普通高等教育“十二五”规划教材
哈尔滨工业大学数学教学丛书
复变函数与积分变换系列教材

复变函数与积分变换
同步学习辅导

（第二版）

哈尔滨工业大学数学系　组编
包革军　邢宇明　陈明浩　编
李贯锋　盖云英

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
哈尔滨工业大学数学教学丛书
复变函数与积分变换系列教材

复变函数与积分变换
同步学习辅导
(第二版)

哈尔滨工业大学数学系　组编
包革军　邢宇明　陈明浩　李贯锋　盖云英　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是《复变函数与积分变换(第三版)》(哈尔滨工业大学数学教学丛书, 科学出版社, 2014)一书的教学辅导与学习参考书, 可与该教材配套使用.

全书共分 8 章. 每章包括内容提要、典型例题剖析、测试题及其解答等四部分, 而且每章的后一部分都对《复变函数与积分变换(第三版)》一书相应章节的习题作出了详细的解答.

本书不仅可供理工科师生使用, 对于有兴趣自学复变函数与积分变换课程的读者也是一本较好的辅导书与参考书.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换同步学习辅导/哈尔滨工业大学数学系组编; 包革军等编. —2 版. —北京: 科学出版社, 2014

普通高等教育“十二五”规划教材·哈尔滨工业大学数学教学丛书·复变函数与积分变换系列教材

ISBN 978-7-03-041218-8

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①哈… ②包… Ⅲ. ①复变函数-高等学校-教学参考资料 ②积分变换-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 126409 号

责任编辑: 张中兴 周金权 / 责任校对: 包志虹
责任印制: 阎 磊 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2014 年 6 月第 二 版 印张: 20 1/2
2014 年 6 月第四次印刷
字数: 431 000

定价: 35.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

第二版前言

本书第一版自 2004 年 3 月出版以来已经历了九个春秋. 作者和哈尔滨工业大学复变函数教学团队的同事们在九届学生的复变函数与积分变换课程上将它作为辅助教材和参考书使用过, 得到广大师生的欢迎和肯定. 同事们和国内的一些同行对本书也指出了一些文字上的错误并提出了若干改进意见. 此前由于我们一直忙于教学和科研, 少有时间和机会对本书不尽人意的地方进行修改, 值此再版之际, 我们根据大家的宝贵意见对教材进行修订, 也决心在今后教材重印时不断改进和提高, 以使本教材尽快臻于完善. 这次修改主要有下述两个方面:

(1) 修订和改正一些错别字和印刷错误, 对某些文字叙述不够准确的地方进行润色, 并使书中所用的符号统一化和规范化.

(2) 考虑到当前理工科院校对复变函数与积分变换课程的教学课时数略有减少, 基于减轻学生学习负担的考虑, 本系列的主教材《复变函数与积分变换 (第三版)》一书的各章后的习题略有减少, 难度有所降低且不再分为 A、B 两类, 这本辅导教材的习题解答部分也作了相应的调整和改进, 与主教材同步.

最后对同学们及大力支持本书出版的科学出版社表示由衷的感谢.

编　者

2013 年 12 月

第一版前言

《复变函数与积分变换》是理工科院校, 特别是电类及与电类有关专业学生的一门重要的数学基础课. 它的理论和方法在自然科学和工程技术中有广泛的应用, 是工程技术人员常用的分析问题、解决问题的基本方法. 尤其当前信息产业迅猛发展, 越来越多的人需要这方面的基础知识. 因此帮助读者深刻理解并领会它的理论, 熟悉并掌握它的基本方法, 十分必要.

本书是与我校编写的、由科学出版社出版的《复变函数与积分变换》教材相配套的教学辅导与学习参考书. 根据我们多年的教学经验, 当前本课程的学时十分有限, 而内容又很多. 它涉及的一些基本概念比较抽象, 同时课后习题比较难. 为了有效地帮助广大读者正确理解和掌握它的基本理论与方法, 增强分析问题与解决问题的能力, 我们编写了这本学习辅导参考书 (书中内容标题前打有“*”号处, 为超出大纲的内容, 与教材相应).

