以准确识别模型以尽快将其转化为相应的数学问题;学生普遍知识面狭窄(如对复数等许多基本知识都不了解);运算能力较低等等.尤其是创新意识和动手操作能力较差.

针对以上情形,自主招生试题有如下特点:

特点一,自主招生试题突出考查考生的数学思维与数学素养.

自主招生的目的是选拔顶尖的优秀人才,所以试题必然会突出这一特点,因为它是各种能力的核心.

试题 1 (2009 年清华大学自主招生试题) 有限条抛物线及其内部(指含焦点的区域)能覆盖整个平面吗? 证明你的结论.

分析 本题就不是简单考查抛物线的知识,顺利解答本题需要整体考查抛物线的图形特征,解答如下:

假设有限条抛物线及其内部能覆盖整个平面,则一定有有限条抛物线的内部能覆盖整个平面. 所以平面直角坐标系上的定点 A (其坐标待定) 在某一条定抛物线 $\Gamma: (ax + by + c)^2 = dx + ey + f$ (得 $ax + by + c = 0, dx + ey + f = 0$ 表示两条相交直线) 内.

设抛物线 Γ 的焦点坐标是 (s, t) , 把抛物线 Γ 沿向量 $(-s, -t)$ 平移后, 抛物线 Γ 变为抛物线 $\Gamma': (ax + by + c')^2 = dx + ey + f'$ (其焦点坐标为坐标原点 $(0, 0)$); 又设定点 A 变为两相交直线 $ax + by + c' = 0, dx + ey + f' = 0$ 的交点 A' , 得点 A' 在抛物线 $\Gamma': (ax + by + c')^2 = dx + ey + f'$ 上.

而点 A 在抛物线 Γ 内, 所以平移后, 点 A' 也在抛物线 Γ' 内. 前后矛盾! 所以欲证成立.

另证 不能. 与抛物线的对称轴不平行的直线与该抛物线的位置关系有且仅有三种: (1) 相交; (2) 相切; (3) 相离.

对于 (1), 抛物线及其内部仅覆盖该直线上的一段线段; 对于 (2), 抛物线及其内部仅覆盖该直线上的一个点; 对于 (3), 抛物线及其内部不能覆盖该直线上的任意一个点.

由这三种情况可得: 用有限条抛物线及其内部不能覆盖与这有限条抛物线的对称轴均不平行的直线. 所以欲证成立.

注 容易证明: 有限条双曲线及其内部(指含焦点的区域)能覆盖整个平面.

特点二,自主招生试题突出考查思维的广阔性(如发散思维)、深刻性与灵活性.

数学思维的关键是思维品质,如思维的宽阔与深厚. 宽阔主要表现在能迅速理解题意寻找出各种不同的解题思路;深刻性则主要表现为能较快地看清问题的数学本质,在更为深入的层面上等价转化问题,即在不同的背景下寻求相同的数学结构.

样题 (2010 年清华大学等五校自主招生试题) 甲、乙等 4 人传球,第一次由甲将球传出,每次传球时,传球者将球等可能地传给另外 3 人中的任何 1 人.

(1) 经过 2 次传球后,球在甲、乙两人手中的概率各是多少?

(2) 经过 n 次传球后,球仍在甲手中的概率记为 $p_n (n=1,2,\cdots)$,试求出 p_{n+1} 与 p_n 的关系式及 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

解 (1) 用树形图(即列举法)可得答案:经过 2 次传球后,球在甲、乙两人手中的概率分别是 $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}$.

(2) p_{n+1} 与 p_n 的关系式为 $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) (n=1,2,\cdots)$.

可求得 $p_n = \frac{1}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right] (n=1,2,\cdots), \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{4}$.

本题与下面的三道题有相同的数学本质(结构),请注意体会:

(1) (2003 年高考新课程卷文科第 16 题) 将 3 种作物种植在图 1 的 5 块试验田里,每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一作物,不同的种植方法共有 _____ 种(以数字作答).



图 1

参考答案 42.

