丛书主编／王后雄

考点

同步解读

高中数学 5（必修）

本册主编／田祥高

考点分类精讲　方法视窗导引

Kaodian
Tongbu Jiedu

误区盲点预警　题型优化测训

紧扣课标，直击高考，突破难点，解析疑点，化整为零，各个击破，点线面全方位建构“同步考点”攻略平台。

由“母题”发散“子题”，理顺“一个题”与“多个题”的关系，寻找“一类题”在思维方法和解题技巧上的“共性”，通吃“千张纸，万道题”，实现知识“内化”，促成能力“迁移”。

新课标
Xinkebiao
華中師範大學出版社
Huazhong Normal University Press

丛书主编／王后雄

Kaodian
Tongbu Jiedu

《考点同步解读》系列

- 数学（必修1、2、3、4、5）
- 数学（选修2-1）
- 数学（选修2-2）
- 数学（选修2-3）
- 物理（必修1、2）
- 物理（选修3-1）
- 物理（选修3-2）
- 物理（选修3-3）
- 物理（选修3-4）
- 物理（选修3-5）
- 化学（必修1、2）
- 化学（选修3 物质结构与性质）
- 化学（选修4 化学反应原理）
- 化学（选修5 有机化学基础）
- 化学（实验、技术与生活）
- 生物（必修1、2、3）
- 地理（必修1、2、3，区域地理）

《重难点手册》系列

- 数学（必修1、2、3、4、5/人教A版）
- 数学（选修2-1、2-2、2-3/人教A版）
- 数学（选修1-1、1-2/人教A版）
- 数学（必修1、2、3、4、5/苏教版）
- 数学（选修2-1、2-2、2-3/苏教版）
- 物理（必修1、2/人教版）
- 物理（选修3-1、3-2、3-3、3-4、3-5/人教版）
- 化学（必修1、2/鲁科版）
- 化学（必修1、2/人教版）
- 化学（选修3 物质结构与性质/人教版）
- 化学（选修4 化学反应原理/人教版）
- 化学（选修5 有机化学基础/人教版）
- 化学（必修1、2/苏教版）
- 化学（选修3 物质结构与性质/苏教版）
- 化学（选修4 化学反应原理/苏教版）
- 化学（选修5 有机化学基础/苏教版）
- 生物（必修1、2、3、选修3/人教版）
- 高中实验（物理、化学、生物）

考点同步解读

Kaodian
Tongbu Jiedu

高中数学 5（必修）

本册主编／田祥高

ISBN 978-7-5622-4227-7

9 787562 242277 >

定价：25.80元

责任编辑／涂庆　责任校对／王炜　封面设计／甘英

丛书主编/王后雄

Kao dian
Tongbu Jiedu

考点同步解读

高中数学 5（必修）

本册主编/田祥高

随书赠送 5 套试卷

新课标 Xinkebiao

华中师范大学出版社
Huazhong Normal University Press

新出图证(鄂)字 10 号
图书在版编目(CIP)数据
考点同步解读 高中数学5(必修)/丛书主编：王后雄 本册主编：田祥高
—武汉：华中师范大学出版社，2010. 12（2011. 9 重印）
ISBN 978-7-5622-4227-7
Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ. ①G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 044481 号

考点同步解读 高中数学5(必修)

丛书主编：王后雄　本册主编：田祥高
责任编辑：涂　庆　责任校对：王　炜　封面设计：甘　英
选题设计：华大鸿图编辑室（027—67867361）
出版发行：华中师范大学出版社 ©
社址：湖北省武汉市洪山区珞喻路 152 号
销售电话：027—67865356　027—67867076　027—67867371
传真：027—67865347　邮购：027—67861321
网址：http://www.ccnupress.com　电子信箱：hscbs@public.wh.hb.cn
印刷：湖北恒泰印务有限公司　督印：章光琼
字数：350 千字
开本：889mm×1194mm 1/16　印张：13.5
版次：2010 年 12 月第 1 版　印次：2011 年 9 月第 6 次印刷
定价：25.80 元

欢迎上网查询、购书

《考点同步解读》使用图解

考点解读

呈现新课标内容要素，锁定不同版本教材要求，指明学习和考试的具体考点及目标。

学法导引

注重学法点拨和考试方法的指导，揭示学习的重点和难点，探讨考试命题的规律。

考点精讲

考点分类，核心总结，重点难点各个击破，典例创新导引，首创分类解析导解模式。

变式跟踪

案例学习迁移，母题多向发散，预测高考可考变式题型，层层剖析，深入变式训练。

超级链接

最佳导学模式，学案式名师点津。难点突破、防错档案、规律清单革新传统学习模式。

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

考点解读

1. 通过对特殊三角形边角间数量关系的研究，发现正弦定理，初步学会运用由特殊到一般的思想方法发现数学规律。

2. 了解正弦定理的证明，能运用正弦定理解有关三角形，以及运用正弦定理解决相关问题。

学法导引

学习本讲内容时，要善于运用平面几何知识以及平面向量知识证明正弦定理；应掌握用正弦定理将三角形的边角之间关系进行相互转化；已知两边和其中一边的对角解三角形时，解的个数的判定是本讲学习的难点，突破难点的方法是：充分利用平面几何作图方法将解的个数与圆、射线之间的公共点个数联系起来，或结合正