全书共分 8 章, 有如下特点:

1. 每章备有内容提要, 集中提炼了全章内容, 使读者阅读本书时, 不必到别处查找定理和公式; 每章备有典型题剖析, 我们选择比较基本的但解题易错的题型进行分析且详细给以解答, 使读者能够举一反三; 每章还有测试题, 读者可以通过自己独立解答, 了解自己对课程内容掌握的情况. 测试题后有详细解答供读者对照、参考.

2. 在每章的最后, 都对科学出版社出版的《复变函数与积分变换》教材中的所有习题做了详细的解答.

参加本书编写的有盖云英 (第 1 章前半部分, 第 7 章, 第 8 章)、包革军 (第 1 章后半部分, 第 2 章)、陈明浩 (第 3 章、第 4 章)、邢宇明 (第 5 章, 第 6 章), 最后, 由盖云英教授完成了对全书的统稿.

在编写过程中得到科学出版社的大力支持, 编者表示感谢!

由于编者的水平有限, 书中的缺点和疏漏在所难免, 恳请各位专家、同行以及广大读者批评指正!

编　者

于哈尔滨工业大学

目　　录

第二版前言

第一版前言

第 1 章　复数与复变函数 …… 1

1.1　内容提要 …… 1

1.1.1　复数的概念、运算及其几何表示 …… 1

1.1.2　复变函数及其极限与连续 …… 4

1.2　典型例题剖析 …… 7

1.3　测试题 …… 18

1.4　测试题解答 …… 21

1.5　教材习题 1 解答 …… 26

第 2 章　解析函数 …… 42

2.1　内容提要 …… 42

2.1.1　解析函数的概念 …… 42

2.1.2　函数解析的充要条件 …… 43

2.1.3　解析函数与调和函数 …… 44

2.1.4　初等函数 …… 44

2.1.5　解析函数的物理意义 …… 46

2.2　典型例题剖析 …… 47

2.3　测试题 …… 65

2.4　测试题解答 …… 68

2.5　教材习题 2 解答 …… 73

第 3 章　复变函数的积分 …… 94

3.1　内容提要 …… 94

3.1.1　复变函数积分的概念 …… 94

3.1.2　Cauchy 积分定理 …… 94

3.1.3　Cauchy 积分公式 …… 96

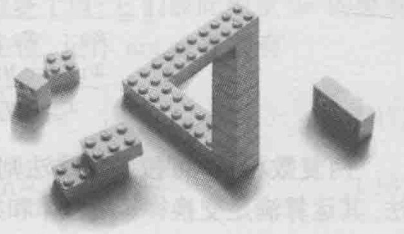
3.2　典型例题剖析 …… 97

3.3　测试题 …… 102

3.4 测试题解答 ······ 105
3.5 教材习题 3 解答 ······ 111
第 4 章 级数 ······ 122
4.1 内容提要 ······ 122
4.1.1 复数项级数与复变函数项级数 ······ 122
4.1.2 幂级数 ······ 123
4.1.3 泰勒级数 ······ 124
4.1.4 洛朗级数 ······ 125
4.2 典型例题剖析 ······ 126
4.3 测试题 ······ 133
4.4 测试题解答 ······ 136
4.5 教材习题 4 解答 ······ 142
第 5 章 留数 ······ 155
5.1 内容提要 ······ 155
5.1.1 孤立奇点 ······ 155
5.1.2 留数 ······ 157
5.1.3 留数在定积分计算中的应用 ······ 158
5.1.4 辐角原理与儒歇定理 ······ 160
5.2 典型例题剖析 ······ 160
5.3 测试题 ······ 169
5.4 测试题解答 ······ 172
5.5 教材习题 5 解答 ······ 180
第 6 章 保形映射 ······ 195
6.1 内容提要 ······ 195
6.1.1 保形映射的概念 ······ 195
6.1.2 分式线性映射与性质 ······ 195
6.1.3 两个重要的分式线性映射 ······ 197
6.1.4 几个初等函数所构成的映射 ······ 197
6.2 典型例题剖析 ······ 199
6.3 测试题 ······ 206
6.4 测试题解答 ······ 209
6.5 教材习题 6 解答 ······ 214
第 7 章 傅里叶变换 ······ 223

