三角学系列

三角解题引导

车新发 编

- 三角函数及其基本性质
- 加法定理及其推广
- 解三角形
- 反三角函数
- 三角方程

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

三角学系列

三角解题引导

车新发 编

◎三角函数及其基本性质

◎加法定理及其推广

◎解三角形

◎反三角函数

◎三角方程

HITP
哈尔濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书为三角解题引导，全书共分四章. 每章包括概述、例题、习题和习题解答四个部分. 概述部分对每章所涉及的基础知识作了概括的叙述. 例题是每章的中心，例题的选取，注意了题型的代表性和典型性、知识的综合性、解法的技巧性. 习题部分选择了各种类型的题目，供读者参考，习题解答专门用一节列出.

本书适合中学生、中学教师以及数学爱好者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

三角解题引导/车新发编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.1

ISBN 978-7-5603-4553-6

Ⅰ.①三… Ⅱ.①车… Ⅲ.①三角课-中学-题解 Ⅳ.①G634.645

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 309947 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘家琳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 22　字数 238 千字
版　　次　2014 年 1 月第 1 版　2014 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4553-6
定　　价　38.00 元

◎目录

三角函数及其基本性质

第1章

§1 概述

衡量角度的大小,通常除用度、分、秒表示的角度制以外,还有弧度制等.弧度制是置角的顶点于圆心,以所张的单位圆弧长表示角度.弧度的单位也叫径.

直角三角形中,三条边的六种比与锐角的变化一一对应;在坐标系中,置角的顶点于原点,始边于正 x 轴,取逆时针方向为正向,终边上任一点的横坐标、纵坐标及该点到原点的距离,这三者的六种比与角的变化相对应,角变比值变,角定比值定,因此,这些比值为角的函数.通常具体表达如下:

	Rt△ 两边的比表达的锐角三角函数	坐标法表达的任意角三角函数
正　弦	$\sin A = \frac{a}{c}$	$\sin \alpha = \frac{y}{r}$
余　弦	$\cos A = \frac{b}{c}$	$\cos \alpha = \frac{x}{r}$
正　切	$\tan A = \frac{a}{b}$	$\tan \alpha = \frac{y}{x}$
余　切	$\cot A = \frac{b}{a}$	$\cot \alpha = \frac{x}{y}$
正　割	$\sec A = \frac{c}{b}$	$\sec \alpha = \frac{r}{x}$
余　割	$\csc A = \frac{c}{a}$	$\csc \alpha = \frac{r}{y}$

此外,也常用单位圆的三角函数线进行表达. 锐角三角函数有表可查,但其定义域限于锐角. 锐角三角函数可看作任意角三角函数的特例.

根据三角函数的定义可得:

1. 三角函数的符号,依终边所在的象限而定. 如下:

$f(\alpha)$ \ α	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin\alpha$ $\csc\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$ $\sec\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$ $\cot\alpha$	+	−	+	−

2. 同角三角函数间有如下关系:

倒数关系

$$\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1;\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

商的关系

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

平方关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$$

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

3. 诱导公式反映了 $k\cdot 90°\pm\alpha$(k 为整数) 与 α 的三角函数间的关系. 当 k 为偶数时,等于 α 的同名三角函数,加上把 α 看作锐角时,原角所在象限内原函数的符号;当 k 为奇数时,等于 α 的相应的余函数,加上把 α 看作锐角时,原角所在象限内的原函数的符号;即通常所说的"奇变偶不变,符号看象限",借助这,任意角三角函数皆可化作相应的锐角三角函数,查表求值. 如

$$\tan 930°=\tan(10\times 90°+30°)=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin(-1\,485°)=-\sin 1\,485°=$$

$$-\sin(17\times 90°-45°)=-\cos 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

几何图形的直观,有助于函数性质的了解. 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ 的图象及性质如下:

1. 图象

$y=\sin x$(图 1.1)

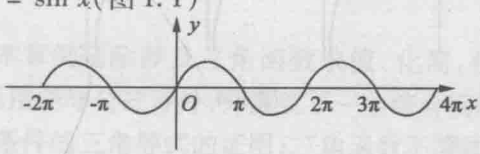

图 1.1

$y = \cos x$(图 1.2)