考点分类精讲

考点1 正弦定理

在一个三角形中，各边和它所对的角的正弦的比相等，即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

考题1 若△ABC的三内角A，B，C满足A+C=2B，且最大边为最小边的2倍，求三角形三内角之比。

【解析】设△ABC的三内角从小到大依次为 $B-\alpha, B, B+\alpha$。

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore B-\alpha+B+B+\alpha=\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$。

再设最小边为 a，则最大边为 $2a$。

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{2a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$，

即 $\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)$，$\therefore \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\alpha=\frac{\pi}{6}$。

$\therefore$ 三内角分别为 $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$，它们的比为 $1:2:3$。

【变式1-1】在△ABC中，若A∶B∶C=1∶2∶3，求a∶b∶c。

正弦定理的证明

(1)圆的证明法及其比值的几何意义

正弦定理的理解与作用

正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 反映了三角

如何活用正弦定理？其关键在于观察、分析问题，确定解题的基本方向—是"边化

由考题1可知，利用正弦定理解三角形的基本类型及解法如下：

已知 a,b 和 A 解三角形，得 $\sin B=\frac{b}{a}$

题型优化测训

学业水平测试

一、选择题

1. 在△ABC中，一定成立的等式是（ ）。

A. $a\sin A=b\sin B$　B. $a\cos A=b\cos B$
C. $a\sin B=b\sin A$　D. $a\cos B=b\cos A$

2. 在△ABC中，$\frac{3}{\sin A}=\frac{4}{\sin B}=\frac{5}{\sin C}$，则△ABC是（ ）。

A. 直角三角形　B. 锐角三角形
C. 钝角三角形　D. 等腰三角形

高考水平测试

一、选择题

1. 在△ABC中，下列关系一定成立的是（ ）。

A. $a<b\sin A$　B. $a=b\sin A$
C. $a>b\sin A$　D. $a\geq b\sin A$

2. 已知△ABC的三个内角之比为A∶B∶C=3∶2∶1，那么对应三边之比a∶b∶c等于（ ）。

A. 3∶2∶1　B. $\sqrt{3}$∶2∶1
C. $\sqrt{3}$∶$\sqrt{2}$∶1　D. 2∶$\sqrt{3}$∶1

优化测训

立足教材，夯实基础，习题层级清晰，与同步考试接轨，查漏补缺。

解题依据

首创解题线索助学模式。当你解题失误或解题缺乏思路时，解题依据教你回归考点知识和例题启示。

高考真题赏析

1.（2008，北京高考题）已知△ABC中，$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$，$B=60°$，那么角A等于（ ）。

A. 135°　B. 90°　C. 45°　D. 30°

【解析】由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{2}\sin 60°}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\because a<b$，$\therefore A<B$，故 $A=45°$，故选C。

【答案】C

2.（2008，陕西高考题）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若 $c=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}$，$B=120°$，则a等于（ ）。

A. $\sqrt{6}$　B. 2　C. $\sqrt{3}$　D. $\sqrt{2}$

【解析】由正弦定理得 $\frac{\sqrt{6}}{\sin 120°}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}$，得 $\sin C=\frac{1}{2}$，于是有 $C=30°$，从而 $A=30°$，于是，△ABC是等腰三角形，$a=c=\sqrt{2}$，故选D。

真题赏析

精选高考名题，再现考点真题，讲解精准干炼，体验真题魅力，感悟高考真谛。

参考答案与提示

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

【变式训练】

【变式1-1】$\because A:B:C=1:2:3$，又 $A+B+C=180°$，

$\therefore A=30°, B=60°, C=90°$，

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{3}:2$，

故 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$。

【学业水平测试】

1. C［提示：由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $a\sin B=b\sin A$，故选C.］

2. A［提示：由已知有 $\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$，又 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$，$\therefore a:b:c=3:4:5$，故△ABC为直角三角形，故选A.］

【高考水平测试】

1. D［提示：由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\therefore \sin B=\frac{b}{a}\sin A$，又 $\because$ 在△ABC中，$0<\sin B\leq 1$，$\therefore 0<\frac{b}{a}\sin A\leq 1$，$\therefore a\geq b\sin A$，故选D.］

答案提示

提示解题思路，突破解析模式，规范标准答案，全程帮助你对照思路、比照答案、减少失误、赢得高分。

考点同步解读　高中数学5（必修）

编　委　会

目录 CONTENTS

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.2 应用举例

第二章 数 列

2.1 数列的概念与简单表示法

2.2 等差数列

2.3 等差数列的前 n 项和

第一章　解三角形

1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1　正弦定理

考点解读

1.(★★★)通过对特殊三角形边角间数量关系的研究,发现正弦定理,初步学会运用由特殊到一般的思想方法发现数学规律.(2009,湖南高考题)

2.(★★★★★)了解正弦定理的证明,能运用正弦定了解有关三角形,以及运用正弦定理解决相关问题.(2008,海南、宁夏高考题)

3.(★★★★★)通过对本讲的学习,进一步增强灵活运用所学知识分析问题、解决问题的能力.(2009,安徽高考题)

学法导引

学习本讲内容时,要善于运用平面几何知识以及平面向量知识证明正弦定理;应掌握用正弦定理将三角形的边角之间关系进行相互转化;已知两边和其中一边的对角解三角形时,解的个数的判定是本讲学习的难点,突破难点的方法是:充分利用平面几何作图方法将解的个数与圆、射线之间的公共点个数联系起来,或结合正弦函数图象以及三角形内角和定理分析、解决问题.