7.1　内容提要 ··· 223
7.1.1　傅氏积分定理、傅氏变换的概念 ··· 223
7.1.2　傅氏变换的性质 ··· 228
7.1.3　卷积与相关正数函数 ··· 229
7.2　典型例题剖析 ··· 231
7.3　测试题 ··· 239
7.4　测试题解答 ··· 242
7.5　教材习题 7 解答 ··· 248
第 8 章　拉普拉斯变换 ··· 272
8.1　内容提要 ··· 272
8.1.1　拉氏变换的概念 ··· 272
8.1.2　拉氏变换的性质 ··· 273
8.1.3　拉氏逆变换 ··· 275
8.1.4　拉氏变换的应用 ··· 276
8.1.5　双边拉氏变换的概念 ··· 276
8.2　典型例题剖析 ··· 277
8.3　测试题 ··· 283
8.4　测试题解答 ··· 286
8.5　教材习题 8 解答 ··· 291

第1章 复数与复变函数



1.1 内容提要

1.1.1 复数的概念、运算及其几何表示

1. 复数的概念

设 x, y 是两个实数, 称

$$z = x + \mathrm{i}y \quad (\mathrm{i}^2 = -1) \tag{1.1}$$

为复数. 复数的全体称为复数域, 记作 $\mathbb{C}$. 这里 x 称为复数 z 的实部, y 称为复数 z 的虚部, 记作

$$x = \mathrm{Re}z, \quad y = \mathrm{Im}z \tag{1.2}$$

i 称为虚单位. 特例: 当 $y = 0$ 时, $z = x$ 为实数; 当 $x = 0, y \neq 0$ 时, $z = \mathrm{i}y$ 称为纯虚数.

两复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相等, 即

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \ \ y_1 = y_2 \tag{1.3}$$

$$z = 0 \Leftrightarrow x = 0, \ \ y = 0 \tag{1.4}$$

2. 复数的四则运算

(1) 加法 $z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$ (1.5)

(2) 减法 $z_1 - z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2)$ (1.6)

(3) 乘法 $z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$ (1.7)

(4) 除法 若 $z_2 \neq 0$, 则由 $z_2 z = z_1$ 得

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.8}$$

两复数相乘, 可按多项式法则相乘并注意 $\mathrm{i}^2=-1$ 即可. 如上定义的加法、乘法, 其运算满足交换律、结合律和乘法对加法的分配律.

(1) 加法的结合律:

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3 \tag{1.9}$$

(2) 乘法的结合律:

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3) \tag{1.10}$$

(3) 乘法对加法的分配律:

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3 \tag{1.11}$$

3. 复数的几何表示

(1) 在一个建立了直角坐标系的 xOy 平面上, 每个具有坐标 (x,y) 的点便与复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部、虚部 x,y 形成一一对应. 这种用来表示复数的平面称为复平面 (或 Gauss 平面), 记作 $\mathbb{C}$. 横轴称为实轴, 纵轴称为虚轴.

