21世纪高等学校教材

高等数学同步练习

主编 刘二根 蒋志勇 胡新根

GAODENG SHUXUE TONGBU LIANXI

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

21 世纪高等学校教材

高等数学同步练习

主　编　刘二根　蒋志勇　胡新根

副主编　曾　毅　邓　黎　廖维川

李春华　宋庆华　周凤麒

肖　飞

上海交通大学出版社

内容提要

本书按照“高等数学课程的教学基本要求”，结合“全国硕士研究生入学考试的数学考试大纲”的要求编写而成. 内容包括一元函数微积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、微分方程等. 每章都按照高等数学的教学过程进行分节，每一节又都分为两部分:主要知识与方法、同步练习，另外还特意精选了期末考试、硕士研究生入学考试及全国大学生数学竞赛等试题.

本书可作为高等学校理工科有关专业学习高等数学课程的课后练习，也可作为考研及参加全国大学生数学竞赛的训练资料，并可供高等院校数学教师、自学考试人员及其他相关人员作参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步练习/刘二根，蒋志勇，胡新根主编. — 上海 ：上海交通大学出版社，2015
ISBN 978-7-313-13442-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①刘… ②蒋… ③胡… Ⅲ. 高等数学—高等学校—习题集 Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 163408 号

高等数学同步练习

主　　编:刘二根　蒋志勇　胡新根
出版发行:上海交通大学出版社　　地　　址:上海市番禺路 951 号
邮政编码:200030　　电　　话:021-64071208
出 版 人:韩建民
印　　制:苏州市越洋印刷有限公司　　经　　销:全国新华书店
开　　本:787mm×960mm　1/16　　印　　张:25.75
字　　数:462 千字
版　　次:2015 年 8 月第 1 版　　印　　次:2015 年 8 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-313-13442-4/O
定　　价:39.50 元

前　　言

高等数学是普通高等学校理工科等有关专业的重要基础课之一，是硕士研究生入学考试必考科目，是学习其他数学课程、理工科专业课的必备数学基础，也是培养抽象思维能力、逻辑推理与判断能力、几何直观和空间想象能力、熟练的运算能力、初步的数学建模能力以及综合运用所学的知识分析和解决实际应用问题能力的强有力的数学工具.

本书是按照“高等数学课程的教学基本要求”，结合“全国硕士研究生入学考试的数学考试大纲”的要求编写而成. 它包括一元函数微积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、微分方程等内容. 每章都按照高等数学的教学过程进行分节，每一节又都分为两部分：第一部分为主要知识与方法，着重介绍了本节的重要知识内容及相关解题方法；第二部分为同步练习，精心挑选了一些典型例题供学生进行练习，其中相当一部分例题选自高等数学期末考试及硕士研究生入学考试的数学试题. 通过本书的同步练习，将有助于学生巩固所学高等数学的知识要点，提高学生的解题能力，为学习后续课程和考研打下扎实的数学基础. 另外高等院校平时在学习过程中不会进行任何考试，为了让学生了解高等数学课程的期末考试试题的难易程度以及考研数学一、数学二、数学三的题型、考点及难易程度，我们特意精选了近年来的高等数学期末考试试题、全国硕士研究生入学考试数学试题、全国大学生数学竞赛试题，作为学生备考及训练之用. 书末附有同步练习的参考答案.

参加本书编写工作的是华东交通大学刘二根、蒋志勇、胡新根、曾毅、邓黎、廖维川、李春华、宋庆华、周凤麒、肖飞，由刘二根对全书进行审稿和统稿.

由于编者水平有限，加上时间仓促，书中存在的不足，恳请读者批评指正.

编　者

2015 年 4 月

目　录

第1章 函 数

函数的概念与性质

主要知识与方法

1. 邻域

(1) 邻域:数集$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$称为点 x_0 的 δ 邻域,记为$U(x_0,\delta)$或$U(x_0)$.

(2) 去心邻域:数集$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$称为点 x_0 的去心 δ 邻域,记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$或$\mathring{U}(x_0)$.