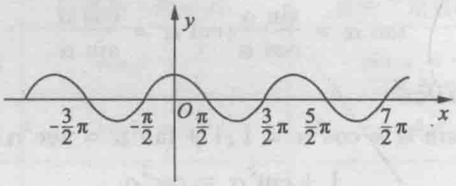

图 1.2

$y = \tan x$(图 1.3)

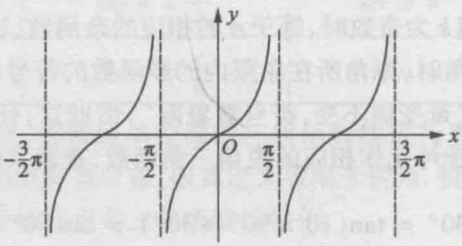

图 1.3

$y = \cot x$(图 1.4)

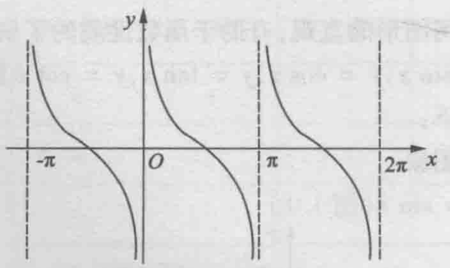

图 1.4

2. 基本性质

	定义域	值域	增减性		奇偶性	周期性
			递增区间	递减区间		
$y=\sin x$	全体实数	$-1\leqslant y\leqslant 1$	$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$	$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$	奇函数	2π
$y=\cos x$	全体实数	$-1\leqslant y\leqslant 1$	$(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi$	$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$	偶函数	2π
$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$(k 为整数)	全体实数	$k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$		奇函数	π
$y=\cot x$	$x\neq k\pi$(k 为整数)	全体实数		$k\pi<x<(k+1)\pi$	奇函数	π

§2　例　题

本章例题除涉及三角函数求值、化简、恒等式论证、运用诱导公式等外，并注意了一些综合问题. 如：带附加条件的三角等式的证明；三角函数不等式的证明；消去法；三角函数求极值等.

1. 已知 $\tan\alpha = m$，求 $\sin\alpha$.

分析 由于 m 是数字，需就 $m=0, m>0, m<0$ 分别进行讨论.

解 当 $m=0$ 时，$\alpha = k\pi(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，故

$$\sin\alpha = 0$$

当 $m>0$ 时，置顶点于原点，始边在 x 轴正向的角 α，其终边在一、三象限. 故当此终边在第一象限时

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sec\alpha} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$$

在第三象限时

$$\sin\alpha = -\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$$

当 $m<0$ 时，α 的终边在二、四象限. 故当 α 终边在第二象限时

$$\sin\alpha = -\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$$

在第四象限时

$$\sin\alpha = \frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$$

2. 已知 $\sin\theta = \frac{a-b}{a+b}(0<a<b)$，求 $\sqrt{\cot^2\theta - \cos^2\theta}$ 的值.

分析 本题除涉及已知某三角函数值求其他三角函数值外，还牵涉根式，因此还须注意算术根.

解 因 $0<a<b$，所以

$$\sin\theta = \frac{a-b}{a+b} < 0$$

从而有

$$\sqrt{\cot^2\theta - \cos^2\theta} = \sqrt{\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}} = \frac{\cos^2\theta}{-\sin\theta} =$$

$$\sin\theta - \frac{1}{\sin\theta} =$$

$$\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} = -\frac{4ab}{a^2-b^2}$$

3. 已知 $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{60}{169}$,且 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$,求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值.

分析　根据已知条件和恒等式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,运用韦达定理,可求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值. 因

$$1 \pm 2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2$$

故在 $\sin\alpha + \cos\alpha$,$\sin\alpha - \cos\alpha$,$\sin\alpha\cos\alpha$ 三个式子中,已知其中某一个式子的值,则其余两式的值不难求出. 因此,本题以先求出 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 及 $\sin\alpha - \cos\alpha$ 的值为宜.