复数 $x-\mathrm{i}y$ 称为 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数, 记作 $\bar{z}$, 即

$$\bar{z}=x-\mathrm{i}y \tag{1.12}$$

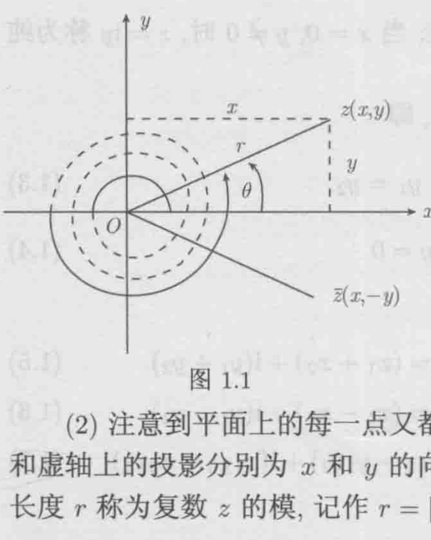


图 1.1

从图 1.1 可看出 $\bar{z}$ 与 z 是关于实轴对称的两点.

我们有

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2 \tag{1.13}$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 \tag{1.14}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \tag{1.15}$$

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}} \tag{1.16}$$

(2) 注意到平面上的每一点又都对应着一个完全确定的向量, 因此可用在实轴和虚轴上的投影分别为 x 和 y 的向量表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$. 对应于复数 z 的向量长度 r 称为复数 z 的模, 记作 $r=|z|$. 当 $z\neq 0$ 时, 实轴的正向与向量 z 之间的夹

角 θ 称为复数 z 的辐角, 记作 $\mathrm{Arg}z$. $\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值, 它们彼此相差 2π 的整数倍. 其中满足 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的一个值称为辐角的主值, 记作 $\arg z$. 显然有

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}} \tag{1.17}$$

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arctan}\frac{y}{x} \tag{1.18}$$

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{1.19}$$

考虑到 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 复数 z 可表为

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.20}$$

称为复数 z 的三角表示式.

应用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 复数 z 还可进一步表为

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.21}$$

称为复数 z 的指数表示式. $z=x+\mathrm{i}y$ 则称为代数表示式.

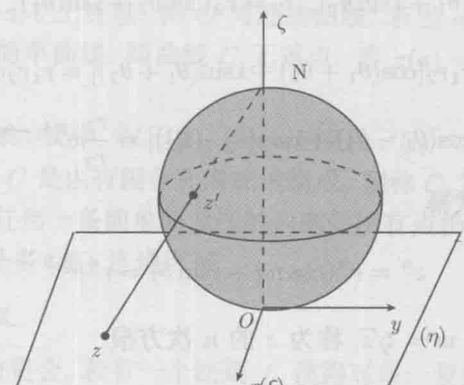


图 1.2

(3) 取一个直径为 1 的球面 Σ(图 1.2), 使其南极 S 与复平面原点 O 相切. 这样对于复平面上任意点通过与北极 N 连线, 在球面 Σ 上就得到一个对应点. 如此, 复平面 $\mathbb{C}$ 上所有的点都与除 N 点外的所有球面 Σ 上的点一一对应. 球面 Σ 称为复球面. 如果选取坐标系 $O\xi\eta\zeta$, 使 $O\xi$, $O\eta$ 分别重合于平面上的 Ox, Oy, 而 $O\zeta$ 则沿着 ON 方向. 那么

$$x=\frac{2\xi}{2-\zeta},\quad y=\frac{2\eta}{2-\zeta} \tag{1.22}$$

或者

$$\xi=\frac{4x}{x^2+y^2+4}$$

$$\eta = \frac{4y}{x^2+y^2+4}$$

$$\zeta = \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2+4} \tag{1.23}$$

假想复平面上与复球面上 N 点对应的点称为无穷远点, 记作 ∞. 无穷远点是一个新的复数, 为了区别, 原来的复数称为有限复数. 对所有有限复数 α

$$\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty \tag{1.24}$$

对所有 $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$,

$$\beta \cdot \infty = \infty \cdot \beta = \infty, \quad \frac{\beta}{0} = \infty, \quad \frac{\beta}{\infty} = 0 \tag{1.25}$$