考点分类精讲

考点1　正弦定理

核心总结

在一个三角形中,各边和它所对的角的正弦的比相等,即
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

考题1　若$\triangle ABC$的三内角A,B,C满足$A+C=2B$,且最大边为最小边的2倍,求三角形三内角之比.

【解析】　设$\triangle ABC$的三内角从小到大依次为$B-\alpha,B,B+\alpha$.

$\because A+B+C=\pi$,　$\therefore B-\alpha+B+B+\alpha=\pi$,　$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

再设最小边为a,则最大边为$2a$.

由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\dfrac{2a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$,即$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$,

即$\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)$,　$\therefore \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3},\alpha=\frac{\pi}{6}$.

$\therefore$ 三内角分别为$\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$,它们的比为$1:2:3$.

【变式1-1】　在$\triangle ABC$中,若$A:B:C=1:2:3$,求$a:b:c$.

拓展·研讨

正弦定理的证明

(1)圆的证明法及其比值的几何意义

设$\triangle ABC$的外接圆是$\odot O$,半径为R.过B作直径BA',连接$A'C$,则$\angle A'CB=90°$.

当$\angle A$是锐角(如图1-1-1)时,有$\angle A=\angle A'$,则　$\sin A=\sin A'=\frac{BC}{BA'}=\frac{a}{2R}$,

$\therefore \frac{a}{\sin A}=2R$.

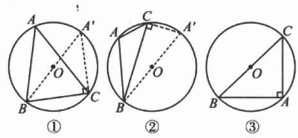


图1-1-1

依据图1-1-1②、③知,不论$\angle A$是锐角、钝角,还是直角,都有$\frac{a}{\sin A}=2R$.

◎**考题2** 在△ABC中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c.其中$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\tan A+\tan C+\tan\frac{\pi}{3}=\tan A\tan C\tan\frac{\pi}{3}$.

(1)求角B的大小;

(2)求$a+c$的取值范围.

【解析】(1)由$\tan A+\tan C+\tan\frac{\pi}{3}=\tan A\tan C\tan\frac{\pi}{3}$得

$$\tan A+\tan C=-\tan\frac{\pi}{3}(1-\tan A\tan C),$$

可知$1-\tan A\tan C\neq0$,否则$\tan A\tan C=1$,与$\tan A+\tan C=0$互相矛盾.

$\therefore \frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=-\tan\frac{\pi}{3}$,即$\tan(A+C)=-\sqrt{3}$.

而$0<A+C<\pi$,所以$A+C=\frac{2\pi}{3}$. $\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由正弦定理有$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\frac{\pi}{3}}=1$,

$\therefore a=\sin A,c=\sin C=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)$,

$\therefore a+c=\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$.

$\because 0<A<\frac{2\pi}{3}$, $\therefore \frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$.

于是$\frac{1}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$,则$a+c$的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$.

【变式1-2】 有关正弦定理的叙述:

①正弦定理只适用于锐角三角形;

②正弦定理不适用于直角三角形;

③在某一确定的三角形中,各边与其所对角的正弦的比是一定值;

④在△ABC中,$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$.

其中正确的个数是( ).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

同理可证 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

故 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

(2)面积证明法

如图1-1-2,AB边上高$CD=b\sin A$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}cb\sin A$,同理$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ca\sin B$,

$\therefore \frac{1}{2}cb\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$, $\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

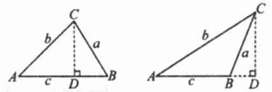


图1-1-2

(3)向量证明法

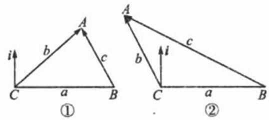


图1-1-3

如图1-1-3①,△ABC为锐角三角形,过点C作与$\overrightarrow{CB}$垂直的单位向量$\boldsymbol{i}$.

$\because \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$,

$\therefore \boldsymbol{i}\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{CA}$,

$\therefore \boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{CB}+\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{CA}$,

$\therefore |\boldsymbol{i}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos90^\circ+|\boldsymbol{i}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cdot\cos(90^\circ-B)=|\boldsymbol{i}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos(90^\circ-C)$,

$\therefore c\cdot\sin B=b\cdot\sin C$,即$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

同理,过点B作与$\overrightarrow{BA}$垂直的单位向量$\boldsymbol{i}$,可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

综上所述,$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

图1-1-3②中钝角三角形同学们可自己去推导.

考点2 正弦定理的活用

核心总结

正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,它在解题中有着广泛的应用,它有如下变形公式.

(1)$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$;

(2)$a\sin B=b\sin A$, $c\sin B=b\sin C$, $c\sin A=a\sin C$;

(3)$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$;

(4)$\sin A=\frac{a}{2R}$,$\sin B=\frac{b}{2R}$,$\sin C=\frac{c}{2R}$(其中R为三角形外接圆的半径);

(5)$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$.

注解·参考

正弦定理的理解与作用

正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$反映了三角形中三条边和对应角的正弦的关系,它的主要作用是实现三角形中边角关系的转化.

考题 3 在△ABC 中,求证: $\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{\sin B}{\sin A}$.

【证明】 由正弦定理将等式左边的边统一转化为角的三角函数,从而转化成三角恒等式证明的问题.

$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

$\therefore$ 左边$=\frac{2R\sin A-2R\sin C\cos B}{2R\sin B-2R\sin C\cos A}=\frac{\sin(B+C)-\sin C\cos B}{\sin(A+C)-\sin C\cos A}$

$=\frac{\sin B\cos C}{\sin A\cos C}=\frac{\sin B}{\sin A}=$右边.