解　由 $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{60}{169}$ 得

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{289}{169}$$

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{49}{169}$$

又已知 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$,故 $\sin\alpha > \cos\alpha > 0$,所以

$$\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{17}{13} \\ \sin\alpha - \cos\alpha = \dfrac{7}{13} \end{cases}$$

解之即得

$$\sin\alpha=\frac{12}{13},\cos\alpha=\frac{5}{13}$$

4. 已知 $\sin\alpha=a\sin\beta,\tan\alpha=b\tan\beta$，求 $\cos\alpha$ 和 $\sin\beta$ 的值（这里 a,b 满足条件 $|b|\geqslant|a|>1$ 或 $|b|\leqslant|a|<1$）.

分析 由两等式消去 β，便得到一个只含有 α 的三角函数的等式，从而可求出 $\cos\alpha$ 的值；若消去 α，便可求出 $\sin\beta$ 的值.

解 由 $\sin\alpha=a\sin\beta,\tan\alpha=b\tan\beta$ 得

$$\csc\beta=\frac{a}{\sin\alpha},\cot\beta=\frac{b}{\tan\alpha}$$

而

$$\csc^2\beta-\cot^2\beta=1$$

所以

$$\left(\frac{a}{\sin\alpha}\right)^2-\left(\frac{b}{\tan\alpha}\right)^2=1$$

$$a^2-b^2\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$$

$$(b^2-1)\cos^2\alpha=a^2-1$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{a^2-1}{b^2-1}}$$

用同样的方法可求得

$$\sin\beta=\pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2-1}}$$

$\sin\beta$ 的值还可以由 $\sin\beta=\dfrac{1}{a}\sin\alpha$ 求出

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{a^2-1}{b^2-1}=\frac{b^2-a^2}{b^2-1}$$

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2-1}}$$

$$\sin\beta=\pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2-1}}$$

5. 化简

$$\left(\sqrt{\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}}-\sqrt{\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}}-\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{1-\cos\phi}}\right)$$

解　根据题意,有

原式 $=$

$$\left(\sqrt{\frac{(1-\sin\phi)^2}{1-\sin^2\phi}}-\sqrt{\frac{(1+\sin\phi)^2}{1-\sin^2\phi}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{(1-\cos\phi)^2}{1-\cos^2\phi}}-\sqrt{\frac{(1+\cos\phi)^2}{1-\cos^2\phi}}\right)=$$

$$\frac{(1-\sin\phi)-(1+\sin\phi)}{\sqrt{\cos^2\phi}}\cdot\frac{(1-\cos\phi)-(1+\cos\phi)}{\sqrt{\sin^2\phi}}=$$

$$\frac{-2\sin\phi}{|\cos\phi|}\cdot\frac{-2\cos\phi}{|\sin\phi|}=$$

$$\frac{4\sin\phi\cos\phi}{|\cos\phi||\sin\phi|}=\frac{4\sin2\phi}{|\sin2\phi|}=$$

$$\begin{cases}4,\text{当 } k\pi<\phi<k\pi+\dfrac{\pi}{2}\text{ 时}\\ -4,\text{当 } k\pi+\dfrac{\pi}{2}<\phi<(k+1)\pi\text{ 时}(k\text{ 为整数})\end{cases}$$

6. 求证 $\dfrac{1+\sec x+\tan x}{1+\sec x-\tan x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

分析 关于三角恒等式的论证,不仅要善于对同角三角函数间进行相互转化,而且还要注意1与三角函数间的相互转化.

证 根据题意,有

$$\frac{1+\sec x+\tan x}{1+\sec x-\tan x}=$$

$$\frac{\sec^2 x-\tan^2 x+\sec x+\tan x}{1+\sec x-\tan x}=$$

$$\frac{(\sec x+\tan x)(\sec x-\tan x+1)}{1+\sec x-\tan x}=$$

$$\sec x+\tan x=\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

7. 求证$\dfrac{2(\cos\theta-\sin\theta)}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$.