复数域 $\mathbb{C}$ 加上 ∞, 构成扩充复平面, 记作 $\bar{\mathbb{C}}$, 即 $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

4. 复数的乘幂与方根

利用复数的三角表示法或指数表示法来表示复数的乘法和除法

(1) 设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$, 则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.26}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)] = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} (z_2 \neq 0) \tag{1.27}$$

(2) 复数 z 的 n 次幂

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{1.28}$$

(3) 由 $w^n = z$, 得 $w = \sqrt[n]{z}$, 称为 z 的 n 次方根

$$\begin{aligned} w_k = \sqrt[n]{z} &= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \\ &= r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}} (k = 0, 1, \cdots, n-1) \end{aligned} \tag{1.29}$$

1.1.2 复变函数及其极限与连续

1. 复平面上的点集

(1) 对复平面上两点 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \tag{1.30}$$

称为 z_1, z_2 两点的距离.

(2) 以 z_0 为心, $\delta>0$ 为半径的圆的内部, 即 $U_\delta(z_0)=\{z||z-z_0|<\delta\}$ 称为 z_0 点的 δ 邻域.

(3) 属于平面点集 E 的点 z_0, 若它的某个邻域 $U_\delta(z_0)\subset E$, 则称 z_0 点为 E 的内点.

(4) 若 z_0 点的任一邻域内都含有集 E 的无穷多个点, 则 z_0 称为集 E 的极限点 (或聚点).

(5) 若 z_0 点的任一邻域内既有属于 E 的点, 又有不属于 E 的点, 则 z_0 点称为集 E 的界点. E 的所有界点组成的集合称为 E 的边界, 记为 ∂E.

(6) 若集合 E 的每个点都是内点, 则称 E 为开集.

(7) 若对集 E 中任意两点总存在一条属于 E 的折线连接这两点, 则称集 E 是连通的.

(8) 若平面点集 D 是连通的开集, 则 D 称为区域. $D\cup\partial D=\bar{D}$, 称为闭区域.

(9) 设曲线 C 的参数方程

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\quad(a\leqslant t\leqslant b)\tag{1.31}$$

若 $x(t)$, $y(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续, 称 C 为连续曲线. 若当 $a<t_1\neq t_2<b$ 时, 有 $z(t_1)\neq z(t_2)$, 称 C 为简单曲线, 即曲线 C 无重点. 若 $z(a)=z(b)$, 则称 C 为简单闭曲线.

(10) 在曲线 C (1.31) 式中, 若 $x'(t)$, $y'(t)$ 连续且 $z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}y'(t)\neq 0$ 则称 C 为光滑曲线, 若曲线 C 是由有限条光滑曲线组成, 则称 C 为按 (分) 段光滑曲线.

(11) 若区域 D 内任何一条简单闭曲线的内部的所有点仍属于 D, 则称 D 是单连通区域. 否则称 D 是多 (复) 连通区域.

2. 复变函数的定义

(1) 设 E 是一复数集合, 若有一个法则 f, 使得对每一复数 $z\in E$, 依照法则 f 有确定的复数 w 与之对应, 则称 f 为定义在 E 上的复变函数, 记为 $w=f(z)$.

(2) 设 $z=x+\mathrm{i}y$, $w=u+\mathrm{i}v$, 则从

$$w=u+\mathrm{i}v=f(z)=f(x+\mathrm{i}y)$$

可见, u, v 是关于 x, y 的二元实函数, 即

$$f(z)=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y)$$

(3) 从点的对应关系来看, 复变函数是两个复平面之间的映射, z 所变动平面称为 z 平面, w 所变动的平面称为 w 平面 (有时为方便, 也可设 z 平面与 w 平面重合). $w=f(z)$ 的定义域 E 在 z 平面上取, 值域 G 在 w 平面上取, 因此 $w=f(z)$

就是从平面点集 E 到平面点集 G 的一个映射 (或变换). 常称 E 为原像集, G 为像集.