【变式 2-1】 在△ABC 中,求证: $\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0$.

点拨·导航

如何活用正弦定理?其关键在于观察、分析问题,确定解题的基本方向——是"边化角",还是"角化边",再灵活地选择相应的变形公式.如在考题 3 中,待证明的恒等式左边有边角关系混在一起,而右边只有角之间的关系,因此将左边的"边"统一转化为"角"来表示是一种很自然的思路.

考点 3 利用正弦定理解三角形

核心总结

1. 解三角形:一般地,我们把三角形的三个角 A,B,C 和它们的对边 a,b,c 叫做三角形的元素.已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

2. 利用正弦定理可解决下列两种类型的问题:

(1)已知两角及一边,求其余两边;

(2)已知两边及其中一边的对角,求另两角及另一边.

考题 4 在△ABC 中,(1) $a=\sqrt{3}$, $b=2$, $B=45°$,求 A; (2) $A=30°$, $a=\sqrt{2}$, $b=2$,求 B; (3) $a=3$, $b=4$, $A=60°$,求 B; (4) $A=30°$, $B=45°$, $a=2$,求 c.

【解析】 利用正弦定理求解.

(1)由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

又 $A\in(0,\pi)$, $\therefore A\approx37.76°$或 $A\approx142.24°$.

而 $142.24°+45°>180°$,这与 $A+B<180°$矛盾, $\therefore A\approx37.76°$.

(2)由正弦定理得 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore B=45°$或 $135°$.

(3)由正弦定理得 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{2}{\sqrt{3}}>1$, $\therefore$ 这样的角 B 不存在.

(4)$\because C=180°-(A+B)=105°$,又$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$,

$\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\sin75°}{\sin30°}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

【变式 3-1】 在△ABC 中,已知 $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, $B=45°$,求 A,C 和 c.

【变式 3-2】 在△ABC 中,如果 $\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$,且 B 为锐角,试求 A,B,C.

题型·方法

由考题 4 可知,利用正弦定理解三角形的基本类型及解法如下:

条件	解 法
A,B,a	$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$, $C=\pi-(A+B)$, $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$
a,b,A	$\sin B=\frac{b}{a}\sin A$, $C=\pi-(A+B)$, $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$

误区·盲点

易错点

已知 a,b 和 A 解三角形,得 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A=m$,此时易错的地方是忽视钝角 B 的存在(如在考题 4(1)中漏掉一解 $A\approx142.24°$).事实上,由正弦函数 $y=\sin x$ 的图象可知,一般在$(0,\pi)$上满足 $\sin B=m$ 的角有两个,这两个解是否是三角形的解,还需要讨论,参看"考点 4".

防错良方

在$(0,\pi)$上满足 $\sin B=m$ 的角有两个,不要漏掉角为钝角的情况.

考点4 三角形解的个数的讨论

核心总结

若已知 a,b,A，由正弦定理得 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A=m$，由此式进一步求解三角形时，须结合 $\sin B$ 的取值范围及 $A+B<180°$ 来讨论：

(1)若 $m>1$，则不存在这样的角 B，故三角形无解；

(2)若 $m\leqslant1$，则在$[0°,180°]$内存在角 B，但此时三角形是否有解还须继续讨论.

①当 $m=1$ 时，则 $B=90°$，

a. 若此时 $A<90°$，则三角形有一解；

b. 若此时 $A\geqslant90°$，则三角形无解.

②当 $0<m<1$ 时，满足 $\sin B=m$ 的 B 为锐角时设为 α，B 为钝角时设为 β，则

a. 当 $A+\alpha>180°$ 时，三角形无解；

b. 当 $A+\alpha<180°$ 时，三角形有解(有几解呢?)；

c. 当 $A+\beta<180°$ 时，三角形有两解；

d. 当 $A+\beta\geqslant180°$ 时，三角形无解.

考题5 不解三角形，判断下列各题解的个数.

(1)$a=5,b=4,A=120°$； (2)$a=7,b=14,A=150°$；

(3)$a=9,b=10,A=60°$； (4)$c=50,b=72,C=135°$.

【解析】 (1)$\sin B=\frac{b}{a}\sin120°=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，而 $A=120°$， ∴ $\triangle ABC$ 有一解.

(2)$\sin B=\frac{b}{a}\sin150°=1$，而 $A=150°$， ∴ $\triangle ABC$ 无解.

(3)$\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{10}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$，而$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{5\sqrt{3}}{9}<1$， ∴ 当 B 为锐角时，满足 $\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{9}$ 的角有 $60°<B<90°$，故对应的钝角 B 有 $90°<B<120°$，也满足 $A+B<180°$， ∴ $\triangle ABC$ 有两解.

(4)$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{72}{50}\sin C>\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $B>45°$， ∴ $B+C>180°$， ∴ $\triangle ABC$ 无解.

【变式4-1】 在$\triangle ABC$ 中，判断下列各题解的情况：

(1)$a=7,b=14,A=30°$； (2)$a=30,b=25,A=150°$；

(3)$a=6,b=9,A=45°$； (4)$b=9,c=10,B=60°$.

考题6 在$\triangle ABC$ 中，若 $B=30°$，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=2$，则$\triangle ABC$ 的面积是______.

【解析】 由正弦定理，得 $\sin C=\frac{AB\sin B}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∵ $AB>AC$， ∴ $C>B$， ∴ C 有两解.

(1)若 C 为锐角，则 $C=60°$，$A=90°$. 由三角形面积公式，得

$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC=2\sqrt{3}$.