(2) (排数模型) 用 1,2,3 三个数字排成 6 位整数,要求首位和末位排 1,且任意相邻的两个数字不相同,可以得到多少个不同的 6 位整数?

参考答案 10 个.

(3) (涂色问题) 用 $m (m \geq 2)$ 种不同的颜色给图 2 中的 n 个区域 1,2,...,n 涂色,要求任意两个相邻区域涂不同颜色,且规定区域 1 只涂一种指定颜色,则不同的涂色方法有多少种?

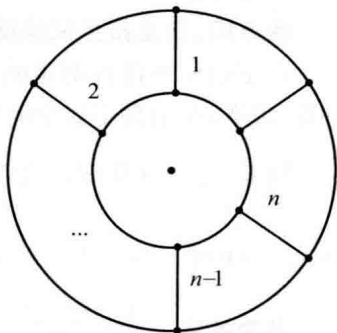


图 2

参考答案 $\frac{(m-1)^n + (-1)^n (m-1)}{m}$ 种.

特点三,许多自主招生试题有深刻背景,可以引申推广.

题 2 (2005 年上海交通大学自主招生试题) 4 封不同的信放入 4 只写好地址的信封中,全装错的概率为 _____,恰好只有一次装错的概率为 _____.

参考答案 $\frac{3}{8}, \frac{1}{3}$.

分析 本题的背景是组合数学中著名的“错位排列”问题.

题 3 (2010 年南开大学数学特长班试题) 求证: $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3, x \in$

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

分析 本题的背景是泰勒(Brook Taylor, 1685—1731)展开式,用三次求导即可获证.

题4 (2009年清华大学自主招生试题)请写出三个数(正数)均为质数,且它们形成公差为8的等差数列,并证明你的结论.

参考答案 3, 11, 19.

质数问题非常古老,其中的猜想很多也很有名,比如哥德巴赫(Goldbach, 1690—1764)猜想等.华裔数学家陶哲轩(Terence Tao, 1975—)在第25届(2006年)国际数学家大会上获得菲尔兹奖,数学天才陶哲轩的一项重要贡献就是证明了存在任意长(至少三项)的素数等差数列(指各项都是素数的等差数列,素数就是质数).这就是这道自主招生题的深刻背景.

关于此题的研究读者还可研读文献[1].

下面的这道自主招生试题也涉及数论的核心问题——质数.

题5 (2013年北约自主招生试题)最多能找多少个两两不相等的正整数,使其任意三个数之和为质数,并证明你的结论.

参考答案 4个,比如1, 5, 7, 11.

特点四,自主招生试题覆盖面广.

自主招生还没有明确的考试大纲,试题的覆盖面很广,很多题的难度超出高考、联赛,甚至高中数学的知识范围而涉及高等数学,需要考生“见多识广”.

题6 (2010年南京大学特色考试试题)已知 $A = \left\{x \mid \frac{2x+1}{x-3} \geq 1\right\}$, $B = \left\{y \mid y = \arctan t, -1 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}, b \leq 0\right\}$, $A \cap B = \emptyset$, 求 b 的取值范围.

参考答案 $\left[-\frac{12}{\pi}, 0\right]$.

分析 解答本题时要用到反正切函数是增函数的性质,而该知识在全国所有教材中均未讲述,但却在自主招生命题范围内.

题7 (2010年华约自主招生试题)设定点 A, B, C, D 是以点 O 为中心的正四面体的顶点,用 σ 表示空间以直线 OA 为轴满足条件 $\sigma(B)=C$ 的旋转,用 τ 表示空间关于 OCD 所在平面的镜面反射,设 l 为过 AB 中点与 CD 中点的直线,用 ω 表示空间以 l 为轴的 180° 旋转. 设 $\sigma \circ \tau$ 表示变换的复合,先作 τ , 再作 σ , 则 ω 可以表示为()

A. $\sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma$

B. $\sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \tau$

C. $\tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \tau$

D. $\sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma$

参考答案 D.