2. 函数

(1) 定义:设 x 和 y 是两个变量,D 是一个非空数集,如果对任意 $x\in D$,按照对应法则 f,存在 $y\in \mathbf{R}$ 与 x 对应,则称 f 为定义在 D 上的函数,记为 $y=f(x)$,其中数集 D 称为函数的定义域,记为 $D(f)$.

而集合 $Z(f)=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$称为函数的值域.

当 y 取唯一值时,称 $y=f(x)$为单值函数,本书所讨论的函数没有特别说明外都是单值函数.

(2) 图形:平面点集$\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D(f)\}$称为函数 $y=f(x)$的图形.

函数 $y=f(x)$的图形通常为一条曲线.

(3) 定义域的求法:先根据表达式有意义列出不等式(组),再解不等式(组)得定义域.

3. 函数的特性

(1) 奇偶性:

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,若对任意 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$为奇函数.

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,若对任意 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,

则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

注:上述定义也给出判断奇偶性的方法.

(2) 有界性:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在 $M>0$,对任意 $x\in I\subset D$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

当 $I=D$ 时,称 $f(x)$ 为有界函数.

当 $f(x)\leqslant M_1$ 时称 $f(x)$ 为有上界,当 $M_2\leqslant f(x)$ 时称 $f(x)$ 为有下界.

注:$f(x)$ 在区间 I 上有界 $\Leftrightarrow f(x)$ 在区间 I 既有上界又有下界.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若对任意 $M>0$,存在 $x_0\in I\subset D$,有 $|f(x_0)|>M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

(3) 单调性:

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对任意 $x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加,而区间 I 称为单调增加区间.

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对任意 $x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少,而区间 I 称为单调减少区间.

(4) 周期性:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正常数 T,对任意 $x\in D$,有 $x+T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,且称 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期.

显然,当 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期时,$nT(n\in\mathbf{Z}^+)$ 也是 $f(x)$ 的周期.

通常我们所说的周期是指 $f(x)$ 的最小正周期.

例如,$\sin x,\cos x$ 的周期为 2π,$\tan x,\cot x$ 的周期为 π.

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,$y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

4. 两个特殊函数

(1) 符号函数:函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 称为符号函数.

显然 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x$.

(2) 取整函数:函数 $y=[x]$ 称为取整函数. 其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分,即不超过 x 的最大整数.

例如,$[2.6]=2$,$[-2.6]=-3$.

5. 反函数

(1) 定义:设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$,值域为 $Z(f)$,若对任意 $y\in Z(f)$,存在唯一的 $x\in D(f)$,使 $f(x)=y$,则在 $Z(f)$ 上定义了一个函数,称之为函数 $y=$

$f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

通常 $y=f(x)$的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

(2) 反函数求法：先从方程 $y=f(x)$解出 x，再交换 x 与 y 可得反函数.

6. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 $D(f)$，函数 $u=\varphi(x)$的值域为 $Z(\varphi)$，若 $D(f)\cap Z(\varphi)\neq\phi$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$为 x 的复合函数.

注：不是任意两个函数都能构成复合函数.

例如，$y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 不能构成复合函数.

7. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

(1) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$的图形如图 1-1 所示.

(2) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$的图形如图 1-2 所示.

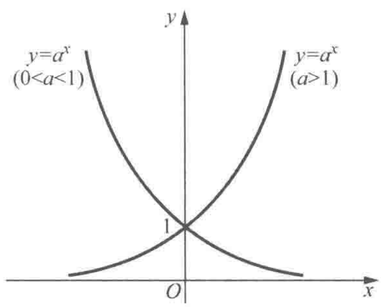

图 1-1

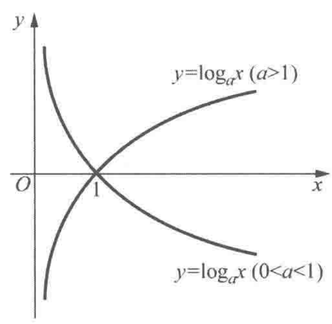

图 1-2

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$ 的图形如图 1-3 所示.

(4) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的图形如图 1-4 所示.