(2)若 C 为钝角，则 $C=120°$，$A=30°$.

故 $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sin30°=\sqrt{3}$.

综上所述，$\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$.

【变式4-2】 在$\triangle ABC$ 中，$A=30°$，$a=8$，$b=8\sqrt{3}$，则$\triangle ABC$ 的面积为(　　).

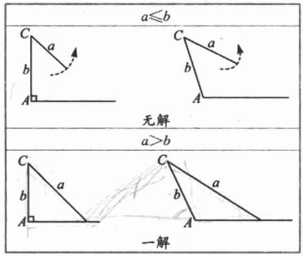
A. $32\sqrt{3}$　　B. 16　　C. $32\sqrt{3}$或16　　D. $32\sqrt{3}$或$16\sqrt{3}$

梳理·归纳

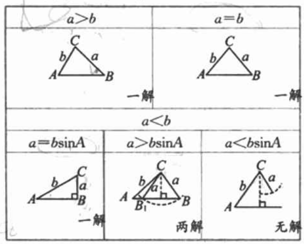
讨论三角形解的个数时应抓住两点：一是其正弦值与"1"的大小关系，从而决定等于此正弦值的角是否存在；二是由此正弦值所确定的角(在0°～180°内)的个数，它们与已知角的和是否小于180°.

也可用几何作图方法讨论，即已知 a,b 及 A，则：

(1) 当 $A\geqslant90°$时



(2) 当 $A<90°$时



简而言之，已知三角形两边及其中一边对角解三角形，这类问题可能有一解、两解或无解的情况. 如已知$\triangle ABC$ 中两边 a,b 和其中一边的对角 A，可用正弦定理计算 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$.

(ⅰ) 当 $a\geqslant b$ 时，$\sin B=\frac{b\sin A}{a}\in(0,1)$，则 $A\geqslant B$，只有一解，且 B 为锐角；

(ⅱ) 当 $a<b$ 时，显然 A 为锐角. 我们作图1-1-4予以说明：

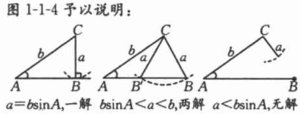


图 1-1-4

考点5 利用正弦定理判断三角形的形状

核心总结

判断三角形形状问题，主要是判定三角形是否为某些特殊的三角形，如直角三角形、锐角三角形、钝角三角形、等腰三角形、等边三角形等.

考题7 根据下列条件判断$\triangle ABC$的形状.

(1)$\dfrac{a}{\cos\frac{A}{2}}=\dfrac{b}{\cos\frac{B}{2}}=\dfrac{c}{\cos\frac{C}{2}}$；

(2)$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$.

【解析】(1)根据正弦定理有$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$.

代入已知等式中有

$$\frac{2R\sin A}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2R\sin B}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{2R\sin C}{\cos\frac{C}{2}}\Rightarrow\frac{\sin A}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin B}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{\sin C}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{C}{2}.$$

而$0<\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$， $\therefore \frac{A}{2}=\frac{B}{2}=\frac{C}{2}$.故$\triangle ABC$是正三角形.

(2)由正弦定理知$a=2R\sin A, b=2R\sin B$.将它们代入已知条件可得

$$(\sin^2A+\sin^2B)\sin(A-B)=(\sin^2A-\sin^2B)\sin(A+B)$$

又$\because$ $\sin^2A-\sin^2B=\dfrac{1-\cos2A}{2}-\dfrac{1-\cos2B}{2}=\dfrac{1}{2}(\cos2B-\cos2A)$

$=\sin(A+B)\sin(A-B)$，

$\therefore (\sin^2A+\sin^2B)\sin(A-B)=\sin^2(A+B)\sin(A-B)$， ①

$\therefore \sin(A-B)(\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C)=0(\because A+B+C=\pi)$.

$\therefore \sin(A-B)=0$或$\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=0$.

$\therefore A=B$或$a^2+b^2-c^2=0$.

故$\triangle ABC$是等腰三角形或直角三角形.

【变式5-1】 已知在$\triangle ABC$中，$b\sin B=c\sin C$，且$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$，试判断三角形的形状.

考题8 已知方程$x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$的两根之积等于两根之和，且a,b是$\triangle ABC$的两边，A,B为边a,b的对角，试判断$\triangle ABC$的形状.

【解析】 由于方程的两根之和$b\cos A$与两根之积$a\cos B$相等，可得$b\cos A=a\cos B$，因此我们可以利用正弦定理，把$a=2R\sin A, b=2R\sin B$代入即可得A,B的正弦和余弦之间的关系，进而得出结论.

设方程$x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$的两根分别为x_1,x_2，则有

$x_1+x_2=b\cos A, x_1x_2=a\cos B$， $\therefore b\cos A=a\cos B$.

由正弦定理可得$a=2R\sin A, b=2R\sin B$，代入上式得

$2R\sin B\cos A=2R\sin A\cos B$，即$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin(A-B)=0$.

$\because 0<A<\pi, 0<B<\pi$， $\therefore -\pi<A-B<\pi$， $\therefore A-B=0$，即$A=B$.

$\therefore \triangle ABC$为等腰三角形.

【变式5-2】 (1)在$\triangle ABC$中，若$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，则$\triangle ABC$是(　　).

A. 直角三角形　B. 等边三角形　C. 钝角三角形　D. 等腰直角三角形

(2)在$\triangle ABC$中，若$\sin A=\sin B$，则$\triangle ABC$的形状是________.