3. 复变函数的极限与连续

(1) 设 z_0 是 $w=f(z)$ 的定义域 E 的一个极限点, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $0<|z-z_0|<\delta, z\in E$ 时, 有 $|f(z)-A|<\varepsilon$, 称 $f(z)$ 在 E 上当 $z\to z_0$ 时, 以 A 为极限, 记作 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=A$.

特别当 E 是区域时, $z\to z_0$ 的方式是任意的, 此时 $z\in E$ 可省略, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$.

(2) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 则

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B \tag{1.32}$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot g(z)=A\cdot B \tag{1.33}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0) \tag{1.34}$$

(3) 设 $f(z)=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y)$, $A=a+\mathrm{i}b$, $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$, 那么

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,\ y)=a\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,\ y)=b\end{cases} \tag{1.35}$$

(4) 关于含 ∞ 的极限有

$$\lim_{w\to 0} f\left(\frac{1}{w}\right)=A\ (\text{有限数})\ \Leftrightarrow \lim_{z\to\infty} f(z)=A \tag{1.36}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \tag{1.37}$$

(5) 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $|z-z_0|<\delta$ 时,

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续.

(6) 若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 z_0 点连续, 则它们的和、差、积、商 $(g(z_0)\neq 0)$ 也在 z_0 点连续. 且复合函数 $w=f[g(z)]$ 也在 z_0 点连续.

(7)

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,\ y)=u(x_0,\ y_0)\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,\ y)=v(x_0,\ y_0)\end{cases} \tag{1.38}$$

1.2 典型例题剖析

例 1.1 试确定 $\dfrac{z+2}{z-1}$ 的实部和虚部.

分析 考虑 $z=x+\mathrm{i}y$, 将其代入原式. 先将分子、分母分别分成实部和虚部, 然后利用平方差公式将分母化为实数.

解
$$\begin{aligned}\frac{z+2}{z-1}&=\frac{(x+2)+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y}\\&=\frac{(x+2)+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y}\cdot\frac{(x-1)-\mathrm{i}y}{(x-1)-\mathrm{i}y}\\&=\frac{(x+2)(x-1)+y^2+\mathrm{i}[y(x-1)-y(x+2)]}{(x-1)^2+y^2}\end{aligned}$$

因此
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{x^2+x-2+y^2}{(x-1)^2+y^2}$$
$$\mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}$$

例 1.2 解关于 z 的二次方程.

分析 这是关于复数 z 的复系数一元二次方程, 利用复数相等的概念 (1.3) 式, 将其化为关于 x, y 的二元二次方程组, 解这个具有两个方程的方程组, 得到 z 的实部和虚部.

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$, 则

$$(1+\mathrm{i})z^2-2z+(1-\mathrm{i})=0$$

化为

$$(x^2-y^2-2xy-2x+1)+\mathrm{i}(x^2-y^2+2xy-2y-1)=0$$

比较实部、虚部, 得

$$\begin{cases}x^2-y^2-2xy-2x+1=0 & (1.39)\\ x^2-y^2+2xy-2y-1=0 & (1.40)\end{cases}$$

式 (1.39) 加式 (1.40) 得

$$(x+y)(x-y-1)=0$$

解之得

$$x=-y,\ x=y+1$$

当 $x=-y$ 时, $2y^2+y+1=0$, $\varDelta=1-8<0$, 无实根, 舍去;

当 $x=y+1$ 时, $y(y+1)=0$, 解之得 $y=0$ 或 $y=-1$. 当 $y_1=0$ 时, $x_1=1$; 当 $y_2=-1$ 时, $x_2=0$.

因此, $z_1=1$, $z_2=-\mathrm{i}$ 是原方程的解.