证 根据题意,有

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=$$

$$\frac{\cos\theta+\cos^2\theta-\sin\theta-\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}=$$

$$\frac{(\cos\theta-\sin\theta)(1+\sin\theta+\cos\theta)}{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}=$$

$$\frac{2(\cos\theta-\sin\theta)(1+\sin\theta+\cos\theta)^{[注]}}{2+2(\sin\theta+\cos\theta)+2\sin\theta\cos\theta}=$$

$$\frac{2(\cos\theta-\sin\theta)(1+\sin\theta+\cos\theta)}{1+2(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta+\cos\theta)^2}=$$

$$\frac{2(\cos\theta-\sin\theta)(1+\sin\theta+\cos\theta)}{(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}=$$

$$\frac{2(\cos\theta-\sin\theta)}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

注 此时将分子、分母同乘以2,一方面可使分子

出现2,另一方面可将分母化为$(1+\sin\theta+\cos\theta)^2$.

8. 已知$\left(\frac{\tan\alpha}{\sin x}-\frac{\tan\beta}{\tan x}\right)^2=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$,求证$\cos x=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$.

分析　要证$\cos x=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$,即要证$\tan\alpha\cos x-\tan\beta=0$,亦即要证$(\tan\alpha\cos x-\tan\beta)^2=0$.

证　依已知条件有

$$\frac{\tan^2\alpha}{\sin^2 x}+\frac{\tan^2\beta}{\tan^2 x}-\frac{2\tan\alpha\tan\beta}{\sin x\tan x}=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$$

$$\tan^2\alpha(\csc^2 x-1)+\tan^2\beta(\cot^2 x+1)-2\tan\alpha\tan\beta\cos x\csc^2 x=0$$

$$\tan^2\alpha\cot^2 x+\tan^2\beta\csc^2 x-2\tan\alpha\tan\beta\cos x\csc^2 x=0$$

$$\tan^2\alpha\cos^2 x+\tan^2\beta-2\tan\alpha\tan\beta\cos x=0$$

$$(\tan\alpha\cos x-\tan\beta)^2=0$$

即
$$\tan\alpha\cos x-\tan\beta=0$$

所以

$$\cos x=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$$

9. 已知$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$,求证

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$$

证　将已知等式两边同乘以$a+b$,得

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{b}{a}\sin^4 x+\frac{a}{b}\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2$$

$$b^2\sin^4 x-2ab\sin^2 x\cos^2 x+a^2\cos^4 x=0$$

$$b\sin^2 x = a\cos^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b}$$

设 $\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b} = \lambda$[注],代入原等式之中,得

$$\lambda = \frac{1}{a+b}$$

所以

$$\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \sin^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{a}\right)^3 + \cos^2 x\left(\frac{\cos^2 x}{b}\right)^3 =$$

$$\sin^2 x \cdot \lambda^3 + \cos^2 x \cdot \lambda^3 =$$

$$\lambda^3 = \frac{1}{(a+b)^3}$$

注 这里设其比值等于 λ,可简化后面的计算.数学中,当几个比值相等时,常这样处理.

10. 设 k 是4的倍数加1的自然数,若以 $\cos x$ 表示 $\cos kx$ 时,有 $\cos kx = f(\cos x)$,则 $\sin kx = f(\sin x)$.

证 由于 $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,设 $k = 4n+1(n = 0,1,2,\cdots)$,则有

$$f(\sin x) = f\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] =$$

$$\cos k\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$\cos\left[(4n+1)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] =$$

$$\cos\left[2n\pi + \frac{\pi}{2} - (4n+1)x\right] =$$

$$\sin(4n+1)x =$$

$$\sin kx$$

11. 若$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$,求证$\cos(\sin\theta) > \sin(\cos\theta)$.

分析　为便于比较大小,将不等式两边化为同名三角函数.

因$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$,所以$\frac{\pi}{2} - \sin\theta$和$\cos\theta$都是锐角,原不等式与

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin\theta\right) > \sin(\cos\theta)$$

等价,故本证明转化为证明

$$\frac{\pi}{2} - \sin\theta > \cos\theta$$

即

$$\sin\theta + \cos\theta < \frac{\pi}{2}$$

证　因$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$,故有

$$\sin\theta \geqslant 0, \cos\theta \geqslant 0$$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \leqslant 1 + \sin^2\theta + \cos^2\theta = 2$$

所以

$$\sin\theta + \cos\theta \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \sin\theta > \cos\theta$$

而$\frac{\pi}{2} - \sin\theta$和$\cos\theta$都是锐角,依正弦函数在第一象限单调递增,有