题型·方法

1. 判断三角形的形状，最终目标是判定三角形是否为某些特殊的三角形，其研究途径有二：

(1)研究边与边之间的关系：是否两边相等，是否三边相等，是否满足$a^2+b^2=c^2$等，如考题7(2)；

(2)研究角与角之间的关系：是否有两角相等，是否三个角相等，有无直角，有无钝角，是否均为锐角等，如考题7(1).

2. 当所给的条件含有边和角，判定三角形的形状时，应利用正弦定理将条件统一为“边”之间的关系或“角”之间的关系，如考题7和考题8.

误区·盲点

易错点

在考题7(2)的求解过程中，一要注意$\sin^2A-\sin^2B$的变形技巧；二要注意等式①中两边的$\sin(A-B)$不可轻易约掉，否则会遗失一种情况.

防错良方

解三角形时不要在等式两边轻易地除以含有边角的因式.

拓展·研讨

[问题] 在$\triangle ABC$中，设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.则$\triangle ABC$的形状如何？

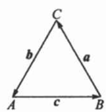


图1-1-5

[探究] 问题中给的条件是三个向量的数量积相等，要判定三角形的形状，关键是将它转化为三角形的边角关系，这就需要构建向量的数量积与正弦定理的联系.

即如图1-1-5，由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$得

$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-C)=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\pi-A)$，

$\therefore |\boldsymbol{a}|\cos C=|\boldsymbol{c}|\cos A$.

由正弦定理得$\sin A\cos C=\sin C\cos A$，

$\therefore \sin(A-C)=0$， $\therefore A=C$.

同理，由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$，可得到$B=C$，

$\therefore A=B=C$，即$\triangle ABC$为等边三角形.

考点6　正弦定理的综合应用

核心总结

利用正弦定理解决三角形中的综合问题的关键在于:充分利用正弦定理的边角关系相互转化这一功能.常见的综合问题有:正弦定理与平面向量、三角形、三角函数的综合交汇问题.

考题9　已知$|\boldsymbol{a}|=8$,$|\boldsymbol{b}|=7$,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的夹角为60°,求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.

【解析】　利用平行四边形法则画出示意图,利用图形的直观性及正弦定理求解.

如图1-1-6所示,以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为邻边作□$ABCD$,使$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\angle BAC=60°$.

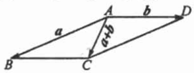


图1-1-6

由正弦定理得$\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$,

$\therefore \sin\angle ACB=\dfrac{8\sin60°}{7}\approx0.9897$,

$\therefore \angle ACB\approx81.79°$或$\angle ACB\approx98.21°$.

故$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为141.79°或158.21°.

【变式6-1】　在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,$\tan C=3\sqrt{7}$.求$\cos C$.

考题10　如图1-1-7,在等腰$\triangle ABC$中,底边$BC=1$,底角B的平分线BD交AC于点D,求BD的取值范围.

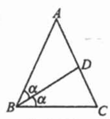


图1-1-7

【解析】　设$\angle ABC=2\alpha$,则$\angle ABD=\angle CBD=\alpha$,

$\therefore \angle ACB=2\alpha$,$A=180°-4\alpha$,$\angle BDC=A+\angle ABD=180°-3\alpha$.

因为$BC=1$,在$\triangle BCD$中,由正弦定理得

$$\frac{BD}{\sin C}=\frac{BC}{\sin\angle BDC},\text{即}\frac{BD}{\sin2\alpha}=\frac{1}{\sin(180°-3\alpha)},$$

所以$BD=\dfrac{\sin2\alpha}{\sin3\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha}$

$=\dfrac{2\cos\alpha}{4\cos^2\alpha-1}=\dfrac{2}{4\cos\alpha-\dfrac{1}{\cos\alpha}}$.

因为$0°<\alpha<45°$,所以$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\alpha<1$.

而当$\cos\alpha$增大时,BD递减,且当$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时,$BD=\sqrt{2}$;当$\cos\alpha=1$时,$BD=\dfrac{2}{3}$.

故BD的取值范围为$\left(\dfrac{2}{3},\sqrt{2}\right)$.

【变式6-2】　已知$\triangle ABC$中,AD是$\angle BAC$的平分线.求证:$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

点拨·导航

1.解决平面向量与正弦定理应用的综合问题,应充分利用向量的几何特征,将向量问题转化为三角形的问题,如考题9.

2.利用正弦定理解决有关三角形的综合问题,关键是充分利用正弦定理所具有的边角互化的功能,如考题10.

3.正弦定理与三角函数的交汇问题,其核心考查的是三角函数的有关知识,因此应以正弦定理为工具,将问题转化为三角函数问题.

误区·盲点

易错点1　忽视角的取值范围

解决正弦定理的综合应用问题(特别涉及取值范围、最值等问题),易错点是:忽视对角的取值范围的研究.如在考题10中,若不研究α的取值范围,就会得出错误的结论.再如:

[例题]　在$\triangle ABC$中,若$C=3B$,求$\dfrac{c}{b}$的取值范围.

[错解]　由正弦定理得$\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sin3B}{\sin B}=\dfrac{\sin(B+2B)}{\sin B}=\dfrac{\sin B\cos2B+\cos B\sin2B}{\sin B}=\cos2B+2\cos^2B=4\cos^2B-1$,　$\because -1<\cos B<1$,$\therefore 0\leqslant\cos^2B<1$,　$\therefore -1\leqslant4\cos^2B-1<3$.