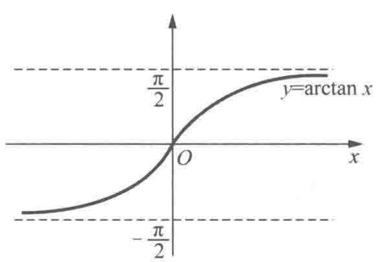

图 1-3

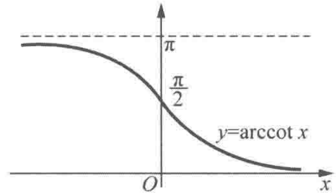

图 1-4

8. 初等函数

由常数和基本初等函数经有限次四则运算或复合构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如，$y=\dfrac{\sin x^2}{e^x+2}$、$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$为初等函数.

9. 分段函数

在自变量的不同变化范围函数的表达式也不同的函数称为分段函数.

例如，前面提到的符号函数与取整函数为分段函数.

函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ x+1, & 0<x<1 \\ x-2, & 1\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$ 为分段函数，$x=0,1$ 称为分界点.

同步练习

一、填空题

1. 函数 $y=\sin\sqrt{x-1}$的定义域为________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{x}(x\neq 0)$,则 $f[f(2)]=$________.

3. 设 $3f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$,则 $f(x)=$________.

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$在$(-\infty,+\infty)$内________(填有界或无界).

5. 函数 $y=\sin x\cos x$ 的周期 $T=$________.

二、解答题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ x+1, & 0<x<1 \\ x-2, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$,求 $f\left[f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$及 $f\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,求 $f\{f[f(x)]\}$.

3. 求函数 $f(x)=\arcsin(x-1)+\lg(x^2-4x+3)$ 的定义域.

4. 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

5. 求函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

三、证明题

1. 设 $f(x)=\ln(x+1)$，证明：$f(x^2-2)-f(x-2)=f(x)$.

2. 证明：函数 $f(x)=\frac{2^x}{2^x+1}$ 为偶函数.

3. 证明：函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界.

第2章 极限与连续

2.1 极限的概念与运算法则

主要知识与方法

1. 数列极限的概念

对任意 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$,则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to\infty(n\to\infty).$$

这时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛.

上述定义用"ε-N 语言"简化为

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow$对任意 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

2. 函数极限的概念

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意 $\varepsilon>0$,存在 $X>0$,当 $|x|>X$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

3. 数列极限的性质

(1) 唯一性:若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则其极限唯一.

(2) 有界性:若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则数列 $\{x_n\}$ 有界,即存在 $M>0$,有 $|x_n|\leqslant M$.

注:上述结论反过来不成立,即由数列 $\{x_n\}$ 有界不能推出数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(3) 保号性:若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且 $a>(<)0$,则存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,有 $x_n>(<)0$.

由保号性可得,若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,有 $x_n\geqslant(\leqslant)0$,则 $a\geqslant0$ $(\leqslant0)$.

说明:对函数极限也有类似的上述三个性质.

4. 左右极限与极限的关系

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

注：若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$，且 $A\neq B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

类似地，有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}=a.$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

5. 极限运算法则

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)+g(x)]=A+B=\lim f(x)+\lim g(x)$.

(2) $\lim[f(x)-g(x)]=A-B=\lim f(x)-\lim g(x)$.

(3) $\lim[f(x)g(x)]=AB=\lim f(x)\lim g(x)$.

特别，$\lim[Cf(x)]=CA=C\lim f(x)$，$\lim[f(x)]^m=A^m=[\lim f(x)]^m$.

(4) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$（其中 $\lim g(x)=B\neq 0$）.

6. 一个重要结论

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } n<m \text{ 时}\\ \infty, & \text{当 } n>m \text{ 时}\end{cases}.$$

同步练习

一、填空题

1. 设 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n}{n+1}, n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{n+1}{n}, n\text{ 为偶数}\end{cases}$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$________.

2. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=$________.

3. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^3(x+3)^2}{(2x+5)^5}=$________.

4. 极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+3x}-2x)=$________.

二、计算题

1. 求极限$\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

2. 求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.