例 1.3 设 $\alpha=a+\mathrm{i}b$, $\beta=c+\mathrm{i}d$ 为两个复数, 试证明:

(1) $|\alpha|=0 \Leftrightarrow \alpha=0$;

(2) $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$;

(3) $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\dfrac{|\beta|}{|\alpha|} \quad (\alpha\neq 0)$;

(4) $|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$.

关系式 (4) 也称为三角不等式.

分析 本题要考虑利用复数模的概念 (1.18) 式及复数相等的概念 (1.3) 式及 (1.4) 式.

证 (1) $|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}$, 由 $|\alpha|=0\Rightarrow a^2+b^2=0$, 即必有 $a=0$, $b=0$, 因此有 $\alpha=0$. 反之若 $\alpha=0$, 则 $a=0$, $b=0$, 从而 $\alpha=a+\mathrm{i}b=0$.

(2) $\alpha\beta=(ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc)$, 因此有

$$\begin{aligned}|\alpha\beta|&=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}\\&=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\\&=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\\&=|\alpha|\cdot|\beta|\end{aligned}$$

(3) 将分母化为实数, 我们有

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}}=\frac{\beta\bar{\alpha}}{a^2+b^2}$$

因此 $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\dfrac{|\beta\bar{\alpha}|}{a^2+b^2}$, 由 (2) 及 $|\alpha|=|\bar{\alpha}|$,

$$\frac{|\beta\bar{\alpha}|}{a^2+b^2}=\frac{|\beta||\bar{\alpha}|}{a^2+b^2}=\frac{|\beta||\alpha|}{a^2+b^2}$$

其中分母 $a^2+b^2=\alpha\bar{\alpha}$, 于是得

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{|\beta||\alpha|}{|\alpha|^2}=\frac{|\beta|}{|\alpha|}$$

(4) 先证左边不等式, $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$, 若其中 α 或 β 为 0, 则显然等式成立. 再看一般情况, 由于

$$|\alpha+\beta|=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$|\alpha|+|\beta|=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

设 $P=|\alpha|+|\beta|-|\alpha+\beta|$, 则

$$P=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}-\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

为此, 只需证明 $P\geqslant 0$.

设 $Q=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, 显然 $Q\geqslant 0$, 我们有

$$P\cdot Q=2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}-2(ac+bd)$$

下面讨论 $P\cdot Q$ 的符号.

若 $ac+bd<0$, 则 $P\cdot Q\geqslant 0$, 由 $Q\geqslant 0$ 推得 $P\geqslant 0$.

若 $ac+bd>0$, 设 $R=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+(ac+bd)$, 显然 $R\geqslant 0$, 且 $P\cdot Q\cdot R=2(ad-bc)^2\geqslant 0$(等号成立 α 是 β 的正实倍数). 因此有 $P\cdot Q\geqslant 0$, 推得 $P\geqslant 0$, 即有

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$$

下面再证 $|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha+\beta|$, 由

$$|\alpha|=|(\alpha+\beta)-\beta|\leqslant|\alpha+\beta|+|-\beta|=|\alpha+\beta|+|\beta|$$

得

$$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha+\beta|$$

总之

$$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

例 1.4 (1) 证明以复数 α, β, γ 为系数的二次方程 $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ 的解为

$$z=\frac{-\beta+(\beta^2-4\alpha\gamma)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha}$$

(2) 利用 (1) 的公式解例 1.2 中的方程.

分析 复系数的复一元二次方程, 可以仿照实一元二次方程求解的方法, 推出求根公式, 并注意复数的方根求法. 例如, 复数 α, $\alpha^{\frac{1}{2}}=|\alpha|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\arg z+2k\pi}{2}}(k=0,\ 1)$ 有两个, 即 $|\alpha|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\arg z}{2}}$ 及 $|\alpha|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\arg z+2\pi}{2}}=-|\alpha|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}$.

解 (1)$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, 配方得

$$\alpha\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\gamma-\frac{\beta^2}{4\alpha}=0$$