又$\dfrac{c}{b}>0$,故$\dfrac{c}{b}$的取值范围为$(0,3)$.

[错因分析]　本题[错解]错在没有注意到对角B的取值范围的研究.事实上,$\because C=3B$,　$\therefore A=180°-(B+C)=180°-4B>0°$,$\therefore 0°<B<45°$.从而得出错误的结论.

[正解]　由正弦定理得$\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sin3B}{\sin B}=\dfrac{\sin(B+2B)}{\sin B}=\dfrac{\sin B\cdot\cos2B+\cos B\cdot\sin2B}{\sin B}=\cos2B+2\cos^2B=4\cos^2B-1$.又因为$A+B+C=180°$,$C=3B$,所以$0°<B<45°$,$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<1$,所以$1<4\cos^2B-1<3$,故$1<\dfrac{c}{b}<3$.

易错点2　忽视对三角形的隐含条件的研究

【变式 6-3】 在$\triangle ABC$中，已知$\frac{a+b}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A}$，且$\cos(A-B)+\cos C=1-\cos 2C$.

(1)试确定$\triangle ABC$的形状；

(2)求$\frac{a+c}{b}$的取值范围.

◎ **考题 11** 在$\triangle ABC$中，A,B,C所对的边分别是a,b,c，且$\tan A=\frac{1}{2}$，$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(1)求$\tan C$的值；

(2)若$\triangle ABC$最短边的长为$\frac{\sqrt{5}}{5}$，求$\triangle ABC$的面积.

【解析】 (1)因为$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以角$B$为锐角或钝角.

当角B是钝角时，$\cos B=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\tan B=-\frac{1}{3}$. 又$\tan A=\frac{1}{2}$，

所以$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{6}}=\frac{1}{7}$，

所以$\tan C=-\frac{1}{7}$，角C也是钝角，故舍去，所以角B为锐角.

故$\cos B=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\tan B=\frac{1}{3}$，$\tan(A+B)=1$，所以$\tan C=-1$.

(2)由$\tan C=-1$，$0°<C<180°$，知$C=135°$.

又$\tan A>\tan B>0$，所以b边最短，即$b=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

因为$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以$c=\frac{b\cdot\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{10}}=1$.

又因为$\tan A=\frac{1}{2}$，所以$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{10}$.

【变式 6-4】 已知在$\triangle ABC$中，$c=2\sqrt{2}$，$a>b$，$C=\frac{\pi}{4}$，$\tan A\cdot\tan B=6$，试求a,b及三角形的面积.

[例题] 在$\triangle ABC$中，已知$AC=2$，$BC=3$，$\cos A=-\frac{4}{5}$.

(1)求$\sin B$；(2)求$\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)$.

[错解] (1)在$\triangle ABC$中，

$\because \cos A=-\frac{4}{5}$，

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3}{5}$.

由正弦定理得$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，

$\therefore \sin B=\frac{AC\sin A}{BC}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

(2)$\because \sin B=\frac{2}{5}$，

$$\therefore \cos B=\pm\sqrt{1-\sin^2 B}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{21}}{5},$$

$$\therefore \sin 2B=2\sin B\cos B=2\times\frac{2}{5}\times\left(\pm\frac{\sqrt{21}}{5}\right)=\pm\frac{4\sqrt{21}}{25},$$

$$\cos 2B=2\cos^2 B-1=2\times\left(\pm\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2-1=\frac{17}{25}.$$

$$\therefore \sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}=\pm\frac{4\sqrt{21}}{25}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{17}{25}\times\frac{1}{2}=\frac{17\pm12\sqrt{7}}{50}.$$

[错因分析] 由于在$\triangle ABC$中，A,B,C应满足$A+B+C=180°$，且$\cos A=-\frac{4}{5}$即$A>\frac{\pi}{2}$，所以$B<\frac{\pi}{2}$即必有$\cos B>0$. 以上解法出错的原因在于没有很好地注意一个三角形中只能有一个钝角这一隐含条件.

[正解] (1)在$\triangle ABC$中，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$.

由正弦定理知$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，

$\therefore \sin B=\frac{AC}{BC}\cdot\sin A=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

$\because \cos A=-\frac{4}{5}$，$\therefore A$为钝角，从而$B$为锐角，$\therefore \cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$，$\therefore \cos 2B=2\cos^2 B-1=2\times\frac{21}{25}-1=\frac{17}{25}$，$\sin 2B=2\sin B\cos B=2\times\frac{2}{5}\times\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{4\sqrt{21}}{25}$.

考题 12 （2009，山东）已知函数 $f(x)=2\sin x\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos x\sin\varphi-\sin x(0<\varphi<\pi)$ 在 $x=\pi$ 处取最小值.

（Ⅰ）求 φ 的值；

（Ⅱ）在△ABC 中，a,b,c 分别是角 A,B,C 的对边. 已知 $a=1,b=\sqrt{2},f(A)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求角 C.

【解析】 （Ⅰ）$f(x)=2\sin x\cdot\frac{1+\cos\varphi}{2}+\cos x\sin\varphi-\sin x$

$=\sin x+\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi-\sin x$

$=\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\sin(x+\varphi)$.

因为 $f(x)$ 在 $x=\pi$ 处取最小值，

所以 $\sin(\pi+\varphi)=-1$，故 $\sin\varphi=1$.

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$.

因为 $f(A)=\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 A 为△ABC 的内角，所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $B=\frac{\pi}{4}$ 或 $B=\frac{3\pi}{4}$.

当 $B=\frac{\pi}{4}$ 时，$C=\pi-A-B=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$；

当 $B=\frac{3\pi}{4}$ 时，$C=\pi-A-B=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$.

综上所述，$C=\frac{7\pi}{12}$ 或 $C=\frac{\pi}{12}$.

【变式 6-5】 在△ABC 中，已知内角 $A=\frac{\pi}{3}$，边 $BC=2\sqrt{3}$. 设内角 $B=x$，周长为 y.

（1）求函数 $y=f(x)$ 的解析式和定义域；

（2）求 y 的最大值.

$\therefore \sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{4\sqrt{21}}{25}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{17}{25}\times\frac{1}{2}=\frac{12\sqrt{7}+17}{50}$.

题型优化测训

学业水平测试

一、选择题

1.[考点 1]在△ABC 中，一定成立的等式是（　　）.

A. $a\sin A=b\sin B$　　B. $a\cos A=b\cos B$

C. $a\sin B=b\sin A$　　D. $a\cos B=b\cos A$

2.[考点 5]在△ABC 中，$\frac{3}{\sin A}=\frac{4}{\sin B}=\frac{5}{\sin C}$，则△ABC 是（　　）.

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

3.[考点 5]△ABC 中，若 $(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin C$，则△ABC 是（　　）.

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等腰或直角三角形

4.[考点 4]在△ABC 中，若已知 $a=18,b=22,A=35^\circ$，则 B 的解的情况是（　　）.

A. 无解　　B. 一解　　C. 两解　　D. 三解

二、填空题

5.[考点 3]在△ABC 中，a,b,c 分别是 A,B,C 所对的边，若 $A=105^\circ,B=45^\circ,b=2\sqrt{2}$，则 $c=$______.

6.[考点 6]在△ABC 中，$a=5,B=45^\circ,C=105^\circ$，则其面积 $S=$______.

三、解答题

7. [考点 3、4]在$\triangle ABC$中，已知$a=26\text{cm}$，$b=28\text{cm}$，$A=50°$，解此三角形.(角度精确到1°，边长精确到1cm)

8. [考点 3、6]在$\triangle ABC$中，$B=30°$，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=2$，求$\triangle ABC$的面积.

高考水平测试

一、选择题

1. [考点 2]在$\triangle ABC$中，下列关系一定成立的是(　　).

A. $a<b\sin A$　　B. $a=b\sin A$

C. $a>b\sin A$　　D. $a\geqslant b\sin A$

2. [考点 1]已知$\triangle ABC$的三个内角之比为$A:B:C=3:2:1$，那么对应三边之比$a:b:c$等于(　　).

A. $3:2:1$　　B. $\sqrt{3}:2:1$

C. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$　　D. $2:\sqrt{3}:1$

3. [考点 4]在$\triangle ABC$中，由已知条件解三角形，其中有两解的是(　　).

A. $b=20$，$A=45°$，$C=80°$

B. $a=30$，$c=28$，$B=60°$

C. $a=14$，$b=16$，$A=45°$

D. $a=12$，$c=15$，$A=120°$

4. [考点 1]在$\triangle ABC$中，若$\sqrt{3}a=2b\sin A$，则B等于(　　).

A. $30°$　　B. $60°$

C. $30°$或$150°$　　D. $60°$或$120°$

5. [考点 3]在$\triangle ABC$中，已知$a=8$，$B=60°$，$C=75°$，则$b=$(　　).

A. $4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{6}$　　D. $\dfrac{32}{3}$

6. [考点 6]在$\triangle ABC$中，$a=x$，$b=2$，$B=45°$，若这个三角形有两解，则x的取值范围是(　　).

A. $x>2$　　B. $x<2$

C. $2<x<2\sqrt{2}$　　D. $2<x<2\sqrt{3}$

7. [考点 6]在$\triangle ABC$中，$A=\dfrac{\pi}{3}$，$BC=3$，则$AB+AC$的长可表示为(　　).

A. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　B. $6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)$

C. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　D. $6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$

二、填空题

8. [考点 2]已知$\triangle ABC$外接圆半径是2cm，$A=60°$，则BC边长为______.

9. [考点 3、4]在$\triangle ABC$中，已知$b=3$，$c=3\sqrt{3}$，$B=30°$，则$a=$______.

10. [考点 2]在$\triangle ABC$中，若$\sin A:\sin B:\sin C=k:(k+1):2k$，则$k$的取值范围是______.

11. [考点 6]在$\triangle ABC$中，$a=3\sqrt{2}$，$\cos C=\dfrac{1}{3}$，$S_{\triangle ABC}=4\sqrt{3}$，则$b=$______.

三、解答题

12. [考点 6]在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$b-c=2a\cos(60°+C)$，求角A.

13. [考点 2、6]在$\triangle ABC$中，$\dfrac{a}{c}=\sqrt{3}-1$，$\dfrac{\tan B}{\tan C}=\dfrac{2a-c}{c}$，求$A$，$B$，$C$.

14. [考点 6]在$\triangle ABC$中，若$C=2A$，$\cos A=\dfrac{3}{4}$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{27}{2}$.

(1)求$\cos B$；

(2)求BC边的长.

15. [考点 6](2009，四川)在$\triangle ABC$中，A,B为锐角，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$\cos 2A=\dfrac{3}{5}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

(Ⅰ)求$A+B$的值；

(Ⅱ)若$a-b=\sqrt{2}-1$，求a,b,c的值.